M1 MEEF PLC MATHS – Analyse Probabilités 1
Contrôle continu du 20 décembre 2018
Corrigé de l'exercice 2

Partie I

1) La fonction α est C^∞. Sa dérivée α' existe donc et elle est aussi C^∞. La fonction α' est donc continue et d'après le théorème de Heine elle est uniformément continue sur tout segment $[-K, K]$ si $K > 0$.
C'est pourquoi si $K > 0$ et si $\mu > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que si $u, v \in [-K, K]$ et $|v-u| \leq \eta$ alors $|\alpha'(v) - \alpha'(u)| \leq \mu$.

2) Soit $K > 0$ et $\mu > 0$. On considère le réel $\eta > 0$ donné dans 1).
Soit $u, v \in [-K, K]$ tels que $|u-v| \leq \eta$ et $u \neq v$.
D'après le théorème des accroissements finis appliqué à α sur le segment $[u, v]$ ou le segment $[v, u]$ suivant que $u < v$ ou que $v < u$ il existe c entre u et v tel que $\alpha'(c) = \dfrac{\alpha(v) - \alpha(u)}{v-u}$
Puisque c est entre u et v on a $|c-u| < |v-u| \leq \eta$. Par conséquent $\left|\dfrac{\alpha(v) - \alpha(u)}{v-u} - \alpha'(u)\right| = |\alpha'(c) - \alpha'(u)| \leq \mu$ d'après 1).

3/ Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\mu > 0$. On pose $K = |x| + 1$. On considère le réel $\eta > 0$ donné ds 2) et on le choisit inférieur à 1 (c'est possible).
Considérons $\theta \in [0, 1]$ et $\delta \in [-\eta, \eta]$.
On pose $u = \theta x$ et $v = \theta(x+\delta)$
Alors $|v-u| = |\theta\delta| \leq |\delta| \leq \eta$ et $u, v \in [-K, K]$
Par conséquent
$$\left|\frac{\alpha(\theta(x+\delta)) - \alpha(\theta x)}{\theta\delta} - \alpha'(\theta x)\right| \leq \mu \quad (*)$$

A x fixé et à δ fixé en valeur absolue inférieure ou égale à η l'inégalité $(*)$ vaut pour tout $\theta\in[0,1]$. Il vient donc, en multipliant par θ^{n+1} et en intégrant sur $[0,1]$

$$\left|\int_0^1 \theta^n\left(\frac{\alpha(\theta(x+\delta))-\alpha(\theta x)}{\delta}-\theta\alpha'(\theta x)\right)d\theta\right| \leqslant \int_0^1 \nu\theta^{n+1}\,d\theta = \left[\frac{\nu\theta^{n+2}}{n+2}\right]_0^1$$

et donc $\forall \nu>0\ \exists\eta>0\ \forall\delta\in[-\eta,\eta]$,

$$\left|\int_0^1 \theta^n\left(\frac{\alpha(\theta(x+\delta))-\alpha(\theta x)}{\delta}-\theta\alpha'(\theta x)\right)d\theta\right| \leqslant \int_0^1 \nu\theta^{n+1}\,d\theta = \frac{\nu}{n+2}$$

4) Soit $n\in\mathbb{N}$. Soit $x\in\mathbb{R}$ et $\nu>0$. D'après la question 3) il existe $\eta>0$ tel que si $\delta\in[-\eta,\eta]$ alors

$$\left|\frac{\beta_n(x+\delta)-\beta_n(x)}{\delta}-\int_0^1\theta^{n+1}\alpha'(\theta x)\,d\theta\right|\leqslant\frac{\nu}{n+2}$$

Par passage à la limite quand δ tend vers 0 on obtient que la fonction β_n est dérivable et que $\beta_n^{(1)}(x)=\int_0^1\theta^{n+1}\alpha^{(1)}(\theta x)\,d\theta$

Ceci montre que la propriété "β_n est k fois dérivable et $\beta_n^{(k)}=\int_0^1\theta^{n+k}\alpha^{(k)}(\theta x)\,d\theta$" est vraie pour $k=1$. Elle est aussi évidemment vraie pour $k=0$.

Pour montrer qu'elle est vraie pour tout $k\in\mathbb{N}$, il suffit, en vertu du principe de récurrence, de supposer qu'elle est vraie pour un certain entier $k\geq 0$ alors elle est vraie pour $k+1$.

Soit donc $k\in\mathbb{N}^*$ tel que $\beta_n^{(k)}$ existe et vérifie $\beta_n^{(k)}(x)=\int_0^1\theta^{n+k}\alpha^{(k)}(\theta x)\,d\theta$.

En appliquant le résultat établi pour $k=1$, non plus à la fonction β_n associée à α mais à la fonction $\beta_n^{(k)}$ qui est la fonction

β_{n+k} associée à $\alpha^{(k)}$ on obtient que $\beta_n^{(k)}$ est dérivable et

$$\beta_n^{(k+1)}(x) = \left(\beta_n^{(k)}\right)'(x) = \int_0^1 \theta^{n+k+1} \alpha^{(k+1)}(\theta x)\, d\theta.$$

On vient de prouver par récurrence sur k que si $k \in \mathbb{N}$, β_n est au moins k fois dérivable et si $x \in \mathbb{R}$

$$\beta_n^{(k)}(x) = \int_0^1 \theta^{n+k} \alpha^{k}(\theta x)\, d\theta$$

Partie II

1) Pour prouver que $f'(0) = 0$ on va raisonner par l'absurde et supposer que $f'(0) \neq 0$.

Si $f'(0) \neq 0$, puisque $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(x)$

il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]-\eta, \eta[$ différent de 0 $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x}$ est du signe de $f'(0)$

C'est vrai pour $x = \frac{\eta}{2}$ et $x = \frac{-\eta}{2}$. On obtient donc que $\frac{f(\frac{\eta}{2})}{\frac{\eta}{2}}$ et $\frac{f(\frac{-\eta}{2})}{-\frac{\eta}{2}}$ sont de même signe

et donc que $\frac{f(\frac{\eta}{2})\, f(\frac{-\eta}{2})}{-\frac{\eta^2}{4}}$ est strictement positif. Ceci signifie que $f(\frac{\eta}{2})$ et $f(\frac{-\eta}{2})$ sont de signes différents. La fonction f doit donc changer de signe si $f'(0) \neq 0$. C'est contraire à l'hypothèse selon laquelle f est à valeurs dans $[0, +\infty)$.

Ceci prouve que $f'(0) = 0$.

2) On sait que f est C^∞. Par conséquent f'' est continue.

Or $f''(0)>0$. Il existe donc $A>0$ tel que sur $[-A,A]$ f'' est strictement positive. Sur cet intervalle la dérivée f' est strictement croissante. Puisque $f'(0)=0$ il vient que si $x\in[-A,0[$ $f'(x)<0$ et donc $xf'(x)>0$ et si $x\in]0,A]$ $f'(x)>0$ et donc $xf'(x)>0$.

On a prouvé l'existence de $A>0$ tel que si $x\in\mathbb{R}$ vérifie $0<|x|<A$ alors $xf'(x)>0$.

3) Puisque $f(0)=f'(0)=0$, d'après la formule de Taylor Young il existe $\varepsilon:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to0}\varepsilon(x)=0$

et
$$f(x)=\frac{f''(0)}{2}x^2+x^2\varepsilon(x)\quad \text{si } x\in\mathbb{R}$$

Par conséquent si $x\in\mathbb{R}$ et $x\neq0$ $\quad \dfrac{f(x)}{x^2}=\dfrac{f''(0)}{2}+\varepsilon(x)$

Par passage à la limite il vient
$$\lim_{\substack{x\to0\\x\neq0}}\frac{f(x)}{x^2}=\frac{f''(0)}{2}$$

4) On obtient par le théorème fondamental de l'analyse et par intégration par partie
$$f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)\,dt=\Big[-(x-t)f'(t)\Big]_0^x+\int_0^x(x-t)f''(t)\,dt$$

Or $f(0)=f'(0)=0$

Donc $f(x)=\displaystyle\int_0^x(x-t)f''(t)\,dt$ qui devient en posant $t=\theta x$
$$f(x)=x^2\int_0^1(1-\theta)f''(\theta x)\,d\theta$$

5) D'après la question 4) de la partie I appliquée avec $\alpha = f''$, les fonctions $x \longmapsto \int_0^1 f''(\theta x)\,d\theta$ et $x \longmapsto \int_0^1 \theta f''(\theta x)\,d\theta$ sont de classe C^∞. C'est donc aussi le cas de g qui est la différence de ces deux fonctions.

On a $g(0) = \int_0^1 (1-\theta) f''(0)\,d\theta = f''(0)\left[\theta - \frac{\theta^2}{2}\right]_0^1 = \frac{f''(0)}{2}$

Puisque $f''(0) > 0$ on a $g(0) > 0$.

Si $x \neq 0$ $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$. Or f ne s'annule qu'en 0.

Donc $f(x) > 0$ si $x \neq 0$ et $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ aussi.

Finalement g est bien strictement positive.

6) On sait que g est C^∞ et strictement positive d'après 5). Or la fonction $\sqrt{\ }$ restreinte à $]0,+\infty[$ est C^∞. Par composition il vient que $\sqrt{g}$ est bien une fonction C^∞.

7) Notons h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x\sqrt{g(x)}$.

D'après la question 4) $h^2 = f$. Puisque h est le produit de deux fonctions C^∞, c'est aussi une fonction C^∞.

On a bien prouvé l'existence de $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ C^∞ telle que $h^2 = f$.