Corrigé* de la partie Analyse du CC1 Analyse-Proba

M1 MEEF PLC MATHS UR1

2019-2020

* Corrigé très détaillé

Exercice 1 Soit $D \subset \mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$. On suppose que f n'est pas continue en un point a donné de D. Ceci signifie que l'assertion

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall x \in D \quad |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

est fausse. Sa négation est donc vraie. Ceci signifie que l'assertion

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \ \forall \eta > 0 \ \exists x \in D \quad |x-a| < \eta \text{ et } |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon_0$$

est vraie. On note $(*)$ cette assertion.

Considérons maintenant un $n \in \mathbb{N}$ quelconque. En appliquant $(*)$ avec $\eta = \frac{1}{1+n}$ qui est strictement positif on obtient l'existence d'au moins un réel x tel que

$$|x-a| < \frac{1}{1+n} \text{ et } |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon_0.$$

On choisit un tel réel qu'on note u_n.

Puisque le choix de u_n est fait quel que soit $n \in \mathbb{N}$ on a construit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans D et qui est telle que si $n \in \mathbb{N}$ alors $|u_n - a| < \frac{1}{1+n}$ et $|f(u_n) - f(a)| \geq \varepsilon_0$

Exercice 2 Soit $a, x \in \mathbb{R}$. On a

$$|f(x) - f(a)| = \left| \frac{|x|}{1+|x|} - \frac{|a|}{1+|a|} \right| = \frac{1}{1+|x|} \frac{1}{1+|a|} \big| |a| - |x| \big|$$

Or $0 < \frac{1}{1+|x|} < 1$, $0 < \frac{1}{1+|a|} < 1$ et

d'après l'inégalité triangulaire $\big| |a| - |x| \big| \leq |x-a|$.

Par conséquent on a $|f(x) - f(a)| < |x-a|$

Ceci prouve que si $\varepsilon > 0$ alors si on pose $\eta = \varepsilon$ on a $\eta > 0$ et si $a \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$ vérifient $|x-a| < \eta$ ils vérifient $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Ainsi on a l'assertion

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall a \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathbb{R} \ |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Ceci prouve que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et donc continue.

Exercice 3 1/ Soit m, k, n des entiers tels que $1 < m < k \leq n$. Les nombres $m!$ et $k!$ sont strictement positifs donc leur quotient $\frac{m!}{k!}$ aussi et $0 < \frac{m!}{k!}$

De plus $\frac{m!}{k!} = \prod_{i=m+1}^{k} \frac{1}{i} \leq \prod_{i=m+1}^{k} \frac{1}{m+1} = \frac{1}{(m+1)^{k-m}}$

car si $i \in \{m+1, \ldots, k\}$ alors $0 < m+1 \leq i$ et donc $0 < \frac{1}{i} \leq \frac{1}{m+1}$.

On vient donc de prouver que $0 < \frac{m!}{k!} \leq \frac{1}{(m+1)^{k-m}}$

si $m, k, n \in \mathbb{N}$ et $1 < m < k \leq n$.

En sommant lorsque k varie entre $m+1$ et n on obtient

$$0 < \sum_{k=m+1}^{n} \frac{m!}{k!} \leq \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{(m+1)^{k-m}} = \sum_{j=1}^{n-m} \frac{1}{(m+1)^j} \quad (1)$$

Or $\sum_{j=1}^{n-m} \frac{1}{(m+1)^j} = \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^{n-m-1} \frac{1}{(m+1)^j} = \frac{1}{m+1} \frac{1 - \frac{1}{(m+1)^{n-m}}}{1 - \frac{1}{(m+1)}} = \frac{\frac{1}{(m+1)} - \frac{1}{(m+1)^{n-m+1}}}{1 - \frac{1}{(m+1)}}$

et donc $\sum_{j=1}^{n-m} \frac{1}{(m+1)^j} = \frac{\frac{1}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^{n-m+1}}}{1 - \frac{1}{m+1}} < \frac{1}{m} \quad (2)$

De (1) et (2) il vient

$$0 < \sum_{k=m+1}^{n} \frac{m!}{k!} \leq \frac{\frac{1}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^{n-m+1}}}{1 - \frac{1}{m+1}} < \frac{1}{m}$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc strictement croissante.

De plus, si $n \geq 3$ on a $u_n = \frac{5}{2} + \frac{1}{2!} \sum_{k=3}^{n} \frac{2!}{k!}$

Or, d'après 1), $\sum_{k=3}^{n} \frac{2!}{k!} < \frac{1}{2}$.

Donc $u_n \leq \frac{5}{2} + \frac{1}{2!} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2} + \frac{1}{4} = \frac{11}{4} < 3$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est croissante est donc majorée par 3 car elle l'est à partir du rang 3. Cette suite, puisqu'elle est croissante et majorée, est convergente vers une limite $U \in \mathbb{R}$

3/ Si $n \in \mathbb{N}$ alors $v_{2n+2} - v_{2n} = \frac{1}{(2n+2)!} - \frac{1}{(2n+1)!} < 0$ et

$v_{2n+3} - v_{2n+1} = \frac{1}{(2n+2)!} - \frac{1}{(2n+3)!} > 0$. Ceci prouve que $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante strictement et $(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante strictement

De plus si $n \in \mathbb{N}$ $0 < v_{2n} - v_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)!} < \frac{1}{1+n}$.

Or la suite $\left(\frac{1}{1+n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Donc la suite de terme général $v_{2n} - v_{2n+1}$ tend aussi vers 0. Par conséquent, puisque $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, ces deux suites sont adjacentes donc convergentes et ont même limite V. Puisque ce sont les suites extraites de rangs pairs et impairs de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ceci implique que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers cette limite $V \in \mathbb{R}$.

4/ Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers U et puisque $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers V la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est la combinaison linéaire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ affectée des coefficients A et B converge également et sa limite W vérifie $W = AU + BV$.

5/ Puisque $A, B \in \mathbb{N}^*$ ils sont strictement positifs. Aussi, puisque $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante car sous suite d'une suite qui l'est et que $(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi, la suite $(w_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie $(w_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} = A(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} + B(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi strictement croissante.

6/ Soit $m\in\mathbb{N}$ fixé. On a

$$(2m+1)!\, w_{2m+1} = (2m+1)!\left(A\sum_{i=0}^{2m+1}\frac{1}{i!} + B\sum_{j=0}^{2m+1}\frac{(-1)^j}{j!}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{2m+1}\left(A\frac{(2m+1)!}{k!} + B(-1)^k\frac{(2m+1)!}{k!}\right)$$

Or si $k\in\{0,\dots,2m+1\}$ $\frac{(2m+1)!}{k!}\in\mathbb{N}$ et donc, puisque A et B entiers $A\frac{(2m+1)!}{k!} + B(-1)^k\frac{(2m+1)!}{k!}\in\mathbb{Z}$

Par conséquent $(2m+1)!\,w_{2m+1}$ est une somme d'entiers relatifs et donc $(2m+1)!\,w_{2m+1}\in\mathbb{Z}$.

Soit $n\in\mathbb{N}$ avec $n>m$. Puisque $(w_{2d+1})_{d\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et que $0<(2m+1)!$

On a $(2m+1)!\,w_{2m+1} < (2m+1)!\,w_{2n+1}$ [i]

De plus $(2m+1)!\,(w_{2n+1}-w_{2m+1}) = A\sum_{k=2m+2}^{2n+1}\frac{(2m+1)!}{k!} + B\sum_{k=2m+2}^{2n+1}(-1)^k\frac{(2m+1)!}{k!}$

donc $(2m+1)!\,(w_{2n+1}-w_{2m+1}) < A\sum_{k=2m+2}^{2n+1}\frac{(2m+1)!}{k!} + B\sum_{k=2m+2}^{2n+1}\frac{(2m+1)!}{k!}$

Or d'après 7, $0<\sum_{k=2m+2}^{2n+1}\frac{(2m+1)!}{k!} < \frac{1}{2m+1}$. Par conséquent

$(2m+1)!\,(w_{2n+1}-w_{2m+1}) < \frac{A+B}{2m+1}$

Choisissons $m > A+B$. Alors $\frac{A+B}{2m+1} < \frac{1}{2}$ et donc

$$(2m+1)!\, w_{2m+1} < (2m+1)!\, w_{2m+1} + \frac{A+B}{2m+1} < (2m+1)!\, w_{2m+1} + \frac{1}{2} \quad [ii]$$

De [i] et [ii] on obtient que si $m \in \mathbb{N}$ vérifie $m > A+B$ alors

$$(2m+1)!\, w_{2m+1} < (2m+1)!\, w_{2n+1} < (2m+1)!\, w_{2m+1} + \frac{A+B}{2m+1} < (2m+1)!\, w_{2m+1} + \frac{1}{2} \text{ si } n > m.$$

7/ Comme dans 4. On pose $W = AU + BV$. On a $W = \lim_{n \to +\infty} w_{2n+1}$.

Fixons $m \in \mathbb{N}$ tel que $m > A+B$. Puisque $(w_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante, d'après l'inégalité $(2m+1)!\, w_{2m+1} < (2m+1)!\, w_{2n+1}$ si $n > m$ est conservée par passage à la limite : $(2m+1)!\, w_{2m+1} < (2m+1)!\, W$.

De plus, puisque $(2m+1)!\, w_{2n+1} < (2m+1)!\, w_{2m+1} + \frac{1}{2}$ si $n > m$, par passage à la limite $(2m+1)!\, W \leq (2m+1)!\, w_{2m+1} + \frac{1}{2}$

Finalement on a

$$(2m+1)!\, w_{2m+1} < (2m+1)!\, W \leq (2m+1)!\, w_{2m+1} + \frac{1}{2} < (2m+1)!\, w_{2m+1} + 1$$

Or $(2m+1)!\, w_{2m+1}$. Ainsi $(2m+1)!\, W$ qui est entre deux entiers successifs strictement, ne peut être entier