Exercices à rédiger tirés des parties
suites et fonctions
du vrai-faux accessible par ce lien

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse. Si elle est vraie, la démontrer. Si elle est fausse, donner un contre-exemple.

1. Toute suite convergente de nombres réels est bornée.

2. Toute suite de nombres réels strictement croissante diverge vers $+\infty$.

3. Toute suite de nombres réels convergente est monotone à partir d'un certain rang.

4. La nature d'une suite ne dépend pas du choix de son premier terme.

5. Si une suite est divergente, alors elle n'est pas bornée.

6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels non nuls. Si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers $a \geq 1$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ diverge.

7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels non nuls. Si la limite de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est égale à 1, alors la limite de $u_{n+1} - u_n$ est égale à 0.

8. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est positive et converge vers 1, alors $(u_n^n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge aussi vers 1.

9. Si une suite de nombres rationnels converge vers un réel l, alors $l \in \mathbf{Q}$.

10. Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est monotone, alors toute suite de la forme $f_{n+1} = fu_+1 = f(u_n)$ est aussi monotone.

11. Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est continue et admet un unique point fixe, alors toute suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ converge.

12. Si la série de nombres réels $\sum_n a_n$ converge, alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.

13. Si la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0, alors la série de nombres réels $\sum_n a_n$ converge.

14. La fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x \in \mathbf{Q}$ et $f(x) = 1$ si $x \notin \mathbf{Q}$ n'est continue en aucun point.

15. Soit I un sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbf{R}$. La borne supérieure de I appartient à I.

16. Les sous-ensembles compacts de $\mathbf{R}$ sont les segments.

17. Pour a un complexe de module strictement inférieur à 1, la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ est égale à $\frac{1}{1-a}$

18. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels qui converge en décroissant vers 0. Le reste de la série alternée $\sum_n (-1)^n u_n$ satisfait $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \leq u_{n+1}$.

19. Une fonction à valeurs dans $\mathbf{R}$ continue sur un intervalle fermé borné de $\mathbf{R}$ est uniformément continue.

20. Toute fonction définie et continue sur un intervalle ouvert I de $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$ est dérivable sur l'intervalle I.

21. Toute fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$ est continue sur l'intervalle I.

22. Une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ périodique admet une limite en $+\infty$.

23. Soient x_0 un nombre réel et f et g deux fonctions définies sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$. Si la fonction f est continue en x_0 et si la fonction g ne l'est pas, alors la fonction $f+g$ n'est pas continue en x_0.

24. Soit f une fonction définie et croissante sur l'intervalle $[-3;2]$ telle que $f(-3)=-1$ et $f(2)=4$. L'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-3;2]$.

25. Soit f la fonction définie en tout réel x différent de -1 par $f(x)=\frac{5x+3}{4x+4}$. Pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1, on a $f(x)\geq 1$.

26. Soit f une fonction définie et croissante sur $\mathbf{R}$. Si f est dérivable, alors sa fonction dérivée f' est positive ou nulle sur $\mathbf{R}$.

27. La fonction $h : x :\to \sqrt{|x|}$ est dérivable sur $\mathbf{R}$.

28. Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$. Si f est périodique et monotone, alors f est constante.

29. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$, et g une fonction définie sur $f(I)$ à valeurs dans $\mathbf{R}$. Les fonctions f et g ne sont pas nécessairement dérivables. Si f est décroissante sur I et si g est décroissante sur $f(I)$, alors $g\circ f$ est croissante sur I.

30. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbf{R}$. Si f est paire, alors sa fonction dérivée f' est impaire.

31. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{R}$. Pour tout réels x et y, on a $f(x)-f(y)=(x-y)f'(y)$.

32. Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$. Si f admet un développement limité à l'ordre 1 en $a\in\mathbf{R}$, alors f est dérivable en a.

33. Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$. Si f admet un développement limité à l'ordre 2 en $a\in\mathbf{R}$, alors f est deux fois dérivable en a.

34. $\sin(a)=-\sin(b)$ si et seulement si $a=-b \bmod 2\pi$ ou $a=\pi+b \bmod 2\pi$.

35. $\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)=2$ si et seulement si $x=\frac{\pi}{12} \bmod 2\pi$ ou $x=\frac{19\pi}{12} \bmod 2\pi$.

36. Soient $a<b$ des réels et $f :]a,b[\to\mathbf{R}$ une fonction continue. Si f tends vers $+\infty$ en a et en b, alors f admet un minimum sur $]a,b[$.

37. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$. Si $f'(a)=0$, alors a est un extremum.

38. Soit E la fonction qui à un nombre réel associe sa partie entière. La fonction $x\mapsto\frac{x\sin(\pi x)}{E(x)}$ est continue sur $[1,+\infty[$.

39. Soit $f : [0,+\infty[\to\mathbf{R}$ une fonction continue ayant une limite finie en $+\infty$. Alors f est bornée sur $[0,+\infty[$.

40. Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$. Si f est continue, alors f admet une primitive.

41. Soit f une fonction continue définie sur un segment et à valeurs dans $\mathbf{R}$. Alors f admet un nombre fini de zéros.

42. La fonction définie par $f(0)=0$ et $f(x)=x\sin(\frac{1}{x})$ si $x\neq 0$ est dérivable sur $\mathbf{R}$.

43. La fonction $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ définie par $f(x)=0$ si $x\leq 0$ et $f(x)=x^{\pi}$ si $x>0$ admet un développement limité jusqu'à l'ordre 3 en 0.