Les règles L'épreuve comporte deux parties d'importance égale, l'Analyse et les Probabilités. Les poids de ces parties sont égaux dans le calcul de la note finale. Pour chaque partie le barème qui peut être indiqué est relatif à la partie. **Il est demandé de rédiger sur des copies différentes les deux parties.** Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction.

Mardi 15 octobre 2019, Contrôle continu, Partie Analyse

Durée = 50 minutes. Les documents et la calculatrice ne sont pas autorisés

Exercice 1. (7 pts) Soit $D \subset \mathbf{R}$, $f : D \to \mathbf{R}$ et $a \in D$. On suppose que f n'est pas continue en a. En revenant à la définition de continuité en un point montrer qu'il existe un réel $\varepsilon_0 > 0$ et une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à valeurs dans D telle que si $n \in \mathbf{N}$ alors $|u_n - a| < \dfrac{1}{n+1}$ et $|f(u_n) - f(a)| \geq \varepsilon_0$.

Exercice 2. (6 pts) En revenant à la définition de fonction continue montrer que la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \dfrac{|x|}{1+|x|}$ est continue en tout $a \in \mathbf{R}$.

Exercice 3. (7 pts) Cet exercice reprend l'idée qui permet à Liouville de montrer dans un article paru en 1940 dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées* que e n'est pas le zéro d'un polynôme de degré 2 et à coefficients entiers.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par

$$u_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}.$$

1) Soit $m, k, n \in \mathbf{N}$. On suppose $1 < m < k \leq n$. Montrer que

$$0 < \frac{m!}{k!} \leq \frac{1}{(m+1)^{k-m}}$$

et en déduire que

$$0 < \sum_{k=m+1}^{n} \frac{m!}{k!} \leq \frac{\frac{1}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^{n-m+1}}}{1 - \frac{1}{m+1}} < \frac{1}{m}.$$

2) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement croissante et majorée par 3 et en déduire qu'elle est convergente. On note U sa limite.
3) Montrer que $(v_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement décroissante, que $(v_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement croissante et que $(v_{2n} - v_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0 puis en déduire que $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge. On note V sa limite.
Soit $A, B \in \mathbf{N}^*$. On considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $w_n = Au_n + Bv_n$ si $n \in \mathbf{N}$.
4) Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $AU + BV$.
5) Montrer que la suite $(w_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement croissante.
6) Soit $m \in \mathbf{N}$ fixé tel que $m > A + B$. Montrer que $(2m+1)!w_{2m+1} \in \mathbf{Z}$ et que si $n > m$ alors

$$(2m+1)!w_{2m+1} < (2m+1)!w_{2n+1} < (2m+1)!w_{2m+1} + \frac{A+B}{2m+1} < (2m+1)!w_{2m+1} + \frac{1}{2}.$$

7) En déduire que $AU + BV \notin \mathbf{N}$.