Université de Rennes 1
M1 MEFF Maths (2018-2019)
Analyse-Probabilités 1 / Partie Analyse
Inégalité isopérimétrique

(d'après M.P. Do Carmo, Differential geometry of curves and surfaces, 1976)

Parmi toutes les courbes simples fermées d'une longueur donnée celle qui délimite l'aire la plus grande est le cercle. L'objet de ce problème est de faire une preuve voisine de celle que donne E. Schmidt (1939) de ce résultat.

Soit $l > 0$. Soient X et Y deux fonctions C^∞ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et l-périodiques.

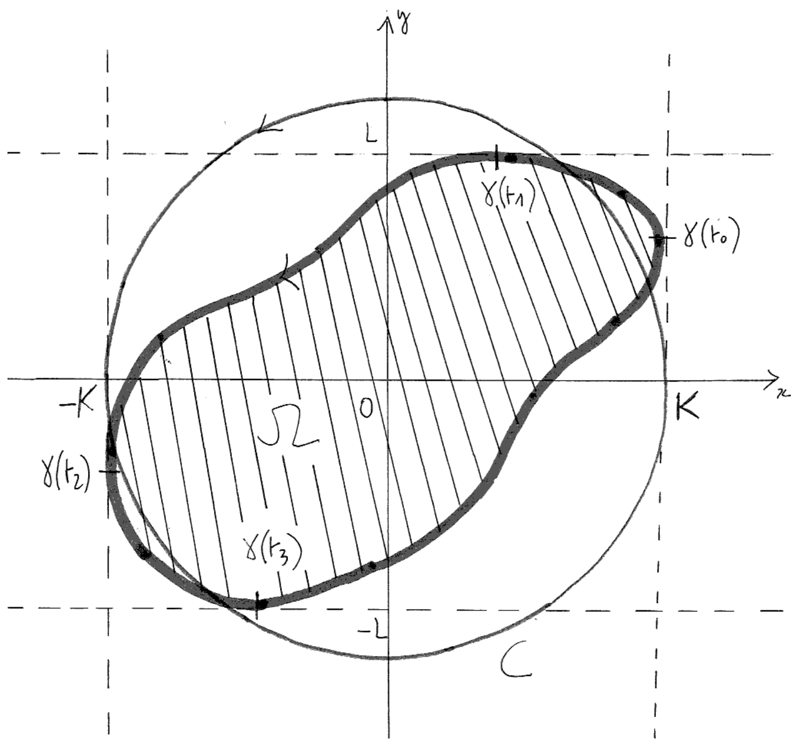
On suppose que γ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (X(t), Y(t))$ est une courbe paramétrée par son abscisse curviligne : si $t \in \mathbf{R}$ alors $X'(t)^2 + Y'(t)^2 = 1$ et si $\tau_1, \tau_2 \in \mathbf{R}$ sont tels que $\tau_1 < \tau_2$ alors la longeur du morceau d'arc $\{\gamma(t); t \in [\tau_1, \tau_2]\}$ est $\tau_2 - \tau_1$.

On suppose que pour tous les $r, s \in \mathbf{R}$ tels que $X(r) = X(s)$ et $Y(r) = Y(s)$ la différence $r - s$ est un multiple de l. En particulier $\gamma([a, a + l[)$ est une courbe fermée simple de longueur l.

On suppose qu'il existe $t_0, t_1, t_2, t_3 \in \mathbf{R}$ et $K, L > 0$ tels que
- $t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_0 + l$,
- t_0 et t_2 sont les les zéros de X' sur $[t_0, t_0 + l[$,
- t_1 et t_3 sont les zéros de Y' sur $[t_0, t_0 + l[$,
- $X(t_0) = K$, $X(t_2) = -K$, $Y(t_1) = L$ et $Y(t_3) = -L$,
- les dérivées secondes $X''(t_0)$, $X''(t_2)$, $Y''(t_1)$ et $Y''(t_3)$ sont non nulles.

On note Ω l'ensemble des points (x, y) de $\mathbf{R}^2$ tels que $-K < x < K$ et il existe $t_0 < r < t_2 < s < t_0 + l$ vérifiant $X(r) = X(s)$ et $Y(r) > y > Y(s)$.

On note C le cercle centré en l'origine et de rayon K.



1) Montrer que les restrictions de X à $]t_0, t_2[$ et $]t_2, t_0+l[$ sont des injections, respectivement décroissante et croissante, et que $X(]t_0, t_2[) = X(]t_2, t_0+l[) =]X(t_2), X(t_0)[$.

2) Montrer qu'il existe deux fonctions ϕ_0 et ϕ_1 définies sur $=]X(t_2), X(t_0)[$, à valeurs respectivement dans $]t_0, t_2[$ et $]t_2, t_0+l[$, de classe C^∞, injectives et telles pour tout $x \in]X(t_2), X(t_0)[$

$$X(\phi_0(x)) = X(\phi_1(x)) = x.$$

3) Montrer que pour tout $x \in]X(t_2), X(t_0)[$ on a $Y(\phi_0(x)) > Y(\phi_1(x))$.

4) Montrer

$$-\int_{t_0}^{t_2} Y(t)X'(t)dt = \int_{X(t_2)}^{X(t_0)} Y(\phi_0(x))dx$$

et

$$\int_{t_2}^{t_0+l} Y(t)X'(t)dt = \int_{X(t_2)}^{X(t_0)} Y(\phi_1(x))dx.$$

5) En déduire que l'aire A du domaine Ω est

$$A = -\int_T^{T+l} Y(t)X'(t)dt = \int_T^{T+l} X(t)Y'(t)dt = \frac{1}{2}\int_T^{T+l} (X(t)Y'(t) - Y(t)X'(t))dt$$

où T est un réel quelconque.

6) On considère la fonction Z l-périodique de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie de la façon suivante :
- si $t \in [t_0, t_2]$ alors $Z(t) = \sqrt{K^2 - X(t)^2}$;
- si $t \in [t_2, t_0+l[$ alors $Z(t) = -\sqrt{K^2 - X(t)^2}$.
En admet que pour tout $\Theta :]-\eta, \eta[\to [0, +\infty)$ de classe C^∞, qui ne s'annule qu'en 0 et telle que $\Theta''(0) > 0$ il existe une fonction $\theta :]-\eta, \eta[\to \mathbf{R}$ de classe C^∞ et telle que $\theta^2 = \Theta$.
Montrer que Z est une fonction de classe C^∞ et que l'application qui à $t \in [t_0, t_0+l[$ associe $(X(t), Z(t))$ est une paramétrisation injective du cercle C orienté dans le sens trigonométrique.

7) Montrer

$$\pi K^2 = -\int_0^l Z(t)X'(t)dt = \int_0^l X(t)Z'(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^l (X(t)Z'(t) - Z(t)X'(t))dt.$$

8) Montrer

$$\sqrt{A}\sqrt{\pi K^2} \leq \frac{1}{2}(A + \pi K^2)$$

et qu'il n'y a égalité que si $A = \pi K^2$.

9) Montrer

$$\begin{aligned} A + \pi K^2 &= \int_0^l (X(t)Y'(t) - Z(t)X'(t))dt \\ &\leq \int_0^l \sqrt{(X(t)Y'(t) - Z(t)X'(t))^2} dt \\ &\leq \int_0^l \sqrt{(X(t)^2 + Z(t)^2)}\sqrt{(X'(t)^2 + Y'(t)^2)} dt = lK \end{aligned}$$

et qu'il n'y a l'égalité

$$A + \pi K^2 = lK$$

que si pour tout $t \in [0, l[$ les vecteurs $(X(t), Z(t))$ et $(Y'(t), -X'(t))$ sont liés.

10) En utilisant de plus le fait que pour tout $t \in \mathbf{R}$ on a $X'(t)^2 + Y'(t)^2 = 1$ et $X(t)^2 + Z(t)^2 = K^2$ montrer alors qu'il n'y a l'égalité

$$A + \pi K^2 = lK$$

que si pour tout $t \in [0, l[$ $X(t) = \pm KY'(t)$.

11) Déduire de 8) et de l'inégalité $A + \pi K^2 \leq lK$ de 9) que $4\pi A \leq l^2$ et que si $4\pi A = l^2$ alors $A + \pi K^2 = lK$, $A = \pi K^2$ et donc $K = \dfrac{l}{2\pi}$

12) Déduire de 10) et 11) que si $4\pi A = l^2$ alors $L = K$ et pour tout $t \in [0, l[$ on a les égalités

$$X(t) = \pm KY'(t) \text{ et } Y(t) = \pm KX'(t).$$

13) En déduire que si $4\pi A = l^2$ alors pour tout $t \in [0, l[$

$$X(t)^2 + Y(t)^2 = K^2.$$

14) Conclure que si $\gamma([0, l[)$ n'est pas un cercle de périmètre l alors l'aire de Ω est strictement inférieure à l'aire du disque bordé par un cercle de périmètre l.