Université de Rennes 1
M1 MEFF Maths (2018-2019)
Analyse-Probabilités 1 / Partie Analyse
Deux exercices à rédiger

Exercice 1. Soient $a < b$ deux réels et $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels compris entre a et b.
Pour $x \in [a, b]$ on pose $c(x) = 0$ si $\{n \in \mathbf{N}, u_n \leq x\}$ est fini et $c(x) = 1$ sinon.
1) Montrer que $c(b) = 1$
2) Montrer que la fonction c est croissante.
3) Montrer qu'il existe $l \in [a, b]$ tel que quel que soit $x \in [a, b]$, $c(x) = 0$ si $x < l$ et $c(x) = 1$ si $x > l$.
4) Soit $k \in \mathbf{N}$ et soit I_k l'ensemble défini par

$$I_k = \{n \in \mathbf{N}, |l - u_n| < \frac{1}{k+1}\}.$$

a) Montrer que I_k est infini.
b) Montrer qu'il existe un unique $n_k \in I_k$ tel que $I_k \cap \{n < n_k\}$ possède exactement k éléments.
5) Montrer que la suite $(n_k)_{k\in\mathbf{N}}$ ainsi définie est strictement croissante.
6) Montrer que la suite extraite $(u_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ est convergente de limite l.

Exercice 2. Soit $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ un nombre irrationnel.
1) Montrer que si $(p, q) \in \mathbf{Z}^2$ et $(p', q') \in \mathbf{Z}^2$ sont tels que

$$p + qx = p' + qx'$$

alors $p = p'$ et $q = q'$.
2) Montrer que l'ensemble I des $(p, q) \in \mathbf{Z}^2$ tels que $0 < p + qx \leq 1$ est infini.
3) Soit $n \in \mathbf{N}^*$.
a) Montrer qu'il existe $i \in \mathbf{N}$ avec $0 \leq i < n$, $(p', q') \in I$ et $(p'', q'') \in I$ tels que

$$\frac{i}{n} < p' + q'x < p'' + q''x \leq \frac{i+1}{n}.$$

b) En déduire qu'il existe $(p, q) \in \mathbf{Z}^2$ tel que

$$0 < p + qx < \frac{1}{n}.$$

c) Soit $y \in \mathbf{R}$. Montrer qu'il existe $(P, Q) \in \mathbf{Z}^2$ tel que

$$P + Qx \leq y < P + Qx + \frac{1}{n}.$$