Irrationalité de π

On sait depuis les travaux de Jean-Henri Lambert (1768) que le nombre π est irrationnel. L'objet de cet exercice est d'en donner une preuve qui suit une idée de Ivan Niven (1947) et qui repose sur un raisonnement par l'absurde.

On suppose qu'il existe deux entiers naturels non nuls p et q tels que $\pi = \frac{p}{q}$.
Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On note P_n la fonction polynomiale définie sur $\mathbf{R}$ par

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} x^n (p - qx)^n$$

et on pose

$$I_n = \int_0^\pi P_n(x) \sin(x) dx.$$

1) Dire pourquoi P_n est infiniment dérivable et pourquoi $P_n^{(2n+1)} \equiv 0$.
2) Démontrer l'égalité

$$I_n = \int_0^\pi P_n(x) \sin(x) dx = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (P_n^{(2k)}(0) + P_n^{(2k)}(\pi)).$$

3) Vérifier que $P_n(x) = P_n(\pi - x)$ et en déduire que si $k \in \mathbf{N}$ alors $P_n^{(k)}(x) = (-1)^k P_n^{(k)}(\pi - x)$.
4) Démontrer l'égalité

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!(n-i)!} (-1)^i q^i p^{n-i} x^{n+i}.$$

5) Si $k \in \mathbf{N}$ calculer $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(\pi)$ et montrer que ce sont des entiers.
6) Montrer que I_n est un entier.
7) Montrer que si $x \in]0, \pi[$ alors

$$0 < P_n(x) \leq \frac{1}{n!} \left(\frac{q^{\frac{1}{2}} \pi}{2} \right)^{2n}.$$

8) Montrer que I_n est strictement positive.
9) Montrer que la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de terme général $u_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{q^{\frac{1}{2}} \pi}{2} \right)^{2n}$ tend vers 0 et en déduire que la suite $(I_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers 0.
10) Expliquer pourquoi l'hypothèse $\pi \in \mathbf{Q}$ conduit à une absurdité.