Seconde session. Partie Analyse

Durée = 150 minutes. Les documents et la calculatrice ne sont pas autorisés

Traiter au choix le sujet A ou le sujet B

SUJET A Rédiger un résumé d'au plus 6 pages des compléments d'analyse du premier semestre.

SUJET B Résoudre deux des trois exercices suivants.

Exercice 1. Soient a et b deux réels tels que $a < b$, $K > 0$ et $f]a, b[\to \mathbf{R}$ une application K-lipschitzienne : si $x, x' \in]a, b[$ alors $|f(x) - f(x')| \leq K|x - x'|$.
1) Montrer que f est continue.
2) Montrer qu'il existe une fonction continue $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ qui coïncide avec f sur $]a, b[$.

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = 1$ si $x \in [0, \frac{1}{2}]$ et par $f(x) = 2 - 2x$ si $\in]\frac{1}{2}, 1]$. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $u_0 \in [0, 1]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ si $n \in \mathbf{N}$.
1) Montrer que f est continue, décroissante et qu'il existe un seul $l \in [0, 1]$ qui est un point fixe de f.
2) Si la suite u converge qu'elle est sa limite ?
3) Soit $x \in [0, 1]$. Montrer que si $x \neq l$ alors $f(x) \neq l$.
4) On suppose que $u_0 \neq l$. Montrer que la suite u ne prend jamais la valeur l.
5) Soit $x \in [0, 1]$ tel que $|x - l| < \frac{1}{6}$. Montrer

$$2|x - l| \leq |f(x) - l|.$$

6) On suppose que u converge.
a) Montrer qu'il existe un rang N tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$ vérifiant $n \geq N$ on a $|u_n - l| < \frac{1}{6}$.
b) Montrer que la suite $|u_n - l|$ est croissante à partir du rang N.
c) Montrer que $u_0 = l$.

Exercice 3. Soit D l'ensemble des réels de la forme $\alpha = \frac{2p+1}{2^q}$ avec $(p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$.
1) Montrer que si $\alpha \in D$ il existe un et un seul couple $(p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$ tel que $\alpha = \frac{2p+1}{2^q}$
2) Montrer que si $q \in \mathbf{N}$ alors $q \leq 2^q$.
3) Soit $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$ et $x \in \mathbf{R}$.
a) Montrer que si $q \in \mathbf{N}$ l'ensemble $D(x, q)$ défini par

$$D(x, q) = \{\beta = |\frac{2p + 1}{2^q} - x|; p \in \mathbf{Z}, 0 < \beta \leq 1\}$$

est non vide et contient au plus 2^q éléments.
b) Montrer qu'il existe $N \in \mathbf{N}$ tel si $q \in \mathbf{N}$ vérifie $N \leq q$ alors $0 < \frac{1}{2^q} < \varepsilon$.
c) On pose $\eta = \inf \bigcup_{q=0}^{N-1} D(x, q)$. Montrer que $\eta > 0$.
d) Montrer que si $(p, q) \in \mathbf{Z}$ vérifie $0 < |\frac{2p+1}{2^q} - x| < \eta$ alors $N \leq q$ et $\frac{1}{2^q} < \varepsilon$.
4) On considère la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x \in \mathbf{R} \setminus D$ et $f(x) = \frac{1}{2^q}$ si $x \in D$ est égal à $\frac{2p+1}{2^q}$ avec $(p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$.
a) Montrer que si $x \in \mathbf{R} \setminus D$ alors f est continue en x.
b) Montrer que si $x \in D$ alors f n'est pas continue en x.