Exercice 1. Soient $a < b$ deux réels et $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels compris entre a et b.
Pour $x \in [a, b]$ on pose $c(x) = 0$ si $\{n \in \mathbf{N}, u_n \leq x\}$ est fini et $c(x) = 1$ sinon.
1) Montrer que $c(b) = 1$

Puisque la suite u est à valeurs dans $[a, b]$ on a $u_n \leq b$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$. Aussi $\{n \in \mathbf{N}, u_n \leq b\} = \mathbf{N}$ est infini et donc $c(b) = 1$.

2) Montrer que la fonction c est croissante.

Soit $x \in [a, b]$ et $y \in [a, b]$ tels que $x \leq y$. Puisque $x \leq y$ on a $\{n \in \mathbf{N}, u_n \leq x\} \subset \{n \in \mathbf{N}, u_n \leq y\}$.
Par conséquent on est dans l'un des quatre cas suivants :
- les ensembles $\{n \in \mathbf{N}, u_n \leq x\}$ et $\{n \in \mathbf{N}, u_n \leq y\}$ sont finis et $c(x) = c(y) = 0$;
- l'ensemble $\{n \in \mathbf{N}, u_n \leq x\}$ est fini et l'ensemble $\{n \in \mathbf{N}, u_n \leq y\}$ est infini et $c(x) = 0 \leq 1 = c(y)$;
- les ensembles $\{n \in \mathbf{N}, u_n \leq x\}$ et $\{n \in \mathbf{N}, u_n \leq y\}$ sont infinis et $c(x) = c(y) = 1$.
Dans tous les cas $c(x) \leq c(y)$.
Donc quels que soient $x, y \in [a, b]$ avec $x \leq y$ on a $c(x) \leq c(y)$. Ceci signifie que c est croissante.

3) Montrer qu'il existe $l \in [a, b]$ tel que quel que soit $x \in [a, b]$, $c(x) = 0$ si $x < l$ et $c(x) = 1$ si $x > l$.

L'ensemble $I = \{t \in [a, b], c(t) = 1\}$ contient b puisque $c(b) = 1$. Il est non vide. Par conséquent, puisqu'il est borné car inclus dans $[a, b]$, il admet une borne inférieure l.
Soit $x \in [a, l[$. Puisque l est la borne inférieure de $I = \{t \in [a, b], c(t) = 1\}$ et que $x < l$, $c(x) \neq 1$ donc $c(x) = 0$.
Soit $x \in]l, b]$. Puisque l est la borne inférieure de $I = \{t \in [a, b], c(t) = 1\}$ et que $x > l$, il existe $y \in I \cap [l, x[$. On a donc $c(y) = 1$. Puisque $x > y$ et que c est croissante et ne prend que les valeurs 0 et 1 on a $c(x) = 1$.

4) Soit $k \in \mathbf{N}$ et soit I_k l'ensemble défini par

$$I_k = \{n \in \mathbf{N}, |l - u_n| < \frac{1}{k+1}\}.$$

a) Montrer que I_k est infini.

L'ensemble $\{n \in \mathbf{N}, u_n \leq l - \frac{1}{k+1}\}$ est fini. En effet si $l - \frac{1}{k+1} \in [a, l[$ alors $c(l - \frac{1}{k+1}) = 0$ et donc $\{n \in \mathbf{N}, u_n \leq l - \frac{1}{k+1}\}$ est fini. Sinon $l - \frac{1}{k+1} < a$ et $\{n \in \mathbf{N}, u_n \leq l - \frac{1}{k+1}\}$ est vide, et donc fini, puisque la suite est à valeurs supérieures ou égales à a qui est strictement supérieure à $l - \frac{1}{k+1}$.
L'ensemble $\{n \in \mathbf{N}, u_n < l + \frac{1}{k+1}\}$ est infini. En effet posons $y = \min(b, l + \frac{1}{2(k+1)})$. Puisque $l < y \leq b$ on a $c(y) = 1$ et donc $\{n \in \mathbf{N}, u_n \leq y\}$ infini. Or $l < y < l + \frac{1}{k+1}$. Par conséquent $\{n \in \mathbf{N}, u_n \leq y\}$ est inclus dans $\{n \in \mathbf{N}, u_n < l + \frac{1}{k+1}\}$ et donc $\{n \in \mathbf{N}, u_n < l + \frac{1}{k+1}\}$ est infini.
Or

$$I_k = \{n \in \mathbf{N}, |l - u_n| < \frac{1}{k+1}\} = \{n \in \mathbf{N}, u_n < l + \frac{1}{k+1}\} \setminus \{n \in \mathbf{N}, u_n \leq l - \frac{1}{k+1}\}$$

est donc la différence d'un ensemble infini et d'un ensemble fini. Il est donc infini.

b) Montrer qu'il existe un unique $n_k \in I_k$ tel que $I_k \cap \{n < n_k\}$ possède exactement k éléments.

[*On pourrait utiliser le fait que tout sous-ensemble E infini de* $\mathbf{N}$ *peut être indexé par* $\mathbf{N}$ *en respectant l'ordre (i.e. Il existe une bijection croissante de* $\mathbf{N}$ *dans E.). Ici on préfère donner une preuve qui*

n'utilise pas ce résultat mais qui repose sur le fait que toute partie non vide de $\mathbf{N}$ *possède un plus petit élément.*]
Étape 1, existence.
Montrons par récurrence sur $i \in \mathbf{N}$ que pour tout $i \in \mathbf{N}$ il existe $m_i \in I_k$ tel que $I_k \cap \{n < m_i\}$ possède exactement i éléments (propriété $\mathcal{H}_i$).
Initialisation. Vérifions la propriété $\mathcal{H}_0$.
Puisque I_k est un sous-ensemble infini donc non vide de $\mathbf{N}$ il admet un plus petit élément noté m_0. On a bien $I_k \cap \{n < m_0\} = \emptyset$. La propriété $\mathcal{H}_0$ est vérifiée.
Hérédité. Soit $i \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathcal{H}_i$ vraie et soit $m_i \in I_k$ tel que $I_k \cap \{n < m_i\}$ possède exactement i éléments.
Montrons l'existence de m_{i+1}. Puisque I_k est non infini, $I_k \cap \{n > m_i\}$ est un sous-ensemble infini de $\mathbf{N}$. Il contient donc un plus petit élément noté m_{i+1}. L'ensemble $I_k \cap \{n < m_{i+1}\}$ est la réunion de deux ensembles d'intersection vide, $I_k \cap \{n < m_i\}$ qui contient i éléments et le singleton $\{m_i\}$. Il contient donc exactement $i + 1$ éléments.
On vient de prouver par récurrence que pour tout $i \in \mathbf{N}$ la propriété $\mathcal{H}_i$ est vérifiée.
En appliquant ce résultat à $i = k$ on a établi l'existence de $n_k = m_k$ tel que $I_k \cap \{n < n_k\}$ possède exactement k éléments.
Étape 2, unicité. Si $a, b \in I_k$ et $a < b$ alors $a \in (I_k \cap \{n < b\}) \setminus (I_k \cap \{n < a\})$ et $I_k \cap \{n < a\}$ est inclus dans $I_k \cap \{n < b\}$. Les cardinaux des deux ensembles finis $I_k \cap \{n < a\}$ et $I_k \cap \{n < b\}$ sont donc différents. Ceci prouve que n_k est le seul entier de m de I_k tel que $I_k \cap \{n < m\}$ possède exactement k éléments.

5) Montrer que la suite $(n_k)_{k\in\mathbf{N}}$ ainsi définie est strictement croissante.

Supposons qu'il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $n_{k+1} \leq n_k$. L'ensemble $I_k \cap \{n < n_{k+1}\}$ est alors inclus dans $I_k \cap \{n < n_k\}$ et donc son cardinal est au plus k. Or l'ensemble I_{k+1} est inclus dans l'ensemble I_k donc le cardinal de $I_{k+1} \cap \{n < n_{k+1}\}$ est inférieur ou égal à celui de $I_k \cap \{n < n_{k+1}\}$ qui est majoré par k sous l'hypothèse $n_{k+1} \leq n_k$. Or le cardinal de $I_{k+1} \cap \{n < n_{k+1}\}$ est $k + 1$. Il y a une contradiction : l'hypothèse de départ est fausse. Par conséquent $n_k < n_{k+1}$ quel que soit $k \in \mathbf{N}$. Ceci signifie que la suite $(n_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est strictement croissante.

6) Montrer que la suite extraite $(u_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ est convergente de limite l.

Puisque la suite $(n_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est strictement croissante, la suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ est bien une suite extraite. Par construction, si $k \in \mathbf{N}$ $|u_k - l| \leq \frac{1}{k+1}$. Or la suite de terme général $\frac{1}{k+1}$ converge vers 0. L'inégalité précédente implique donc que la suite $(u_{n_k} - l)_{k\in\mathbf{N}}$ tend vers 0 et donc que la suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ tend vers l.

Exercice 2. Soit $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ un nombre irrationnel.
1) Montrer que si $(p, q) \in \mathbf{Z}^2$ et $(p', q') \in \mathbf{Z}^2$ sont tels que

$$p + qx = p' + qx'$$

alors $p = p'$ et $q = q'$.

Soient $(p, q) \in \mathbf{Z}^2$ et $(p', q') \in \mathbf{Z}^2$ tels que

$$p + qx = p' + qx'.$$

Il vient $q - q' = x(p - p')$. Or $q - q'$ est un entier. Donc $x(p - p')$ est un entier. Mais x est irrationnel. Ceci implique que $p' - p = 0$ car le produit d'un nombre irrationnel par un entier non nul est irrationnel donc non entier. L'égalité $p' - p = 0$ obtenue entraîne l'égalité $q - q' = 0$.

Ceci prouve que si $p + qx = p' + qx'$ avec $(p, q) \in \mathbf{Z}^2$ et $(p', q') \in \mathbf{Z}^2$ alors $p = p'$ et $q = q'$.

2) Montrer que l'ensemble I des $(p, q) \in \mathbf{Z}^2$ tels que $0 < p + qx \leq 1$ est infini.

Soit $q \in \mathbf{Z}$. On note p la partie entière de $1 - qx$. Il vient

$$p \leq 1 - qx < p + 1$$

et donc en ajoutant qx dans la première inégalité et $qx - 1$ à la seconde

$$0 < p + qx \leq 1.$$

Ceci prouve que pour chaque $q \in \mathbf{Z}$ il existe $p_q \in \mathbf{Z}$ tel que $0 < p_q + qx \leq 1$. Les couples (p_q, q) ainsi construits forment un sous-ensemble infini de I. Par conséquent I est bien infini.

3) Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

a) Montrer qu'il existe $i \in \mathbf{N}$ avec $0 \leq i < n$, $(p', q') \in I$ et $(p'', q'') \in I$ tels que

$$\frac{i}{n} < p' + q'x < p'' + q''x \leq \frac{i+1}{n}.$$

D'après la question 2) il existe un sous-ensemble J de couples (p, q) de I tels que $0 < p + qx \leq 1$. Si $i \in \mathbf{N}$ et $0 \leq i < n$ on note J_i l'ensemble des $(p, q) \in J$ tels que

$$\frac{i}{n} < p + qx \leq \frac{i+1}{n}.$$

Puisque la réunion de la famille finie d'ensembles J_i, $i \in \mathbf{N}$ et $0 \leq i < n$, est égale à J qui est infini, il existe un indice $i \in \mathbf{N}$ et $0 \leq i < n$ tel que J_i est infini. Soient $(p', q') \in J_i$ et $(p'', q'') \in J_i$ distincts. On a par construction

$$\frac{i}{n} < p' + q'x \leq \frac{i+1}{n} \text{ et } \frac{i}{n} < p'' + q''x \leq \frac{i+1}{n}.$$

De plus, d'après la question 1), $p' + q'x \neq p'' + q''x$ puisque $(p', q') \neq (p'', q'')$ et donc, quitte à permuter les couples, $p' + q'x < p'' + q''x$. Ainsi

$$\frac{i}{n} < p' + q'x < p'' + q''x \leq \frac{i+1}{n}.$$

On a ainsi prouvé qu'il existe $i \in \mathbf{N}$ avec $0 \leq i < n$, $(p', q') \in I$ et $(p'', q'') \in I$ tels que

$$\frac{i}{n} < p' + q'x < p'' + q''x \leq \frac{i+1}{n}.$$

b) En déduire qu'il existe $(p, q) \in \mathbf{Z}^2$ tel que

$$0 < p + qx < \frac{1}{n}.$$

Soient i, (p', q') et (p'', q'') trouvés dans 3)a). On pose $p = p'' - p'$ et $q = q'' - q'$. On a $(p, q) \in \mathbf{Z}^2$ et puisque

$$\frac{i}{n} < p' + q'x < p'' + q''x \leq \frac{i+1}{n}$$

il vient par différence

$$0 < (p'' + q''x) - (p' + q'x) = p + qx < \frac{1}{n}.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

c) Soit $y \in \mathbf{R}$. Montrer qu'il existe $(P, Q) \in \mathbf{Z}^2$ tel que

$$P + Qx \leq y < P + Qx + \frac{1}{n}.$$

Soit (p, q) obtenu en 3)b). Soit $y \in \mathbf{R}$. Puisque $0 < p + qx$ on peut diviser y par $p + qx$. Soit $N \in \mathbf{Z}$ la partie entière de $\frac{y}{p+qx}$:

$$N \leq \frac{y}{p + qx} < N + 1.$$

Si on multplie les termes de ces inégalité par $p+qx$ qui est strictement positif, on a, puisque $p+qx < \frac{1}{n}$,

$$Np + Nqx \leq y < Np + Nqx + \frac{1}{n}.$$

Or $Np \in \mathbf{Z}$ et $Nq \in \mathbf{Z}$. Ceci permet de conclure qu'il existe $(P, Q) \in \mathbf{Z}^2$ tel que

$$P + Qx \leq y < P + Qx + \frac{1}{n}.$$