(d'après M.P. Do Carmo, Differential geometry of curves and surfaces, 1976)

Parmi toutes les courbes simples fermées d'une longueur donnée celle qui délimite l'aire la plus grande est le cercle. L'objet de ce problème est de faire une preuve voisine de celle que donne E. Schmidt (1939) de ce résultat.

Soit $l > 0$. Soient X et Y deux fonctions C^∞ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et l-périodiques.

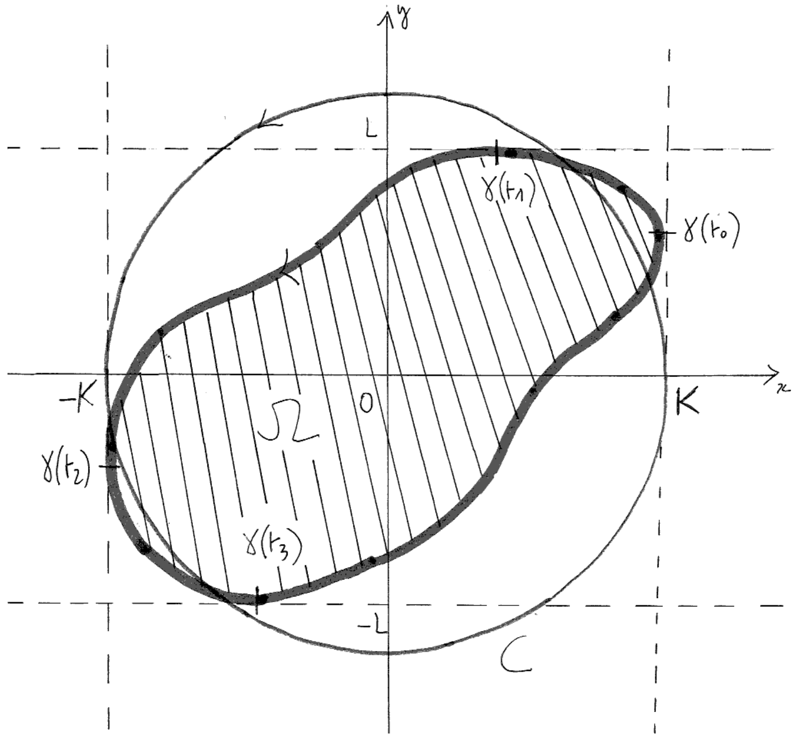
On suppose que γ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (X(t), Y(t))$ est une courbe paramétrée par son abscisse curviligne : si $t \in \mathbf{R}$ alors $X'(t)^2 + Y'(t)^2 = 1$ et si $\tau_1, \tau_2 \in \mathbf{R}$ sont tels que $\tau_1 < \tau_2$ alors la longeur du morceau d'arc $\{\gamma(t); t \in [\tau_1, \tau_2]\}$ est $\tau_2 - \tau_1$.

On suppose que pour tous les $r, s \in \mathbf{R}$ tels que $X(r) = X(s)$ et $Y(r) = Y(s)$ la différence $r - s$ est un multiple de l. En particulier $\gamma([a, a+l[)$ est une courbe fermée simple de longueur l.

On suppose qu'il existe $t_0, t_1, t_2, t_3 \in \mathbf{R}$ et $K, L > 0$ tels que
- $t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_0 + l$,
- t_0 et t_2 sont les les zéros de X' sur $[t_0, t_0 + l[$,
- t_1 et t_3 sont les zéros de Y' sur $[t_0, t_0 + l[$,
- $X(t_0) = K$, $X(t_2) = -K$, $Y(t_1) = L$ et $Y(t_3) = -L$,
- les dérivées secondes $X''(t_0)$, $X''(t_2)$, $Y''(t_1)$ et $Y''(t_3)$ sont non nulles.

On note Ω l'ensemble des points (x, y) de $\mathbf{R}^2$ tels que $-K < x < K$ et il existe $t_0 < r < t_2 < s < t_0 + l$ vérifiant $X(r) = X(s)$ et $Y(r) > y > Y(s)$.

On note C le cercle centré en l'origine et de rayon K.



1) Montrer que les restrictions de X à $]t_0, t_2[$ et $]t_2, t_0+l[$ sont des injections, respectivement décroissante et croissante, et que $X(]t_0, t_2[) = X(]t_2, t_0+l[) =]X(t_2), X(t_0)[$.

Puisque $t_0 < t_2$ et $X(t_0) > X(t_2)$, le taux de variation de X entre t_0 et t_2 est strictement négatif. Or, puisque X est C^∞ donc dérivable, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]t_0, t_2[$ tel que $X'(c)$ est égal à ce taux de variation. Il vient que $X'(c) < 0$. Or X' est continue et par hypothèse ne s'annule pas sur $]t_0, t_2[$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à X' cette fonction dérivée est donc de signe constant sur $]t_0, t_2[$ et puisque $X'(c) < 0$, X' est strictement négative sur $]t_0, t_2.[$
Ceci implique que X qui est continue sur $[t_0, t_2]$ et dérivable sur $]t_0, t_2[$ est strictement décroissante sur $[t_0, t_2]$. Ainsi la restriction de X à $[t_0, t_2]$ et donc aussi à $]t_0, t_2[$ est une injection strictement décroissante. En particulier $X([t_0, t_2]) \subset [X(t_2), X(t_0)]$.
De plus, puisque X est C^∞ donc continue l'image de $[X(t_2), X(t_0)]$ par X est un segment et donc $X([t_0, t_2]) = [X(t_2), X(t_0)]$. Finalement, puisque la restriction de X à $[t_0, t_2]$ est injective il vient

$$X(]t_0, t_2[) = [X(t_2), X(t_0)] \setminus \{W(t_0), W(t_2)\} =]X(t_2), X(t_0)[.$$

Les mêmes arguments appliqués à la restriction de X à $]t_2, t_0+l[$ permettent d'affirmer que cette restriction est une injection strictement croissante, et que $X(]t_2, t_0+l[) =]X(t_2), X(t_0)[$.

2) Montrer qu'il existe deux fonctions ϕ_0 et ϕ_1 définies sur $=]X(t_2), X(t_0)[$, à valeurs respectivement dans $]t_0, t_2[$ et $]t_2, t_0+l[$, de classe C^∞, injectives et telles pour tout $x \in]X(t_2), X(t_0)[$

$$X(\phi_0(x)) = X(\phi_1(x)) = x.$$

On vient de montrer que la restriction de X à $]t_0, t_2[$ est continue, injective et strictement croissante et que l'image par X de $]t_0, t_2[$ est $]X(t_2), X(t_0)[$. C'est donc une bijection continue et strictement décroissante de $]t_0, t_2[$ sur $]X(t_2), X(t_0)[$. Elle admet une réciproque ϕ_0 continue, injective, strictement décroissante et qui vérifie pour tout $x \in]X(t_2), X(t_0)[$, $X(\phi_0(x)) = x$. De plus, puisque X est C^∞ et que sa dérivée ne s'annule pas sur $]t_0, t_2[$, la fonction ϕ_0 est aussi C^∞.
Les mêmes arguments appliqués à la restriction de X à $]t_2, t_0+l[$ permettent d'établir l'existence de ϕ_1 de $]X(t_2), X(t_0)[$ dans $]t_2, t_0+l[$ C^∞, injective, strictement croissante et qui vérifie pour tout $x \in]X(t_2), X(t_0)[$, $X(\phi_1(x)) = x$.

3) Montrer que pour tout $x \in]X(t_2), X(t_0)[$ on a $Y(\phi_0(x)) > Y(\phi_1(x))$.

Soit δ la fonction qui à $x \in]X(t_2), X(t_0)[$ associe $Y(\phi_0(x)) - Y(\phi_1(x))$. Elle est strictement positive en t_1. Puisqu'elle est continue, si elle est négative ou nulle en un $c \in]X(t_2), X(t_0)[$ alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à δ sur le segment d'extrémités $X(t_1)$ et c il existe d appartenant à ce segment tel que $\delta(d) = 0$. On a alors pour $r = \phi_0(d)$, $s = \phi_1(d)$ les égalités suivantes $X(r) = X(s)$ et $Y(r) = Y(s)$ et $t_0 < r < t_2 < s < t_0 + l$. Ça contredit les hypothèses de l'énoncé sur X et Y puisqu'alors $0 < s - r < l$ et donc $r - s$ n'est pas un multiple de l.

4) Montrer

$$-\int_{t_0}^{t_2} Y(t)X'(t)dt = \int_{X(t_2)}^{X(t_0)} Y(\phi_0(x))dx$$

et

$$\int_{t_2}^{t_0+l} Y(t)X'(t)dt = \int_{X(t_2)}^{X(t_0)} Y(\phi_1(x))dx.$$

Ces deux égalités résultent chacune d'un changement de variable, la première fois en posant $t = \phi_0(x)$ et la seconde fois en posant $t = \phi_1(x)$. On détaille la preuve de la première. Celle de la seconde est similaire.

Dans la suite on prolonge la fonction ϕ_0 définie sur $]X(t_2), X(t_0)[$ en $X(t_2)$ et $X(t_0)$ en posant $\phi_0(X(t_0)) = t_0$ et $\phi_0(X(t_2)) = t_2$. Ces prolongements sont continus car comme ϕ_0 est une bijection continue et décroissante de $]X(t_2), X(t_0)[$ sur $]t_0, t_2[$ il vient $t_0 = \lim_{X(t_0)} \phi_0 \circ X$ et $t_2 = \lim_{X(t_2)} \phi_0 \circ X$. Une fois ϕ_0 ainsi prolongée il vient $X \circ \phi_0(x) = x$ sur $[t_0, t_2]$.
On considère la fonction λ qui à $t \in [t_0, t_2]$ associe $\lambda(t) = Y(t)X'(t)$. Puisqu'elle est C^∞ elle admet une primitive C^∞, Λ, qui s'annule en t_0. On a $\Lambda' = \lambda = YX'$ et

$$\int_{t_0}^{t_2} Y(t)X'(t)dt = \int_{t_0}^{t_2} \lambda(t)dt = [\Lambda(t)]_{t_0}^{t_2}.$$

Puisque $X \circ \phi_0(x) = x$ sur $[t_0, t_2]$ il vient (sur $]t_0, t_2[$) $(X' \circ \phi_0)\phi_0' = 1$ et donc on a

$$(\Lambda \circ \phi_0)' = (\lambda \circ \phi_0)\phi_0' = (Y \circ \phi_0)(X' \circ \phi_0)\phi_0' = Y \circ \phi_0.$$

Il vient

$$\int_{X(t_2)}^{X(t_0)} Y(\phi_0(x))dx = [\Lambda(\phi_0(x))]_{X(t_2)}^{X(t_0)} = [\Lambda(t)]_{t_2}^{t_0} = -[\Lambda(t)]_{t_0}^{t_2} = -\int_{t_0}^{t_2} Y(t)X'(t)dt.$$

5) En déduire que l'aire A du domaine Ω est

$$A = -\int_T^{T+l} Y(t)X'(t)dt = \int_T^{T+l} X(t)Y'(t)dt = \frac{1}{2}\int_T^{T+l} (X(t)Y'(t) - Y(t)X'(t))dt$$

où T est un réel quelconque.

Le domaine Ω est le domaine inclus dans la bande $\{X(t_2) < x < X(t_0)\}$, sous le graphe de $X \circ \phi_0$ et au dessus du graphe de $X \circ \phi_1$. Or $\int_{X(t_2)}^{X(t_0)} Y(\phi_0(x))dx$ est l'aire comprise entre l'axe des x et le graphe de ϕ_0 lorsque $x \in]X(t_2), X(t_0)[$ et $\int_{X(t_2)}^{X(t_0)} Y(\phi_1(x))dx$ est l'aire comprise entre l'axe des x et le graphe de ϕ_1 lorsque $x \in]X(t_2), X(t_0)[$. La différence des deux aires est l'aire A de Ω et donc d'après les deux égalités de la question 4) on a

$$A = -\int_{t_0}^{t_2} Y(t)X'(t)dt - \int_{t_2}^{t_0+l} Y(t)X'(t)dt = -\int_{t_0}^{t_0+l} Y(t)X'(t)dt.$$

Comme la fonction YX' est l-périodique, son intégrale sur une période $[T, T+l]$ ne dépend pas du choix de T. Aussi il vient

$$A = -\int_T^{T+l} Y(t)X'(t)dt$$

où T est un réel quelconque.
Par intégration par parties, il vient, puisque YX' et sa primitive sont l-périodiques

$$A = -\int_T^{T+l} Y(t)X'(t)dt = [-Y(t)X(t)]_T^{T+l} + \int_T^{T+l} X(t)Y'(t)dt = \int_T^{T+l} X(t)Y'(t)dt.$$

Finalement, puisque

$$A = -\int_T^{T+l} Y(t)X'(t)dt = \int_T^{T+l} X(t)Y'(t)dt,$$

on obtient en faisant la demi-somme

$$A = \frac{1}{2}\int_T^{T+l} (X(t)Y'(t) - Y(t)X'(t))dt.$$

6) On considère la fonction Z l-périodique de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie de la façon suivante :

- si $t \in [t_0, t_2]$ alors $Z(t) = \sqrt{K^2 - X(t)^2}$;
- si $t \in [t_2, t_0 + l[$ alors $Z(t) = -\sqrt{K^2 - X(t)^2}$.

En admet que pour tout $\Theta :]-\eta, \eta[\to [0, +\infty)$ de classe C^∞, qui ne s'annule qu'en 0 et telle que $\Theta''(0) > 0$ il existe une fonction $\theta :]-\eta, \eta[\to \mathbf{R}$ de classe C^∞ et telle que $\theta^2 = \Theta$.
Montrer que Z est une fonction de classe C^∞ et que l'application qui à $t \in [t_0, t_0 + l[$ associe $(X(t), Z(t))$ est une paramétrisation injective du cercle C orienté dans le sens trigonométrique.

Puisque $-K = X(t_2) \leq X(t) \leq X(t_0) = K$ pour tout t dans $\mathbf{R}$ il vient $K^2 - X(t)^2 \leq 0$ et donc $\sqrt{K^2 - X(t)^2}$ est bien défini. Par conséquent la fonction Z est bien définie. De plus $K^2 - X(t)^2$ n'est nul que pour les nombres $t_0 + kl$ et $t_2 + kl$ avec $k \in \mathbf{Z}$ quelconque. La fonction qui à t associe $K^2 - X(t)^2$ est C^∞, positive et là où elle s'annule sa dérivée seconde vaut $-2KX''(t_0) > 0$ ou $2KX''(t_2) > 0$. Par conséquent la fonction $\Theta = K^2 - X(t)^2$ est dans le cadre du résultat admis. Il existe θ de classe C^∞ telle que $\theta^2 = \Theta$. Il reste à montrer que $Z \equiv \theta$ ou $Z \equiv -\theta$.
En dehors de son lieu d'annulation la fonction θ qui est C^∞ donc continue est de signe constant sur chaque intervalle entre deux zéros successifs. Il en est de même pour Z. C'est pourquoi sur $[t_0, t_2]$ les fonctions Z et θ sont égales partout ou opposées partout. Il en est de même sur $[t_2, t_0 + l[$. Quitte à remplacer θ par $-\theta$ on peut supposer que θ égale à Z sur $[t_0, t_2]$. Pour montrer qu'elle est égale à Z également sur $]t_2, t_0 + l[$ il suffit de démontrer qu'elle change de signe. Or on obtient en faisant un calcul à partir d'un développement limité à l'ordre 2 de X en t_0 que la dérivée de θ en t_0 est $\pm\sqrt{-KX''(t_0)}$. Elle est donc non nulle et donc θ qui s'annule en t_0 change de signe au voisinage de t_0. Finalement, puisqu'on a vérifié que θ change de signe, on peut affirmer que θ et Z qu'on savait égales sur $[t_0, t_2]$ le sont également sur $]t_2, t_0 + l[$ et donc on a bien $Z \equiv \theta$. Ceci prouve que Z est une fonction de classe C^∞.
Par construction $X^2 + Z^2 = K^2$ donc pour tout t réel $(X(t), Z(t)) \in C$. De plus les restrictions de X à $[t_0, t_2]$ et $[t_2, t_0 + l]$ sont des bijections de ces segments sur $[-K, K]$ et sur $]t_0, t_2[$ la fonction Z est strictement positive alors qu'elle est strictement négative sur $]t_2, t_0 + l[$. Par conséquent l'application qui à $t \in [t_0, t_0 + l[$ associe $(X(t), Z(t))$ est une paramétrisation injective du cercle C. Elle permet de parcourir ce cercle dans le sens trigonométrique puisque $(X(t_0), Z(t_0)) = (K, 0)$ et $Z(t) > 0$ sur $]t_0, t_2[$.

7) Montrer

$$\pi K^2 = -\int_0^l Z(t)X'(t)dt = \int_0^l X(t)Z'(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^l (X(t)Z'(t) - Z(t)X'(t))dt.$$

Ces égalités résultent du fait que l'aire du disque bordé par le cercle C est πK^2 et de l'application des résultats de la question 5) à X, Z et C plutôt qu'à X, Y et γ. C'est possible car la question 6) a permis de vérifier qu'on est bien dans le cadre des hypothèses de la question 5).

8) Montrer

$$\sqrt{A}\sqrt{\pi K^2} \leq \frac{1}{2}(A + \pi K^2)$$

et qu'il n'y a égalité que si $A = \pi K^2$.

Puisque $\sqrt{A}$ et $\sqrt{\pi K^2}$ sont des réels positifs les inégalités suivantes sont équivalentes :

$$\sqrt{A}\sqrt{\pi K^2} \quad < \quad \frac{1}{2}(A + \pi K^2)$$

$$\begin{aligned} 4A\pi K^2 &< (A+\pi K^2)^2 \\ 0 &< (A+\pi K^2)^2 - 4A\pi K^2 \\ 0 &< (A-\pi K^2)^2. \end{aligned}$$

Or la dernière inégalité est vraie si et seulement si $A \neq \pi K^2$ donc la première l'est si et seulement si $A \neq \pi K^2$. De plus si $A = \pi K^2$ alors $\sqrt{A}\sqrt{\pi K^2} = \frac{1}{2}(A+\pi K^2)$. On a donc bien

$$\sqrt{A}\sqrt{\pi K^2} \leq \frac{1}{2}(A+\pi K^2)$$

et l'égalité n'a lieu que si $A = \pi K^2$.

9) Montrer

$$\begin{aligned} A+\pi K^2 &= \int_0^l (X(t)Y'(t) - Z(t)X'(t))dt \\ &\leq \int_0^l \sqrt{(X(t)Y'(t) - Z(t)X'(t))^2}dt \\ &\leq \int_0^l \sqrt{(X(t)^2+Z(t)^2)}\sqrt{(X'(t)^2+Y'(t)^2)}dt = lK \end{aligned}$$

et qu'il n'y a l'égalité

$$A+\pi K^2 = lK$$

que si pour tout $t \in [0,l[$ les vecteurs $(X(t),Z(t))$ et $(Y'(t),-X'(t))$ sont liés.

Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs d'un espace vectoriel euclidien alors

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} \leq |\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}| \leq ||\overrightarrow{u}||\cdot||\overrightarrow{v}||$$

et l'égalité $|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}| = ||\overrightarrow{u}||\cdot||\overrightarrow{v}||$ n'a lieu que si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont liés.
Ces inégalités appliquées à $\overrightarrow{u} = (X(t),Z(t))$ et $\overrightarrow{v} = (Y'(t),-X'(t))$ pour $t \in [0,l]$ donnent

$$(X(t)Y'(t) - Z(t)X'(t)) \leq \sqrt{(X(t)Y'(t) - Z(t)X'(t))^2} \leq \sqrt{(X(t)^2+Z(t)^2)}\sqrt{(X'(t)^2+Y'(t)^2)}$$

et en intégrant

$$\begin{aligned} \int_0^l (X(t)Y'(t) - Z(t)X'(t))dt &\leq \int_0^l \sqrt{(X(t)Y'(t) - Z(t)X'(t))^2}dt \\ &\leq \int_0^l \sqrt{(X(t)^2+Z(t)^2)}\sqrt{(X'(t)^2+Y'(t)^2)}dt. \end{aligned}$$

Or, d'après les questions 5) et 7)

$$A+\pi K^2 = \int_0^l X(t)Y'(t)dt - \int_0^l Z(t)X'(t)dt = \int_0^l (X(t)Y'(t) - Z(t)X'(t))dt.$$

Et d'après les hypothèses $\sqrt{(X'(t)^2+Y'(t)^2)}$ et par définition de Z, $K = \sqrt{(X(t)^2+Z(t)^2)}$ si $t \in [0,l]$.
Par conséquent

$$\int_0^l \sqrt{(X(t)^2+Z(t)^2)}\sqrt{(X'(t)^2+Y'(t)^2)}dt = \int_0^l K\cdot 1dt = lK.$$

On a donc bien

$$\begin{aligned} A+\pi K^2 &= \int_0^l (X(t)Y'(t)-Z(t)X'(t))dt \\ &\leq \int_0^l \sqrt{(X(t)Y'(t)-Z(t)X'(t))^2}dt \\ &\leq \int_0^l \sqrt{(X(t)^2+Z(t)^2)}\sqrt{(X'(t)^2+Y'(t)^2)}dt = lK. \end{aligned}$$

S'il y a égalité $A+\pi K^2 = lK$ alors

$$\int_0^l \sqrt{(X(t)Y'(t)-Z(t)X'(t))^2}dt = \int_0^l \sqrt{(X(t)^2+Z(t)^2)}\sqrt{(X'(t)^2+Y'(t)^2)}dt.$$

Puisque les fonctions $\sqrt{(XY'-ZX')^2}$ et $\sqrt{(X^2+Z^2)}\sqrt{(X'^2+Y'^2)}$ sont continues cette égalité implique que pour tout $t\in[0,l]$

$$\sqrt{(X(t)Y'(t)-Z(t)X'(t))^2} = \sqrt{(X(t)^2+Z(t)^2)}\sqrt{(X'(t)^2+Y'(t)^2)}$$

et donc implique que pour tout $t\in[0,l]$ les vecteurs $(X(t),Z(t))$ et $(Y'(t),-X'(t))$ sont liés.

10) En utilisant de plus le fait que pour tout $t\in\mathbf{R}$ on a $X'(t)^2+Y'(t)^2=1$ et $X(t)^2+Z(t)^2=K^2$ montrer alors qu'il n'y a l'égalité

$$A+\pi K^2 = lK$$

que si pour tout $t\in[0,l[$ $X(t)=\pm KY'(t)$.

On suppose qu'on a l'égalité $A+\pi K^2=lK$. Alors, d'après la question 9), pour tout $t\in[0,l]$ les vecteurs $(X(t),Z(t))$ et $(Y'(t),-X'(t))$ sont liés. Or ces vecteurs ne sont jamais nuls car de norme respective K et 1. Il existe donc $k\in\mathbf{R}$ tel que $(X(t),Z(t))=k(Y'(t),-X'(t))$ et donc $X(t)=kY'(t)$ et $Z(t)=-kX'(t)$. En élevant au carré et en sommant il vient

$$K^2 = X(t)^2+Z(t)^2 = k^2(X'(t)^2+Y'(t)^2) = k^2\cdot 1 = k^2.$$

Par conséquent $k=\pm K$.
Ceci prouve que si $A+\pi K^2=lK$ alors pour tout $t\in[0,l[$ $X(t)=\pm KY'(t)$.

11) Déduire de 8) et de l'inégalité $A+\pi K^2\leq lK$ de 9) que $4\pi A\leq l^2$ et que si $4\pi A=l^2$ alors $A+\pi K^2=lK$, $A=\pi K^2$ et donc $K=\dfrac{l}{2\pi}$

D'après la question 8) on a $\sqrt{A}\sqrt{\pi K^2}\leq \frac{1}{2}(A+\pi K^2)$ et d'après la question 9) on a $A+\pi K^2\leq lK$. En multipliant par 2 la première inégalité on obtient

$$2\sqrt{A}\sqrt{\pi K^2}\leq A+\pi K^2\leq lK.$$

En élevant au carré il vient

$$4\pi AK^2\leq (A+\pi K^2)^2\leq l^2K^2$$

et en divisant par K^2 qui est strictement positif

$$4\pi A\leq \frac{(A+\pi K^2)^2}{K^2}\leq l^2$$

et donc

$$4\pi A\leq l^2.$$

De plus si $2\sqrt{A}\sqrt{\pi K^2} < A + \pi K^2$ ou si $A + \pi K^2 < lK$ alors $4\pi A < l^2$.
Donc pour qu'il y ait l'égalité $4\pi A = l^2$ il faut et il suffit que $A + \pi K^2 = lK$ et simultanément que $\sqrt{A}\sqrt{\pi K^2} = \frac{1}{2}(A + \pi K^2)$ et d'après la question 8) ceci n'arrive que si $A = \pi K^2$. On a alors $4\pi^2 K^2 = 4\pi A = l^2$ et donc $K = \dfrac{l}{2\pi}$.

12) Déduire de 10) et 11) que si $4\pi A = l^2$ alors $L = K$ et pour tout $t \in [0, l[$ on a les égalités

$$X(t) = \pm KY'(t) \text{ et } Y(t) = \pm KX'(t).$$

On suppose $4\pi A = l^2$. On a donc d'après 11) $K = \dfrac{l}{2\pi}$ et $A + \pi K^2 = lK$. D'après 10) il vient alors pour tout $t \in [0, l[$ $X(t) = \pm KY'(t)$.
Or les rôles de X et Y sont strictement identiques et L est à Y ce que K est à X. Aussi d'après 11) appliquée à Y et L, l'hypothèse $4\pi A = l^2$ implique $L = \dfrac{l}{2\pi} = K$, $A + \pi L^2 = lL$ et pour tout $t \in [0, l[$ $Y(t) = \pm LX'(t) = \pm LX'(t) = \pm KX'(t)$.

13) En déduire que si $4\pi A = l^2$ alors pour tout $t \in [0, l[$

$$X(t)^2 + Y(t)^2 = K^2.$$

On suppose $4\pi A = l^2$. D'après 12) pour tout $t \in [0, l[$ on a les égalités $X(t) = \pm KY'(t)$ et $Y(t) = \pm KX'(t)$. En élevant au carré et en sommant il vient pour tout $t \in [0, l[$

$$X(t)^2 + Y(t)^2 = K^2(Y'(t)^2 + X'(t)^2).$$

Or pour tout $t \in [0, l[$ on a $Y'(t)^2 + X'(t)^2 = 1$. Par conséquent si $4\pi A = l^2$ alors pour tout $t \in [0, l[$

$$X(t)^2 + Y(t)^2 = K^2.$$

14) Conclure que si $\gamma([0, l[)$ n'est pas un cercle de périmètre l alors l'aire de Ω est strictement inférieure à l'aire du disque bordé par un cercle de périmètre l.

D'après 11) l'aire A du domaine Ω bordé par la courbe γ de longueur l vérifie $4\pi A \leq l^2$ c'est à dire $A \leq \dfrac{l^2}{4\pi}$. Or $\dfrac{l^2}{4\pi}$ est exactement l'aire d'un disque bordé par un cercle de longueur l. De plus d'après 13), si $4\pi A = l^2$, c'est à dire si l'aire de Ω est l'aire d'un disque de même périmètre l, alors les points de γ vérifient $X(t)^2 + Y(t)^2 = K^2$ et d'après 12) on a aussi $K = \dfrac{l}{2\pi}$. Par conséquent, si $4\pi A = l^2$ alors γ est un cercle de périmètre l. Il en résulte que si $\gamma([0, l[)$ n'est pas un cercle de périmètre l alors l'aire de Ω est strictement inférieure à l'aire du disque bordé par un cercle de périmètre l.