On sait depuis les travaux de Jean-Henri Lambert (1768) que le nombre π est irrationnel. L'objet de cet exercice est d'en donner une preuve qui suit une idée de Ivan Niven (1947) et qui repose sur un raisonnement par l'absurde.

On suppose qu'il existe deux entiers naturels non nuls p et q tels que $\pi = \frac{p}{q}$.
Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On note P_n la fonction polynomiale définie sur $\mathbf{R}$ par

$$P_n(x) = \frac{1}{n!}x^n(p-qx)^n$$

et on pose

$$I_n = \int_0^{\pi} P_n(x)\sin(x)dx.$$

1) Dire pourquoi P_n est infiniment dérivable et pourquoi $P_n^{(2n+1)} \equiv 0$.

La fonction P_n, comme toute fonction polynomiale, est infiniment dérivable. Puisque son degré est n, sa dérivée d'ordre $n+1$ ainsi que toutes les suivantes est nulle : $P_n^{(2n+1)} \equiv 0$.

2) Démontrer l'égalité

$$I_n = \int_0^{\pi} P_n(x)\sin(x)dx = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(P_n^{(2k)}(0) + P_n^{(2k)}(\pi)).$$

On va montrer par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ que si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une fonction infiniment dérivable alors

$$\int_0^{\pi} f(x)\sin(x)dx = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(f^{(2k)}(0) + f^{(2k)}(\pi)) + (-1)^{n+1}\int_0^{\pi} f^{(2n+2)}(x)\sin(x)dx.$$

On obtient la formule au rang $n=0$ par deux intégrations par parties successives :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} f(x)\sin(x)dx &= [-f(x)\cos(x)]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} f^{(1)}(x)\cos(x)dx \\
&= [-f(x)\cos(x)]_0^{\pi} + [f^{(1)}(x)\sin(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f^{(2)}(x)\sin(x)dx \\
&= (-1)^0(f^{(0)}(0) + f^{(0)}(\pi)) + (-1)^1\int_0^{\pi} f^{(2)}(x)\sin(x)dx.
\end{aligned}$$

On établit l'héridité de la propriété en supposant la formule vraie au rang n et appliquant le résultat au rang 0 à $f^{(2n+2)}$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} f(x)\sin(x)dx &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(f^{(2k)}(0) + f^{(2k)}(\pi)) + (-1)^{n+1}\int_0^{\pi} f^{(2n+2)}(x)\sin(x)dx \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(f^{(2k)}(0) + f^{(2k)}(\pi)) \\
&\quad +(-1)^{n+1}\left((-1)^0(f^{(2n+2)}(0) + f^{(2n+2)}(\pi)) + (-1)^1\int_0^{\pi} f^{(2n+4)}(x)\sin(x)dx\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k(f^{(2k)}(0) + f^{(2k)}(\pi)) + (-1)^{n+2}\int_0^{\pi} f^{(2n+4)}(x)\sin(x)dx.
\end{aligned}$$

Maintenant que la formule générale pour une fonction infinement dérivable est prouvée on peut l'appliquer à P_n. Puisque $P^{(2n+1)}$ est nulle, c'est le cas aussi pour $P^{(2n+2)}$ et donc

$$\int_0^\pi P_n^{(2n+2)}(x)\sin(x)dx = 0.$$

Par conséquent la formule à l'ordre n, appliquée à $f = P_n$ donne

$$\int_0^\pi P_n(x)\sin(x)dx = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(P_n^{(2k)}(0) + P_n^{(2k)}(\pi)).$$

3) Vérifier que $P_n(x) = P_n(\pi - x)$ et en déduire que si $k \in \mathbf{N}$ alors $P_n^{(k)}(x) = (-1)^k P_n^{(k)}(\pi - x)$.

Si $x \in \mathbf{R}$ alors

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{n!}x^n(p-qx)^n \\ &= \frac{q^n}{n!}x^n(\pi - x)^n \\ &= \frac{q^n}{n!}(\pi - x)^n x^n \\ &= \frac{q^n}{n!}(\pi - x)^n(\pi - (\pi - x))^n \\ &= P_n(\pi - x). \end{aligned}$$

On vient de prouver que $P_n(x) = P_n(\pi - x)$ et que pour $k = 0$ l'égalité $P_n^{(k)}(x) = (-1)^k P_n^{(k)}(\pi - x)$ est vérifiée.
Pour montrer que cette égalité est vraie quel que soit $k \in \mathbf{N}$ il suffit, grâce au raisonnement par récurrence, de montrer que si l'égalité est vraie à un rang elle est vrais au rang suivant.
Soit $k \in \mathbf{N}$. Supposons que l'égalité $P_n^{(k)}(x) = (-1)^k P_n^{(k)}(\pi - x)$ est vérifiée. En dérivant les deux termes de l'égalité et en utilisant la formule de dérivation des fonctions composées pour calculer la dérivée du terme de droite il vient

$$P_n^{(k+1)}(x) = (P_n^{(k)})'(x) = -(-1)^k(P_n^{(k)})'(\pi - x) = (-1)^{k+1}P_n^{(k+1)}(\pi - x).$$

Ceci établit l'égalité au rang $k+1$ pourvu qu'elle soit vérifiée au rang k.

4) Démontrer l'égalité

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!(n-i)!}(-1)^i q^i p^{n-i} x^{n+i}.$$

D'après la formule du binôme de Newton, on a, si $n \in \mathbf{N}$,

$$(p - qx)^n = \sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!(n-i)!}(-qx)^i p^{n-i}$$

qui s'écrit aussi

$$(p - qx)^n = \sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!(n-i)!}(-1)^i q^i p^{n-i} x^i.$$

En multipliant par $\frac{x^n}{n!}$ on obtient le résultat recherché :

$$\begin{aligned}
P_n(x) = \frac{x^n}{n!}(p-qx)^n &= \frac{x^n}{n!}\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!(n-i)!}(-1)^i q^i p^{n-i} x^i \\
&= \sum_{i=0}^{n}\frac{x^n}{n!}\frac{n!}{i!(n-i)!}(-1)^i q^i p^{n-i} x^i \\
&= \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!(n-i)!}(-1)^i q^i p^{n-i} x^{n+i}.
\end{aligned}$$

5) Si $k \in \mathbf{N}$ calculer $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(\pi)$ et montrer que ce sont des entiers.

La formule de Taylor appliquée à P_n qui est un polynôme de degré $2n$ donne

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{2n}\frac{P^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

L'identification terme à terme cette somme et celle donnée dans la question précédente permet de calculer les $P_n^{(k)}(0)$.
Soit $k \in \mathbf{N}$.
a) Puisque P_n est de degré $2n$, les $P_n^{(k)}(0)$ sont tous nuls pour $k > 2n$. Il en est de même des $P_n^{(k)}(\pi)$ d'après la question 3).
b) Si $0 \le k \le n-1$ alors $P_n^{(k)}(0) = 0$ d'après l'identification. Il en est de même des $P_n^{(k)}(\pi)$ d'après la question 3).
c) Si $n \le k \le 2n$ alors

$$\begin{aligned}
P_n^{(k)}(0) &= \frac{k!}{(k-n)!(2n-k)!}(-1)^{k-n}q^{k-n}p^{2n-k} \\
&= \frac{k!}{(k-n)!n!}\frac{n!}{(2n-k)!}(-1)^{k-n}q^{k-n}p^{2n-k}.
\end{aligned}$$

On déduit de ce calcul de $P_n^{(k)}(0)$ et de la question 3) que

$$P_n^{(k)}(\pi) = (-1)^k P_n^{(k)}(0) = \frac{k!}{(k-n)!n!}\frac{n!}{(2n-k)!}(-1)^{2k-n}q^{k-n}p^{2n-k}.$$

Or $\frac{k!}{(k-n)!n!}$ est le nombre de combinaisons de n objets parmi k, c'est donc un entier, et $\frac{n!}{(2n-k)!}$ est le nombre d'arrangements de k objets parmi $2n$, c'est aussi un entier, de même que $(-1)^{k-n}$, q^{k-n} et p^{2n-k}. Finalement $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(\pi)$ sont des produits d'entiers. Ce sont donc des entiers.

6) Montrer que I_n est un entier.

Puisque $I_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(P_n^{(2k)}(0) + P_n^{(2k)}(\pi))$ et que les termes $P_n^{(2k)}(0)$ et $P_n^{(2k)}(\pi)$ sont entiers si $k \in \mathbf{N}$ et $0 \le k \le n$, l'intégrale I_n est bien un entier.

7) Montrer que si $x \in]0, \pi[$ alors

$$0 < P_n(x) \le \frac{1}{n!}\left(\frac{q^{\frac{1}{2}}\pi}{2}\right)^{2n}.$$

Soit $x \in]0, \pi[$. Alors x et $(p - qx) = q(\pi - x)$ sont strictement positifs. Il en est de même de $P_n(x) = \frac{1}{n!}x^n(p - qx)^n$.
Le produit $x((p - qx) = qx(\pi - x)$ est maximum pour $x = \frac{\pi}{2}$ et ce maximum vaut $q\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$. Par conséquent, sur $]0, \pi[$ $P_n(x)$ est majoré par $\frac{1}{n!}\left(q\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right)^n$ qui vaut $\frac{1}{n!}\left(\frac{q^{\frac{1}{2}}\pi}{2}\right)^{2n}$.
En conclusion, si $x \in]0, \pi[$ alors

$$0 < P_n(x) \leq \frac{1}{n!}\left(\frac{q^{\frac{1}{2}}\pi}{2}\right)^{2n}.$$

8) Montrer que I_n est strictement positive.

La fonction qui à $x \in \mathbf{R}$ associe $P_n(x)\sin(x)$ est continue. Elle est strictement positive sur $]0, \pi[$ puisque P_n et sin le sont sur cet intervalle. Par conséquent l'intégrale $I_n = \int_0^\pi P_n(x)\sin(x)dx$ est strictement positive.

9) Montrer que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de terme général $u_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{q^{\frac{1}{2}}\pi}{2}\right)^{2n}$ tend vers 0 et en déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0.

Le terme général de la suite u s'écrit $u_n = \frac{\lambda^n}{n!}$ avec $\lambda = \left(\frac{q^{\frac{1}{2}}\pi}{2}\right)^2$. Soit N la partie entière de 2λ et soit $\mu = 2^N u_N$.
Soit $n \in \mathbf{N}$ strictement plus grand que N. Pour tout $k \in \mathbf{N}$ tel que $N + 1 \leq k \leq n$ il vient $\frac{\lambda}{k} \leq \frac{1}{2}$.
Par conséquent

$$\begin{array}{rcl} 0 < u_n & = & \dfrac{\lambda^n}{n!} \\ & = & \dfrac{\mu}{2^N} \displaystyle\prod_{k=N+1}^{n} \dfrac{\lambda}{k} \\ & \leq & \mu\left(\dfrac{1}{2}\right)^N\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-N} \\ & \leq & \mu\left(\dfrac{1}{2}\right)^n. \end{array}$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et que $0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$, il en est de même pour u : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
Puisque $P_n(x)$ est compris entre 0 et u_n si $x \in]0, \pi[$ et que $\sin(x)$ est compris entre 0 et 1 il vient

$$0 \leq I_n = \int_0^\pi P_n(x)\sin(x)dx \leq \pi u_n.$$

Aussi, comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, il vient $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

10) Expliquer pourquoi l'hypothèse $\pi \in \mathbf{Q}$ conduit à une absurdité.

L'hypothèse $\pi \in \mathbf{Q}$ implique d'après 6) que la suite I_n est une suite d'entiers naturels. Elle implique d'après 8) que c'est une suite d'entiers naturels non nuls. Mais d'après 9) la suite I_n tend vers 0. Donc il devrait existait un rang N_0 à partir duquel les I_n sont dans l'intervalle $] - 1, 1[$. Puisque ce sont des entiers ils ne peuvent être que nuls. C'est la contradiction recherchée. Ceci prouve par l'abusrde que π n'est pas rationnel.