Décembre 2019, Contrôle continu, Partie Analyse

Durée = 150 minutes. Les documents et la calculatrice ne sont pas autorisés

L'objet de ce problème est de prouver la transcendance de $e^d = \exp(d)$ lorsque $d \in \mathbf{N}^*$ en suivant la preuve donnée dans "Proofs from THE BOOK" et qui s'inspire d'idées de Hermite.

Chaque question vaut 2 points. La note maximale est obtenue en résolvant dix questions.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x^n(1-x)^n}{n!}$.

1) Montrer que f est un polynôme de degré $2n$ et qu'il existe des entiers $c_n, ..., c_{2n}$ tels que si $x \in \mathbf{R}$ alors $f(x) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{i=n}^{2n} c_i x^i$.

2) Montrer que si $0 < x < 1$ alors $0 < f(x) < \dfrac{1}{n!}$.

3) Montrer que les nombres dérivés $f^{(k)}(0)$ et $f^{(k)}(1)$ sont des entiers pour tout $k \in \mathbf{N}$.

Soit $m \in \mathbf{N}^*$. Supposons qu'il existe $a, b \in \mathbf{N}^*$ tels que $e^m = \frac{a}{b}$. Répondre aux questions suivantes montrera que cette hypothèse aboutit à une contradiction.

4) Montrer qu'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $n! > am^{2n+1}$.

On fixe un tel entier n et on note F la fonction définie par $F(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} m^{2n-k}(-1)^k f^{(k)}(x)$ si $x \in \mathbf{R}$.

5) Montrer que $F(0)$ et $F(1)$ sont des entiers.

6) Montrer que F est un polynôme de degré $2n$ et que si $x \in \mathbf{R}$ alors $F'(x) = -mF(x) + m^{2n+1}f(x)$.

On note G la fonction dérivable définie par $G(x) = \exp(mx)F(x)$ si $x \in \mathbf{R}$.

7) Montrer que $G'(x) = m^{2n+1}\exp(mx)f(x)$.

On pose $N = \displaystyle\int_0^1 m^{2n+1} b \exp(mx) f(x) dx$.

8) En utilisant l'égalité $e^m = \frac{a}{b}$, déduire du calcul de G' que

$$N = \int_0^1 bm^{2n+1}\exp(mx)f(x)dx = aF(1) - bF(0).$$

9) Montrer que N est un entier.

10) Vérifier que si $x \in]0,1[$ alors

$$0 < bm^{2n+1}\exp(mx)f(x) < bm^{2n+1}\exp(m)\frac{1}{n!} = \frac{am^{2n+1}}{n!}.$$

11) En déduire par intégration les inégalités

$$0 < N = \int_0^1 bm^{2n+1}\exp(mx)f(x)dx < \frac{am^{2n+1}}{n!}.$$

12) Montrer que N n'est pas entier.

13) Conclure que l'hypothèse selon laquelle il existe $a, b \in \mathbf{N}^*$ tels que $e^m = \frac{a}{b}$ est fausse.