Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction. Les documents sont interdits ainsi que les appareils électroniques.

Exercice 1. (4 pts) Énoncer et prouver le théorème de Rolle et la formule de Taylor-Young.

Exercice 2. (7 pts) On admet l'existence de exp dérivable et vérifiant $\exp(0) = 1$ et $\exp' = \exp$.
1) Montrer que exp est infiniment dérivable.
2) Montrer que s'il existe $a > 0$ tel que $\exp(a) \leq 0$ alors il existe $b > 0$ tel que $\exp(b) = 0$ et $\exp(x) > 0$ si $x \in [0, b[$ et il existe $c > 0$ tel que $\exp(c) > 0$ et $\exp'(c) < 0$.
3) Montrer que exp est strictement positive et strictement croissante sur $[0, +\infty)$.
Soit $n \in \mathbf{N}$ et $x > 0$.
4) Montrer qu'il existe $y \in [0, x]$ tel que

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + \frac{1}{(n+1)!} \exp(y) x^{n+1}.$$

5) Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq \exp(1) \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} \exp(1).$$

6) En déduire que $\exp(1) \leq 2 + \frac{1}{2} \exp(1)$ puis que $\exp(1) \leq 4$.
7) En utilisant l'encadrement obtenu en 5) avec $n = 4$ et la majoration obtenue dans 6), montrer que

$$\frac{65}{24} \leq \exp(1) \leq \frac{329}{120}$$

et trouver $p \in \mathbf{N}$ tel que

$$\frac{p}{10} < \exp(1) < \frac{p+1}{10}.$$

Exercice 3. (7 pts) Soit la fonction $f : [0, 1] \to [0, 1]$ définie par $f(x) = 2x$ si $x \in [0, 1/2]$ et $f(x) = 2 - 2x$ si $x \in]1/2, 1]$.
1) Montrer que f est continue et admet exactement deux points fixes, 0 et 2/3.
2) Montrer que $f([0, 1] \cap \mathbf{Q}) = [0, 1] \cap \mathbf{Q}$ et que $f([0, 1] \setminus \mathbf{Q}) = [0, 1] \setminus \mathbf{Q}$.
Soit $x \in [0, 1] \setminus \mathbf{Q}$.
3) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par $u_0 = x$ et, si $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ est une suite bien définie de nombres irrationnels compris entre 0 et 1 qui ne prend donc pas les valeurs 0 et 2/3.
4) Montrer que si la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ admet une limite cette limite est 0 ou 2/3.
5) Soit $n \in \mathbf{N}$.
5.a) Montrer que si $u_n < 1/2$ alors il existe $m \in \mathbf{N}^*$ tel que $u_{n+m} > 1/2$.
5.b) Montrer que si $|u_n - 2/3| < 1/6$ alors il existe $m \in \mathbf{N}^*$ tel que $|u_{n+m} - 2/3| > 1/6$.
6) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ n'a pas de limite.

Exercice 4. (2 pts) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dérivable. On suppose que $\lim_{+\infty} f'(x) = \lim_{-\infty} f'(x) = 1$. Montrer que $f(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$.