Corrigé de la partie Analyse du CC2 Analyse-Proba

M1 MEEF PLC MATHS UR1

2019-2020

1) Soit $x \in \mathbb{R}$

On a $f(x) = \dfrac{x^n (1-x)^n}{n!} = \dfrac{x^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x^k$ (binôme de Newton)

$= \dfrac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x^{n+k}$. La fonction f est bien un polynôme de degré $2n$ au plus

Or si $k \in \{0, \dots, n\}$ $\binom{n}{k}$ est un entier, c'est le nombre de sous-ensembles à k éléments d'un ensemble à n éléments.

Donc $f(x) = \dfrac{1}{n!} \sum_{i=n}^{2n} c_i x^i$

avec si $i = n, \dots, 2n$ $c_i = (-1)^{i-n} \binom{n}{i-n} \in \mathbb{Z}$.

C'est un polynôme de degré $2n$ car $c_{2n} = (-1)^n \neq 0$.

2) Soit $x \in]0;1[$ alors on a aussi $(1-x) \in]0,1[$

Par conséquent $0 < x^n < 1$ et $0 < (1-x)^n < 1$ et

donc $0 < f(x) = \dfrac{1}{n!} x^n (1-x)^n < \dfrac{1}{n!}$

3) Si $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = \dfrac{1}{n!} \sum_{i=n}^{2n} (-1)^{i-n} \binom{n}{i-n} x^i$ d'après 1)

D'après la formule de Taylor Young on a

cas 0 Puisque f est un polynôme de degré $2n$, si $i \geq 2n+1$ $f^{(i)}(0) = 0$

cas 1 si $i = 0, \dots, n-1$ $f^{(i)}(0) = 0$ et si

cas 2 si $i = n, \dots, 2n$ $f^{(i)}(0) = \dfrac{i!}{n!} (-1)^{i-n} \binom{n}{i-n}$.

Or, puisque $2n \geq i \geq n$ $\dfrac{i!}{n!} \in \mathbb{N}$. Donc, puisque $\binom{n}{i-n} \in \mathbb{N}$

également lorsque $2n \geq i \geq n$, $f^{(i)}(0) \in \mathbb{Z}$.

Ainsi si $i \in \mathbb{Z}$ $f^{(i)}(0) \in \mathbb{Z}$

On a $f(x) = f(1-x)$ si $x \in \mathbb{R}$ par conséquent si $i \in \mathbb{N}$

$f^{(i)}(x) = (-1)^i f^{(i)}(1-x)$ ou $f^{(i)}(1-x) = (-1)^i f^{(i)}(x)$

Appliquée avec $x = 0$, cette égalité montre que si $i \in \mathbb{N}$

$f^{(i)}(1) = (-1)^i f^{(i)}(0) \in \mathbb{Z}$.

4/ On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\dfrac{n!}{a\, m^{2n+1}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$. C'est une suite de

rationnels strictement positifs et qui vérifie $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)}{m^2}$

Par conséquent si $k \in \mathbb{N}$ et $k \geq m^2$ alors $\dfrac{u_{k+1}}{u_k} \geq 2$. On peut

donc montrer par récurrence sur $k \geq m^2$ que

$$u_k \geq 2^k \left(\frac{u_m}{2^m}\right)$$

Puisque $\dfrac{u_m}{2^m} > 0$ et que $\lim_{l \to +\infty} 2^l = +\infty$ il existe un entier n

vérifiant $u_n \geq 2^n \left(\dfrac{u_m}{2^m}\right) > 1$ c'est à dire $n! > a\, m^{2n+1}$.

5/ On a montré en 3/ que les nombres $f^{(k)}(0)$ et $f^{(k)}(1)$ sont des entiers quel que soit $k \in \mathbb{N}$. 3/5

Puisque si $k \in \{0, \dots, 2n\}$ $(-1)^k m^{2n-k}$ est un entier il vient donc que $F(0) = \sum_{k=0}^{2n} m^{2n-k} (-1)^k f^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$ et

$F(1) = \sum_{k=0}^{2n} m^{2n-k} (-1)^k f^{(k)}(1) \in \mathbb{Z}$ également.

6/ On sait que f est un polynôme de degré $2n$. Par conséquent si $k \in \{0, \dots, 2n\}$ $f^{(k)}$ est un polynôme de degré $2n-k$. Ainsi $F(x) = \sum_{k=0}^{2n} m^{2n-k} (-1)^k f^{(k)}(x)$ est un polynôme de degré $2n$ car somme d'un polynôme de degré $2n$ et de $2n-1$ polynômes de degrés strictement moindres.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque $F(x) = \sum_{k=0}^{2n} m^{2n-k} (-1)^k f^{(k)}(x)$ on a

$$F'(x) = \sum_{k=0}^{2n} m^{2n-k} (-1)^k f^{(k+1)}(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{2n-1} m^{2n-k} (-1)^k f^{(k+1)}(x) \quad \text{car } f^{(2n+1)}(x) = 0$$

$$= -m \sum_{k'=1}^{2n} m^{2n-k'} (-1)^{k'} f^{(k')}(x) \quad \text{en posant } k' = k+1$$

$$= -m F(x) + m^{2n+1} f(x)$$

7/ Soit $x \in \mathbb{R}$. $G(x) = \exp(mx) F(x)$. Par conséquent

$G'(x) = m \exp(mx) F(x) + \exp(mx) F'(x)$

Or d'après 7/ $F'(x) = -m F(x) + m^{2n+1} f(x)$

Donc $G'(x) = m\exp(mx) F(x) + \exp(mx)\left(-m F(x) + m^{2n+1} f(x)\right)$

$= m^{2n+1} f(x) \exp(mx)$

8/ On a $N = \int_0^1 m^{2n+1} b \exp(mx) f(x)\, dx$

Or d'après 8 $G'(x) = m^{2n+1} \exp(mx) f(x)$

Donc $N = b \int_0^1 G'(x)\, dx = b\left[G(1) - G(0)\right]$

ainsi $N = b\left[\exp(m) F(1) - \exp(0) F(0)\right]$

Or $\exp(0) = 1$ et $\exp(m) = e^m = \frac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{N}^*$

Donc $N = b\left(\frac{a}{b} F(1) - F(0)\right)$

$= a F(1) - b F(0)$

9/ D'après 8/ $N = a F(1) - b F(0)$ or $a, b \in \mathbb{N}^*$ et $F(1), F(0) \in \mathbb{Z}$. Donc N est un entier relatif.

10/ Si $x \in]0, 1[$, d'après 2/ $0 < f(x) < \frac{1}{n!}$

et puisque exp est strictement croissante

$0 < \exp(mx) < \exp(m)$.

Par conséquent, puisque $b m^{2n+1} > 0$, il vient

$0 < b m^{2n+1} \exp(mx) f(x) < b m^{2n+1} \exp(m) \frac{1}{n!} = \frac{a m^{2n+1}}{n!}$

car $b\exp(m) = be^m = b\frac{a}{b} = a$.

5/5

11) D'après les inégalités strictes de 10/ pour $x \in]0,1[$, en intégrant puisque f est continue, il vient

$$0 < \int_0^1 b\, m^{2n+1} \exp(mx) f(x)\, dx < \int_0^1 \frac{a\, m^{2n+1}}{n!}\, dx = \frac{a m^{2n+1}}{n!}$$

et donc $0 < N = \int_0^1 b m^{2n+1} \exp(mx) f(x) dx < \frac{a\, m^{2n+1}}{n!}$

12/ Puisque n est choisi de telle sorte que $n! > a m^{2n+1} > 0$ (d'après la question 4), il vient que $0 < \frac{a\, m^{2n+1}}{n!} < 1$

et donc l'inégalité double de 11/ devient

$$0 < N < 1$$

Le nombre N est donc strictement compris entre 0 et 1. Ce n'est pas un entier.

13/ On a montré que s'il existe $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $e^m = \frac{a}{b}$ alors le nombre N est entier d'après la question 9/ et n'est pas un entier d'après la question 12/. C'est contradictoire. Donc si $m \in \mathbb{N}^*$ il n'existe pas $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $e^m = \frac{a}{b}$.