Jeudi 20 décembre 2018, Contrôle Continu, Partie Analyse

Durée = 150 minutes. Les documents et la calculatrice ne sont pas autorisés

Exercice 1. (9 pts) Énoncer et prouver la formule de Taylor-Lagrange.

Exercice 2. (11 pts)
Partie I (4 points) Soit $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de classe C^∞.
1) Soit $K > 0$ et $\mu > 0$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que si $u, v \in [-K, K]$ vérifient $|v - u| \leq \eta$ alors

$$|\alpha'(v) - \alpha'(u)| \leq \mu.$$

2) Soit $K > 0$ et $\mu > 0$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que si $u, v \in [-K, K]$ vérifient $|v - u| \leq \eta$ et $u \neq v$ alors

$$\left| \frac{\alpha(v) - \alpha(u)}{v - u} - \alpha'(u) \right| \leq \mu.$$

3) Soit x, $\mu > 0$ et $n \in \mathbf{N}$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que si $\delta \in \mathbf{R}$ vérifie $|\delta| \leq \eta$ alors

$$\left| \int_0^1 \theta^n \left(\frac{\alpha(\theta(x + \delta)) - \alpha(\theta x)}{\delta} - \theta\alpha'(\theta x) \right) d\theta \right| \leq \int_0^1 \mu\theta^{n+1} d\theta = \frac{\mu}{n + 2}.$$

4) Si $n \in \mathbf{N}$ on note β_n la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie pour tout $x \in \mathbf{R}$ par

$$\beta_n(x) = \int_0^1 \theta^n \alpha(\theta x) d\theta.$$

Montrer que β_n est de classe C^∞ et que si $k \in \mathbf{N}$ alors pour tout $x \in \mathbf{R}$

$$\beta_n^{(k)}(x) = \int_0^1 \theta^{n+k} \alpha^{(k)}(\theta x) d\theta.$$

Partie II (7 points) Soit $f : \mathbf{R} \to [0, +\infty)$ de classe C^∞, qui ne s'annule qu'en 0 et telle que $f''(0) > 0$.
1) Montrer que $f'(0) = 0$.
2) Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que si $x \in \mathbf{R}$ vérifie $0 < |x| < A$ alors $xf'(x) > 0$.
3) Calculer $\displaystyle\lim_{x \to 0,\ x \neq 0} \frac{f(x)}{x^2}$.
4) Montrer que si $x \in \mathbf{R}$ alors

$$f(x) = x^2 \int_0^1 (1 - \theta) f''(\theta x) d\theta.$$

5) Montrer que la fonction $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie pour tout $x \in \mathbf{R}$ par

$$g(x) = \int_0^1 (1 - \theta) f''(\theta x) d\theta$$

est de classe C^∞, strictement positive et vérifie $g(0) = \dfrac{f''(0)}{2}$.
6) Montrer que $\sqrt{g}$ est une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de classe C^∞.
7) Montrer qu'il existe $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de classe C^∞ et telle que $h^2 = f$.