Lundi 12 octobre 2020, Contrôle continu, Partie Analyse

Durée = 50 minutes. Les documents et la calculatrice ne sont pas autorisés

Traiter au choix quatre exercices parmi les cinq ci-dessous.

Exercice 1. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = x^2$ si $x \in \mathbf{R}$ et soit $a \in \mathbf{R}$. Montrer, en revenant à la définition de limite d'une fonction, que f admet une limite en a.

Soit $a \in \mathbf{R}$.
Si $x \in \mathbf{R}$ alors $f(x) - f(a) = x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)$. Par conséquent si $|x-a| < 1$ alors $|x+a| < (1+2|a|)$ et donc $|f(x) - f(a)| < (1+2|a|) \times |x-a|$.
Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\eta = \min(1, \frac{\varepsilon}{1+2|a|})$. On a $\eta > 0$. D'après ce qui précède, si $x \in \mathbf{R}$ vérifie $|x-a| < \eta$ alors $|x-a| < 1$ et donc $|f(x) - f(a)| < (1+2|a|) \times |x-a|$ et aussi $|x-a| < \frac{\varepsilon}{1+2|a|}$ et donc $|f(x) - f(a)| < (1+2|a|) \times \frac{\varepsilon}{1+2|a|} = \varepsilon$.
On vient de prouver que si $a \in \mathbf{R}$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que si $x \in \mathbf{R}$ vérifie $|x-a| < \eta$ l'inégalité $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ est vérifiée.
Ceci signifie que f admet une limite en tout $a \in \mathbf{R}$ et que cette limite vaut $f(a)$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue telle que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f n'est pas injective. Donner (sans justifier) un exemple d'une telle fonction.

Puisque $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ il existe $A, B \in \mathbf{R}$ tels que si $x \leq A$ alors $f(x) > f(0)$ et si $x \geq B$ alors $f(x) > f(0)$. Observons que ceci implique $A < 0 < B$ ainsi que $f(0) < f(A)$ et $f(0) < f(B)$. Soit $y = \min(f(A), f(B))$. Puisque $f(0) < y \leq f(A)$ et $f(0) < y <\leq f(B)$ et puisque f est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à f sur $[A, 0]$ et sur $[0, B]$ il existe $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $A \leq a < 0 < b \leq B$ et $f(a) = f(b) = y$. Ainsi le réel y possède au moins deux antécédents par f et donc f n'est pas injective.
La fonction f définie par $f(x) = x^2$ si $x \in \mathbf{R}$ est continue, vérifie $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et n'est pas injective.

Exercice 3. Soit $f :]-1, 1[\to \mathbf{R}$ continue telle que $\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to +1} f(x) = -\infty$. Montrer que f n'est pas surjective. Donner (sans justifier) un exemple d'une telle fonction.

Puisque $\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to +1} f(x) = -\infty$ il existe $\varepsilon_1 > 0$ et $\varepsilon_2 > 0$ tels que pour tout $x \in]-1, 1[$, si $x \leq -1 + \varepsilon_1$ alors $f(x) < f(0)$ et si $x \geq 1 - \varepsilon_2$ alors $f(x) < f(0)$. Soit $a = \min(-\frac{1}{2}, -1 + \varepsilon_1)$ et $b = \max(\frac{1}{2}, 1 - \varepsilon_2)$. Il vient $-1 < a < 0 < b < 1$. Puisque f est continue sur $[a, b]$ il existe deux réels $m \leq M$ tels que $f([a, b]) = [m, M]$ et en particulier $m \leq f(0) \leq M$. Posons $y = M + 1$. Soit $x \in]-1, 1[$. Si $x \leq a$ ou $x \geq b$ alors $f(x) < f(0) \leq M < M + 1 = y$. Sinon $x \in [a, b]$ et $m \leq f(x) \leq M < M + 1 = y$. Par conséquent le réel y n'a pas d'antécédent par f et donc f n'est pas surjective.
La fonction f définie par $f(x) = -\frac{1}{1-x^2}$ si $x \in]-1, 1[$ est continue, vérifie $\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to +1} = -\infty$ et n'est pas surjective.

Exercice 4. Soient $a \in]0, +\infty[$ et $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = a \times u_n$ si $n \in \mathbf{N}$. Étudier, en revenant à la définition de la limite d'une suite, la convergence de u.

Pour débuter montrons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ que $u_n = a^n$. Cette propriété est bien vraie pour $n = 0$ car $u_0 = 1 = a^0$. Il reste à prouver qu'elle est héréditaire. Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $u_n = a^n$. Alors $u_{n+1} = a \times_u n = a \times a^n$ et donc $u_{n+1} = a^{n+1}$. L'hérédité est établie et ceci achève achève la preuve de $u_n = a^n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Supposons $a > 1$. On écrit $a = 1+x$ avec $x > 0$. D'après la formule du binôme $u_n = a^n = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$. Puisque les termes $\binom{n}{k} x^k, k \in \{0, \ldots, n\}$ sont tous positifs ou nuls il vient $u_n \geq \binom{n}{0} x^0 + \binom{n}{1} x^1 = 1+nx$. Soit $K \in \mathbf{R}$. On note $N = \max(0, 1+\mathrm{Ent}(\frac{K}{x}))$. Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geq N$ on a $u_n \geq 1+nx > K$. Ceci signifie que si $a > 1$ alors la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est divergente et tend vers $+\infty$.
Supposons $a \in]0,1[$. Soit $\varepsilon > 0$. On pose $K = \frac{1}{\varepsilon}$. On a $K > 0$. D'après ce qui précède appliqué à $\frac{1}{a}$ qui est strictement supérieur à 1, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que si $n \in \mathbf{N}$ vérifie $n \geq N$ alors $(\frac{1}{a})^n > K > 0$. Par conséquent si $n \in \mathbf{N}$ vérifie $n \geq N$ on a $0 < u_n = a^n < \frac{1}{K} = \varepsilon$. Ceci signifie que si $a \in]0,1[$ alors la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente et tend vers 0.
Il reste à considérer le cas $a = 1$. Alors la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est la suite constante égale à 1. Elle est convergente de limite 1.

Exercice 5. Étudier la convergence de $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n - \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ si $n \in \mathbf{N}$.

Soit $v = (v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $w = (w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ si $n \in \mathbf{N}$ les suites extraites associées à u, des termes de rang pair pour v et de rang impair pour w.
Soit $n \in \mathbf{N}$. On a

$$\begin{aligned} v_{n+1} = v_n - \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} &\leq v_n && (1)\\ w_n \leq w_n + \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} &= w_{n+1} && (2)\\ v_n - w_n &= \frac{1}{2n+1} && (3) \end{aligned}$$

D'après (1) la suite $v = (v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante, d'après (2) la suite $w = (w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante et d'après (3) si $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbf{N}$ vérifie $n \geq 1+\mathrm{Ent}(\frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{2})$ alors $0 < v_n - w_n < \varepsilon$ et dont la suite $v - w$ tend vers 0. Les suites v et w sont donc adjacentes. Par conséquent elles sont convergentes vers la même limite finie l. Puisque ce sont les suites extraites associées à u, des termes de rang pair pour v et de rang impair pour w, la suite u est donc aussi convergente et sa limite est l.

Seconde solution en revenant à la définition de la limite d'une suite.

Soit $v = (v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $w = (w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ si $n \in \mathbf{N}$.
Soit $n \in \mathbf{N}$. On a

$$\begin{aligned} v_{n+1} = v_n - \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} &\leq v_n && (1)\\ w_n \leq w_n + \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} &= w_{n+1} && (2)\\ w_n = v_n - \frac{1}{2n+1} &\leq v_n && (3) \end{aligned}$$

D'après (1) la suite $v = (v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante, d'après (2) la suite $w = (w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante et d'après (3) la suite v majore la suite w. Puisque w est croissante et que $w_0 = 0$ elle est positive ou nulle et donc puisqu'elle minore v la suite v est positive ou nulle. L'ensemble $\{v_n : n \in \mathbf{N}\}$ est donc un ensemble non vide et minoré. Il admet une borne inférieure l.
Soit $\varepsilon > 0$. Puisque l est la borne inférieure de $\{v_n : n \in \mathbf{N}\}$ il existe n_0 tel que $l \leq v_{n_0} < l+\varepsilon$. On pose $N = \max(2n_0, \mathrm{Ent}(\frac{1}{\varepsilon})+1)$. Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geq N$. Si n est pair alors il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que $n = 2m$ et $m \geq n_0$. On a donc $l \leq u_n = u_{2m} = v_m \leq v_{n_0} < l+\varepsilon$. Si n est impair alors $\frac{1}{n} < \varepsilon$ et il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que $n = 2m+1$ et $m \geq n_0$. On a donc $l - \varepsilon < u_n = u_{2m+1} = v_m - \frac{1}{n} \leq v_{n_0} < l+\varepsilon$.
On vient de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$ supérieur ou égal à N on a $|l - u_n| < \varepsilon$. Ceci prouve la convergence de $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.