Exercices à rédiger

Exercice 1.

[Les solutions proposées utilisent les propriétés algébriques des limites de suites, le fait que la suite des inverses des entiers naturels non nuls tend vers 0, le fait que la fonction qui à $x \in \mathbf{R}_+$ associe $\sqrt{x}$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et la convergence vers 0 de toute suite géométrique de raison dans $]0,1[$. Elles utilisent aussi le théorème de comparaison, dit théorème des gendarmes, la formule du binôme de Newton, l'étude de la fonction qui à $x \geq 1$ associe $x - \ln(x)$, la propriété de morphisme du logarithme et l'encadrement par -1 et 1 des fonctions sinus et cosinus.]

Étudier la nature des suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par :

a) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ b) $u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n+\ln(n)}$ c) $u_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ pour $a > 0$ et $b > 0$

d) $u_n = \dfrac{n^2+\cos(n)}{2^n+\sin(n)}$ e) $u_n = \displaystyle\prod_{p=2}^{n}(1-\frac{1}{p})$

a) Soit $n \in \mathbf{N}$. La somme $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ et strictement positive et donc on peut écrire

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \times \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

Or, puisque la fonction $x \in \mathbf{R}_+ \mapsto \sqrt{x}$ vérifie $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$, il vient

$$\lim_{n\in\mathbf{N}\to+\infty} \sqrt{n} = \lim_{n\in\mathbf{N}\to+\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$$

et donc

$$\lim_{n\in\mathbf{N}\to+\infty} (\sqrt{n}+\sqrt{n+1}) = +\infty.$$

Aussi, par passage à l'inverse, on obtient $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

b) Montrons d'abord que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$. La fonction f qui à $x \geq 1$ associe $f(x) = x - \ln(x)$ est dérivable et $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} \geq 0$ si $x \geq 1$. Elle est donc croissante et comme $f(1) = 1$, $f(x) \geq 1 > 0$ si ≥ 1 et donc $x > \ln(x)$ si $x \geq 1$. De plus, il découle de la propriété de morphisme de ln que si $x \geq 1$ alors $\dfrac{\ln(x)}{x} = 2\dfrac{\ln(\sqrt{(x)})}{\sqrt{(x)}} \times \dfrac{1}{\sqrt{(x)}}$. Ainsi, il vient $0 < \dfrac{\ln(x)}{x} \leq \dfrac{2}{\sqrt{(x)}}$ si $x \geq 1$. Finalement, puisque $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}} = 0$, le théorème d'encadrement implique que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.
Cette propriété de croissance comparée établie, étudions la suite. Si $n \in \mathbf{N}$ on a

$$u_n = \frac{n+(-1)^n}{n+\ln(n)} = \frac{1+\frac{(-1)^n}{n}}{1+\frac{\ln(n)}{n}}.$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} (1+(-1)^n\dfrac{1}{n}) = 1$ et, puisque $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$ et donc $\lim_{n\to\infty} (1+\dfrac{\ln(n)}{n}) = 1$. Aussi, puisque lorsque deux suites convergent vers deux limites finies non nulles la suite quotient converge vers le quotient de ces limites, il vient

$$\lim_{n+\to\infty} u_n = \frac{\lim_{n\to+\infty}(1+(-1)^n\frac{1}{n})}{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{\ln(n)}{n})} = 1.$$

c) On va distinguer trois cas selon que $a = b$, $a > b$ ou $a < b$.
Si $a = b$ alors pour tout $n \in \mathbf{N}$ $u_n = 1$. La suite est la suite constante 1, elle est convergente de limite 1.
Si $a > b$ alors, si $n \in \mathbf{N}$,

$$u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} = \frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^n}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}.$$

Or, puisque $a > b$, la suite de terme général $\left(\dfrac{b}{a}\right)^n$ est une suite géométrique de raison $\frac{b}{a} \in]0,1[$, elle est donc convergente vers 0. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\left(\dfrac{b}{a}\right)^n) = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^n) = 1$, et, par passage au quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
Si $a < b$ alors, si $n \in \mathbf{N}$,

$$u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1}.$$

Or, puisque $a < b$, la suite de terme général $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ est une suite géométrique de raison $\frac{a}{b} \in]0,1[$, elle est donc convergente vers 0. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1+\left(\dfrac{a}{b}\right)^n) = -1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(\left(\dfrac{a}{b}\right)^n+1) = 1$, et, par passage au quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$.

d) Montrons d'abord que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{2^n} = 0$. [On propose une preuve différente de celle qui consiste à partir de $\frac{n^2}{2^n} = \exp(2\ln(n) - \ln(2)n)$ puis d'utiliser $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ ou de celle qui consiste à recourir à l'inégalité $(1+a)^n \geq na$ si $a > 0$ et $n \in \mathbf{N}$]. Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geq 4$. La formule du binôme de Newton appliquée à $(1+1)^n$ donne, puisque $1^d = 1$ pour tout entier $d \in \mathbf{N}$,

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \geq 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \geq \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \geq 0.$$

Ceci implique, si $n \geq 4$ et donc $n - 1 > n - 2 \geq \frac{1}{2}n$,

$$0 \leq \frac{1}{2}\frac{n}{2^n} < \frac{n(n-1)}{2^n} \leq \frac{6}{n-2} \leq \frac{12}{n}$$

ou encore

$$0 \leq \frac{n}{2^n} < \frac{24}{n}.$$

Puisque la suite nulle et la suite de terme général $\frac{24}{n}$ tendent vers 0, le théorème d'encadrement permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{2^n} = 0$ [on peut remarquer que les arguments de cette preuve permettent d'établir que si $k \in \mathbf{N}^*$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^k}{(1+a)^n} = 0$ si $a > 0$].
Cette propriété de croissance comparée établie, étudions la suite.
Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Puisque $|\cos(n)| \leq 1$ et $|\sin(n)| \leq 1$ il vient $1 \leq n \leq n^2$ et donc $0 \leq n^2 + \cos(n) \leq n^2 + 1 \leq 2n^2$ et $2 \leq 2^n$ donc $0 < 2^n + \sin(n) \geq 2^n - 1 \geq 2 \times 2^n$. Par conséquent,

$$0 \leq u_n = \frac{n^2 + \cos(n)}{2^n + \sin(n)} \leq \frac{4n^2}{2^n},$$

et, puisque $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{n^2}{2^n}=0$ et donc $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{4n^2}{2^n}=0$, le théorème d'encadrement implique que $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$.
e) Vérifions par récurrence sur $n\in\mathbf{N}\setminus\{0,1\}$ que $u_n=\frac{1}{n}$.
Au rang $n=2$ la propriété est bien vérifiée $u_2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.
Il reste donc à vérifier l'hérédité de la propriété annoncée. Soit donc $n\in\mathbf{N}\setminus\{0,1\}$ fixé. Supposons que $u_n=\frac{1}{n}$. Alors

$$u_{n+1}==\prod_{p=2}^{n+1}(1-\frac{1}{p})=\left(\prod_{p=2}^{n}(1-\frac{1}{p})\right)\times(1-\frac{1}{n+1})=\frac{1}{n}\times(1-\frac{1}{n+1})=\frac{1}{n+1}.$$

Ceci achève la preuve de l'hérédité et donc conclut la preuve de la propriété : si $n\in\mathbf{N}\setminus\{0,1\}$, $u_n=\frac{1}{n}$.
Finalement la suite étudiée est la suite des inverses des entiers naturels supérieurs ou égaux à 2. C'est donc une suite convergente et sa limite et 0.

Exercice 2.

[En reprend les arguments utilisés dans le premier exercice. Ici il ne faut pas utiliser des critères qui marchent pour le séries dès que le symbole ${}_ds\sum$ apparaît. Seules les suites de e) et f) sont des séries.]

Étudier la nature des suites $(u_n)_{n\geq 1}$ définies par :

$$\text{a) } u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k}\quad \text{b) } u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{\sqrt{n^2+k}}\quad \text{c) } u_n=\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}k!$$
$$\text{d) } u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\quad \text{e) } u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\quad \text{f) } u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$$

a) Montrons tout d'abord que si $t\in]0,1[$ alors $1-t<\dfrac{1}{1+t}<1$.
Si $t\in]0,1[$ alors $0<1-t$, $0<t^2<1$ et $1<1+t$ donc $0<(1-t)(1+t)=1-t^2<1<1+t$.
En divisant par $1+t$ il vient $1-t<\dfrac{1}{1+t}<1$.
Soit $n\in\mathbf{N}^*$. Si $k\in\{1,...,n\}$ alors

$$\frac{1}{n}(1-\frac{1}{n})\leq\frac{1}{n}(1-\frac{k}{n^2})<\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n^2}}=\frac{n}{n^2+k}<\frac{1}{n}.$$

En sommant il vient

$$1-\frac{1}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}(1-\frac{1}{n})\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}(1-\frac{k}{n^2})<u_n<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}=1.$$

Puisque les suites de terme général $1-\frac{1}{n}$ et de terme général 1 tendent vers 1, on déduit du théorème d'encadrement que la suite de terme général u_n tend vers 1.
b) Soit $n\in\mathbf{N}^*$. Si $k\in\{1,...,n\}$ alors $k\leq 3n^2$, donc $n^2+k\leq 4n^2$ et ce ceci entraîne $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+k}}\geq\dfrac{n}{2n}=\dfrac{1}{2}$.
En sommant il vient

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{\sqrt{n^2+k}}\geq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}=\frac{n}{2}.$$

Puisque la suite de terme général $\frac{n}{2}$ tend vers $+\infty$, on déduit du théorème de comparaison que la suite de terme général u_n tend vers $+\infty$.
c) Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geq 3$. On a

$$u_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k! = \sum_{k=1}^{n-2} \frac{k!}{n!} + \frac{1}{n} + 1.$$

Or si $k \in \{1, ..., n-2\}$ alors $0 < \dfrac{k!}{n!} < \dfrac{1}{n(n-1)}$. Donc

$$\frac{1}{n} + 1 \leq u_n \leq \frac{1}{n} + 1 + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n} + 1 + \frac{n-2}{n(n-1)}.$$

Puisque les suites de terme général $\frac{1}{n} + 1$ et de terme général $\frac{1}{n} + 1 + \frac{n-2}{n(n-1)}$ tendent vers 1, on déduit du théorème d'encadrement que la suite de terme général u_n tend vers 1.
d) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On a

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

et donc u_n est la somme de Riemann associée à la fonction f définie sur $[1, 2]$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ et à une subdivision en n intervalles de même longueur égale à $\frac{1}{n}$. Puisque la fonction f est continue la suite de terme général u_n tend vers l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 f(t)dt$ c'est à dire vers $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t}(t)dt = \ln(2)$.
La suite est donc convergente vers $\ln(2)$.
e) Si $n \in \mathbf{N}^*$ alors on a $0 < \dfrac{1}{n+1} = u_{n+1} - u_n$.
La suite est donc strictement croissante.
Montrons d'abord par récurrence que si $n \in \mathbf{N}^*$ alors $\dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
La propriété annoncée est vraie au rang $n = 1$ puisque $\dfrac{1}{1!} = 1 \leq \dfrac{1}{2^{1-1}}$.
Vérifions l'hérédité de la propriété. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ fixé. On suppose $\dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$. Alors, puisque $n \in \mathbf{N}^*$, $n+1 \geq 2$ et donc $\dfrac{1}{(n+1)!} = \dfrac{1}{!} \times \dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{1}{2^{n-1}} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2^n}$. Ceci achève la preuve de l'hérédité et donc la preuve de la propriété.
Montrons que si $n \in \mathbf{N}^*$ alors $u_n \leq 2 - \dfrac{1}{2^{n-1}} < 2$.
La propriété annoncée est vraie au rang $n = 1$ puisque $u_1 = 1 \leq 2 - \dfrac{1}{2^{1-1}} < 2$.
Vérifions l'hérédité de la propriété. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ fixé. On suppose $u_n \leq 2 - \dfrac{1}{2^{n-1}} < 2$. Puisque $n \in \mathbf{N}^*$, $n+1 \geq 2$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{(n+1)!} \leq (2 - \dfrac{1}{2^{n-1}}) + \dfrac{1}{2^n} = 2 - \dfrac{1}{2^n}$. Ceci achève la preuve de l'hérédité et donc la preuve de la propriété.
Ainsi si $n \in \mathbf{N}^*$ on a $u_n \leq 2 - \dfrac{1}{2^{n-1}} < 2$. La suite est donc majorée par 2. Puisqu'elle est aussi croissante, elle est convergente.
f) Si $n \in \mathbf{N}^*$ alors on a $0 < \dfrac{1}{(n+1)^2} = u_{n+1} - u_n$.
La suite est donc strictement croissante.
Montrons par récurrence que si $n \in \mathbf{N}^*$ $u_n \leq 2 - \dfrac{1}{n}$.
La propriété annoncée est vraie au rang $n = 1$ puisque $u_1 = 1 \leq 2 - \dfrac{1}{1}$.

Vérifions maintenant l'hérédité de la propriété. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ fixé. On suppose que $u_n \leq 2 - \dfrac{1}{n}$.
Alors, puisque $\dfrac{1}{(n+1)^2} < \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} =& u_n + \frac{1}{(n+1)^2} \\ &\leq (2 - \frac{1}{n}) + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) \\ &\leq 2 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Ceci achève la preuve de l'hérédité et donc la preuve de la propriété.
Ainsi si $n \in \mathbf{N}^*$ on a $u_n \leq 2 - \dfrac{1}{n} < 2$. La suite est donc majorée par 2. Puisqu'elle est aussi croissante, elle est convergente.

Exercice 3.

[On utilise deux interprétations géométriques de la convexité d'une fonction à l'aide de cordes et de tangentes à son graphe. On utilise aussi la convexité stricte de $\frac{1}{t}$, la fonction logarithme et le calcul de l'aire d'un trapèze.]

1) Soient f une fonction convexe et dérivable sur un intervalle I et $a, x \in I$.
Montrer que $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$. Interpréter géométriquement cette inégalité.

Puisque f est dérivable sur l'intervalle I, d'après le théorème des accroissements finis il existe c entre a et x tel que $f(x) - f(a) = f'(c) \times (x-a)$ c'est à dire $f(x) = f(a) + f'(c) \times (x-a)$.
Puisque f est convexe et dérivable, sa dérivée f' est croissante.
On distingue deux cas.
Si $x \geq a$ alors $x - a \geq 0$ et c qui est entre a et x vérifie $a \leq c$ et donc $f'(a) \leq f'(c)$. Par conséquent si $x \geq a$ alors alors $f'(c) \times (x-a) \leq f'(a) \times (x-a)$ et donc

$$f(x) = f(a) + f'(c) \times (x-a) \geq f(a) + f'(a) \times (x-a)$$

.
Si $x \leq a$ alors $x - a \leq 0$ et c qui est entre a et x vérifie $a \geq c$ et donc $f'(a) \geq f'(c)$. Par conséquent si $x \leq a$ alors $f'(c) \times (x-a) \leq f'(a) \times (x-a)$ et donc

$$f(x) = f(a) + f'(c) \times (x-a) \geq f(a) + f'(a) \times (x-a)$$

.
On a bien établi que dans tous les cas, si $a, x \in I$ alors $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$.
Puisque $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ est l'équation de la tangente au graphe de f au point $(a, f(a)$ l'inégalité démontrée traduit le fait que le graphe d'une fonction convexe est au dessus de ses tangentes.

2) Soit $x > 0$. On pose $f(x) = \dfrac{1}{x}$. En utilisant l'égalité $\ln(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)dt$ et la convexité de f sur $[1,2]$ majorer $\ln(2)$ par la surface d'un trapèze. En appliquant le 1) à lf, pour $a = 2$, minorer $\ln(3)$ par la surface d'un trapèze. En déduire que $e \in]2,3[$ (e est défini par $\ln(e) = 1$)

Si ϕ est une fonction convexe définie sur un intervalle I et si $[a,b] \subset I$ alors pour tout $t \in [0,1]$ $\phi(tb + (1-t)a)) \leq t\phi(b) + (1-t)\phi(a)$. Puisque $[a,b] = \{tb + (1-t)a : t \in [0,1]\}$, l'ensemble $\{(tb + (1-t)a, \phi(tb + (1-t)\phi(a)) : t \in [0,1]\}$ est la corde au graphe de ϕ entre $(a, \phi(a))$ et $(b, \phi(b))$ et la propriété de convexité traduit le fait cette corde est au dessus du graphe de ϕ.

Si ϕ est positive, ceci implique que l'aire du trapèze bordé par l'axe des x, la droite $x = a$, la droite $x = b$ et cette corde, c'est à dire $\frac{1}{2}(b-a)(\phi(a)+\phi(b))$, majore l'aire de la zone bordée par l'axe des x, la droite $x = a$, la droite $x = b$ et le graphe de ϕ, c'est à dire $\displaystyle\int_a^b \phi(t)dt$:

$$\frac{1}{2}(b-a)(\phi(a)+\phi(b)) \geq \int_a^b \phi(t)dt.$$

Cette inégalité appliquée avec $\phi = f$, $a = 1$ et $b = 2$ donne $\frac{3}{4} = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}) \geq \int_1^1 \frac{1}{t}dt = \ln(2)$ c'est à dire $\frac{3}{4} \geq \ln(2)$.
D'après la question 1), puisque f est convexe, son graphe est au dessus de sa tangente en $(2, \frac{1}{2})$. Par conséquent $\ln(3)$ qui est égal à $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{t}dt$ c'est à dire qui est égal à l'aire de la zone bordée par l'axe des x, la droite $x = 1$, la droite $x = 3$ et le graphe de f, majore l'aire du trapèze bordé par l'axe des x, la droite $x = 1$, la droite $x = 3$ et la tangente au graphe de f en $(2, \frac{1}{2})$. Cette aire vaut $\displaystyle\int_1^3 (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(t-2))dt$ et elle vaut $1 = (3-1) \times \frac{1}{2}$ car 2 est le milieu de $[1, 3]$ de la hauteur du trapèze. Ainsi $\ln(3) \geq 1$. Cette inégalité est stricte car $\frac{1}{t} > \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(t-2)$ si $t \neq 2$: $\ln(3) > 1$.
Finalement on a établi $\ln(3) > 1 > \frac{3}{4} \geq \ln(2)$. Puisque la fonction exponentielle est strictement croissante et que $\ln(e) = 1$ il vient $3 > e > 2$ c'est à dire $e \in]2, 3[$.

Exercice 4.

[On utilisera essentiellement la formule de Taylor-Lagrange deux fois et chaque fois on l'applique à plusieurs grandeurs. On sera donc prudent en prenant soin de bien distinguer les restes. On utilisera aussi les majorations de $|\sin|$ et $|\cos|$ par 1 et les relations différentielles $\sin' = \cos$ et $\cos' = \sin$.]

On pose $v_n = 2^n \sin(\dfrac{\pi}{2^n})$, pour $n \in \mathbf{N}$.

1) Montrer en utilisant la formule de Taylor-Lagrange pour sinus en 0 que $|\pi - v_n| \leq \dfrac{\pi^3}{6 \times 4^n}$.

La fonction sinus est infiniment dérivable dur $\mathbf{R}$ donc au moins trois fois dérivable. D'après la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 3 appliquée à sin entre 0 et $x_n = \dfrac{\pi}{2^n}$ il existe $c_n \in \mathbf{R}$ tel

$$\sin(x_n) = \sin(0) + \sin'(0)x_n + \frac{1}{2}\sin''(0)x_n^2 + \frac{1}{6}\sin'''(c_n)x_n^3.$$

Puisque $\sin(0) = 0$, $\sin'(0) = 1$, $\sin''(0) = 0$ et $\sin'''(c_n) = -\cos(c_n)$ il vient

$$\sin(x_n) = x_n - \frac{1}{6}\cos(c_n)x_n^3$$

et donc

$$|x_n - \sin(x_n)| = |\frac{1}{6}\cos(c_n)x_n^3| \leq \frac{1}{6}x_n^3.$$

En remplaçant x_n par sa valeur et en multipliant les termes de l'égalité par 2^n il vient

$$\begin{aligned}|\pi - v_n| &= 2^n|\sin(\frac{\pi}{2^n}) - \frac{\pi}{2^n}| \\ &\leq 2^n\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2^n}\right)^3 \\ &\leq \frac{\pi^3}{6 \times 4^n}.\end{aligned}$$

2) Montrer de même que $|\pi - v_n - \frac{\pi^3}{6\times 4^n}| \leq \frac{\pi^5}{120\times 4^{2n}}$.

On reprend le raisonnement précédent en appliquant la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 5 à sin entre 0 et $x_n = \frac{\pi}{2^n}$: puisque $\sin(0) = \sin''(0) = \sin^{(4)}(0) = 0$ et $\sin'(0) = -\sin'''(0) = \sin^{(5)}(0) = 1$ il existe $d_n \in \mathbf{R}$ tel

$$\sin(x_n) = x_n - \frac{1}{6}x_n^3 + \frac{1}{120}\cos(d_n)x_n^5$$

et donc

$$|x_n - \sin(x_n) - \frac{1}{6}x_n^3 + | = |\frac{1}{120}\cos(d_n)x_n^5| \leq \frac{1}{120}x_n^5.$$

En remplaçant x_n par sa valeur et en multipliant les termes de l'égalité par 2^n il vient

$$\begin{aligned}
|\pi - v_n - \frac{\pi^3}{6\times 4^n}| &= |\pi - v_n - 2^n\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2^n}\right)^3|\\
&= 2^n|\sin(\frac{\pi}{2^n}) - \frac{\pi}{2^n} + \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2^n}\right)^3|\\
&\leq 2^n\frac{1}{120}\left(\frac{\pi}{2^n}\right)^5\\
&\leq \frac{\pi^5}{120\times 4^{2n}}.
\end{aligned}$$

3) Soit λ un nombre réel. On pose $w_n = \lambda v_{n+1} + (1-\lambda)v_n$. Déterminer le réel λ pour que l'on ait, pour tout $n \in \mathbf{N}$: $|\pi - w_n| \leq \frac{K}{4^{2n}}$, où K est une constante, que l'on précisera.

On a

$$\begin{aligned}
|\pi - w_n| &= |\pi - (\lambda v_{n+1} + (1-\lambda)v_n)|\\
&= |\lambda(\pi - v_{n+1}) + (1-\lambda)(\pi - v_n)|\\
&= |\lambda(\pi - v_{n+1} - \frac{\pi^3}{6\times 4^{n+1}}) + (1-\lambda)(\pi - v_n - \frac{\pi^3}{6\times 4^n}) + (\frac{\lambda}{4} + (1-\lambda))\frac{\pi^3}{6\times 4^n}|
\end{aligned}$$

Posons $\lambda = \frac{4}{3}$. Alors $(\frac{\lambda}{4} + (1-\lambda)) = 0$ et

$$\begin{aligned}
|\pi - w_n| &= |\frac{4}{3}(\pi - v_{n+1} - \frac{\pi^3}{6\times 4^{n+1}}) - \frac{1}{3}(\pi - v_n - \frac{\pi^3}{6\times 4^n})|\\
&\leq \frac{4}{3}|\pi - v_{n+1} - \frac{\pi^3}{6\times 4^{n+1}}| + \frac{1}{3}|\pi - v_n - \frac{\pi^3}{6\times 4^n}|\\
&\leq \frac{4}{3}\frac{\pi^5}{120\times 4^{2n+2}} + \frac{1}{3}\frac{\pi^5}{120\times 4^{2n}}\\
&\leq \frac{\pi^5}{3^2\times 2^5}\frac{1}{4^{2n}}.
\end{aligned}$$

On vient de prouver que si $n \in \mathbf{N}$ alors $|\pi - w_n| \leq \frac{K}{4^{2n}}$ avec $K = \frac{\pi^5}{3^2\times 2^5}$.

Exercice 5.

[Il s'agit ici d'établir la continuité (l'existence de limite) de la fonction $\sqrt{\ }$ en 4 en revenant à la définition. Le nombre η trouvé ne doit dépendre que de ε et pas de x. La méthode générale pour montrer qu'une fonction f admet une limite l en a consiste (dans les cas les moins compliqués) à essayer de majorer $|f(x)-l|$ par $|x-l|\times\phi(x)$ où ϕ est une fonction positive qu'on essaiera de majorer par un nombre $K>0$ (quitte à la restreindre à un intervalle $[a-\delta,a+\delta]$. Si ça marche on prend alors $\eta=\min(\delta,\frac{1}{K}\varepsilon)$.]

Soit $\varepsilon>0$. Donner $\eta>0$ tel que pour tout $x\in\mathbf{R}$, si $|x-4|<\eta$ alors $|\sqrt{x}-2|<\varepsilon$.

Pour que $\sqrt{x}$ soit défini il est nécessaire et suffisant que $x\geq 0$. On cherchera donc $\eta\in]0,4]$. Si $x\in]4-4,4+4[=]0,8[$ on a $\sqrt{x}+2\geq 2$ et donc $|\sqrt{x}-2|=|x-2|\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}\leq|x-2|$. Par conséquent si, pour tout $\varepsilon>0$, on pose $\eta=\min(\varepsilon,4)$, alors tout $x\in\mathbf{R}_+$ tel $|x-4|<\eta$ vérifie $|\sqrt{x}-2|<\varepsilon$.

Soit $\varepsilon>0$. Donner $\eta>0$ tel que pour tout $x\in\mathbf{R}$, si $|x-2|<\eta$ alors $|x^3-8|<\varepsilon$.

On va chercher $\eta\in]0,1]$. Si $x\in]2-1,2+1[=]1,3[$ on a $|x^3-8|=|x-2|\times|x^2+2x+4|$ et donc, puisque $|x|<3$ et $|x^2|<9$, $|x^3-8|<|x-2|\times|9+2\times3+4|$, c'est à dire $|x^3-8|<19\times|x-2|$. Par conséquent si, pour tout $\varepsilon>0$, on pose $\eta=\min(\frac{1}{19}\varepsilon,1)$, alors tout $x\in\mathbf{R}_+$ tel $|x-2|<\eta$ vérifie $|x^3-8|<\varepsilon$.

Exercice 6.

[On s'intéresse à l'uniforme continuité : une fonction $f:D\to\mathbf{R}$ est dite uniformément continue si

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\eta>0\ \forall(x,y)\in D^2\ |x-y|<\eta\Longrightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

Il s'agira de vérifier qu'une fonction vérifie cette propriété et qu'une seconde fonction ne la vérifie pas.]

Montrer que f définie par $f(x)=\sin(x)$ si $x\in\mathbf{R}$ est uniformément continue.

Soient $x,y\in\mathbf{R}$. D'après le théorèmes des accroissements finis appliqué à la fonction sinus qui est dérivable sur $\mathbf{R}$ et de dérivée la fonction cosinus, il existe $z\in\mathbf{R}$ tel que $|\sin(x)-\sin(y)|=|\cos(z)|\times|x-y|$. Par conséquent, puisque $|\cos|\leq 1$, $|\sin(x)-\sin(y)|\leq\times|x-y|$.
Ainsi pour tout $\varepsilon>0$ si on pose $\eta=\varepsilon$ alors quels que soient $x,y\in\mathbf{R}$, $|\sin(x)-\sin(y)|<\varepsilon$ dès que $|x-y|<\eta$.
Ceci signifie que la fonction sinus est uniformément continue.

Montrer que f définie par $f(x)=\sin(x^2)$ si $x\in\mathbf{R}$ n'est pas uniformément continue.

Pour montrer que f n'est pas uniformément continue il suffit de montrer qu'il existe $\varepsilon>0$ tel que quel que soit $\eta>0$ il existe $x,y\in\mathbf{R}$ vérifiant $|x-y|<\eta$ et $|f(x)-f(y)|\geq\varepsilon$.
Si $n\in\mathbf{N}$ on pose $x_n=\sqrt{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ et $y_n=\sqrt{\frac{3\pi}{2}+2n\pi}$. Il vient $f(x_n)=1$ et $f(y_n)=-1$ et donc $|f(x_n)-f(y_n)|=2$. De plus

$$|x_n-y_n|=\frac{\pi}{\sqrt{\frac{\pi}{2}+2n\pi}+\sqrt{\frac{3\pi}{2}+2n\pi}}<\frac{\pi}{\sqrt{n}}.$$

Soit $\varepsilon=1$ et soit $\eta>0$. Choisissons $n\in\mathbf{N}$ strictement supérieur $\frac{\pi^2}{\eta^2}$. Alors, si on pose $x=x_n$ et $y=y_n$, il vient $|x-y|<\eta$ et $|f(x)-f(y)|=2\geq1=\varepsilon$.
Ainsi, si on fixe $\varepsilon=1$, on a bien pour tout $\eta>0$ l'existence de $x,y\in\mathbf{R}$ tels que $|x-y|<\eta$ et $|f(x)-f(y)|\geq\varepsilon$. Ceci prouve que f n'est pas uniformément continue.