Jeudi 18 octobre 2018, Contrôle continu, Partie Analyse

Durée = 50 minutes. Les documents et la calculatrice ne sont pas autorisés

Exercice 1. (5 pts) Énoncer et prouver le théorème de Bolzano-Weirstrass.

Exercice 2. (5 pts) Montrer, en revenant à la définition de fonction continue, que la fonction f définie sur $\mathbf{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ est continue en tout $a \in \mathbf{R}^*$.

Exercice 3. (5 pts) Soit $K > 0$. Une fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est dite K-lipschitzienne si

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 \ |f(x) - f(y)| \leq K|x-y|.$$

1) Montrer, en revenant à la définition de fonction uniformément continue, que si f est K-lipschitzienne alors elle est uniformément continue sur $\mathbf{R}$.
2) Montrer, en revenant à la définition de fonction K-lipschitzienne, qu'il existe $K > 0$ tel que la fonction qui a $x \in \mathbf{R}$ associe $\frac{1}{1+|x|}$ est K-lipschitzienne.

Exercice 4. (5 pts) On considère les suites $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par récurrence de la façon suivante. On pose $u_0 = 1$, $v_0 = 1$ et si $n \in \mathbf{N}$ on pose $u_{n+1} = 2^{-(n+1)}u_n$ et $v_{n+1} = v_n + u_{n+1}$. On rappelle que si $n \in \mathbf{N}$ alors $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. On rappelle aussi qu'un nombre réel est rationnel si et seulement si son écriture en base 2 est périodique.
1) Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que $u_n = 2^{\frac{-n(n+1)}{2}}$.
2) Montrer que v est une suite positive, croissante convergente et de limite l majorée par 2.
3) Donner les écritures de v_0, v_1, v_2 et v_3 en base 2.
4) Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Soit a_k le k^{e} chiffre après la virgule de l'écriture en base 2 de la limite l de v.
a) Montrer que s'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $k = \frac{n(n+1)}{2}$ alors $a_k = 1$.
b) Montrer que s'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $\frac{n(n+1)}{2} < k < \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ alors $a_k = 0$.
5) Montrer que la limite l de v est un nombre irrationnel.