## Exercices à rédiger

**Exercice 1.** Étudier la nature des suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par :

a) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ b) $u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n+\ln(n)}$ c) $u_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ pour $a > 0$ et $b > 0$

d) $u_n = \dfrac{n^2+\cos(n)}{2^n+\sin(n)}$ e) $u_n = \displaystyle\prod_{p=2}^{n}(1-\frac{1}{p})$

**Exercice 2.** Étudier la nature des suites $(u_n)_{n\geq 1}$ définies par :

a) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$ b) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^2+k}}$ c) $u_n = \displaystyle\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k!$

d) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ e) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ f) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

**Exercice 3.** 1) Soient $f$ une fonction convexe et dérivable sur un intervalle $I$ et $a, x \in I$. Montrer que $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$. Interpréter géométriquement cette inégalité.
2) Soit $x > 0$. On pose $f(x) = \dfrac{1}{x}$. En utilisant l'égalité $\ln(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)dt$ et la convexité de $f$ sur $[1, 2]$ majorer $\ln(2)$ par la surface d'un trapèze. En appliquant le 1) à 1$f$, pour $a = 2$, minorer $\ln(3)$ par la surface d'un trapèze. En déduire que $e \in ]2, 3[$ ($e$ est défini par $\ln(e) = 1$)

**Exercice 4.** On pose $v_n = 2^n \sin(\dfrac{\pi}{2^n})$, pour $n \in \mathbf{N}$.

1) Montrer en utilisant la formule de Taylor-Lagrange pour sinus en 0 que $|\pi - v_n| \leq \dfrac{\pi^3}{6 \times 4^n}$.

2) Montrer de même que $|\pi - v_n - \dfrac{\pi^3}{6\times 4^n}| \leq \dfrac{\pi^5}{120 \times 4^{2n}}$.

3) Soit $\lambda$ un nombre réel. On pose $w_n = \lambda v_{n+1} + (1-\lambda)v_n$. Déterminer le réel $\lambda$ pour que l'on ait, pour tout $n \in \mathbf{N}$ : $|\pi - w_n| \leq \dfrac{K}{4^{2n}}$, où $K$ est une constante, que l'on précisera.

**Exercice 5.** Soit $\varepsilon > 0$. Donner $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, si $|x-4| < \eta$ alors $|\sqrt{x}-2| < \varepsilon$.
Soit $\varepsilon > 0$. Donner $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, si $|x-2| < \eta$ alors $|x^3 - 8| < \varepsilon$.

**Exercice 6.** Montrer que $f$ définie par $f(x) = \sin(x)$ si $x \in \mathbf{R}$ est uniformément continue.
Montrer que $f$ définie par $f(x) = \sin(x^2)$ si $x \in \mathbf{R}$ n'est pas uniformément continue.