Université de Rennes 1
M1 MEFF Maths (2017-2018)
Analyse-Probabilités 1 / Partie Analyse
Contrôle continu 1 (50 minutes pour la partie Analyse)

Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction. Les documents sont interdits ainsi que les appareils électroniques.

Exercice 1. (2 pts) Énoncer et prouver le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 2. (4 pts) Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels qui tend vers un réel l. Montrer que la suite $v = (v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par

$$v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k \text{ si } n \in \mathbf{N}$$

est convergente de limite l.

Exercice 3. (4 pts)
Montrer que la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = x^2$ n'est pas uniformément continue.

Exercice 4. (8 pts) On admet que la fonction $\sqrt{x}$ est bien définie de $[0, +\infty)$ dans $[0, +\infty)$.
1) Démontrer, en revenant à la définition de la continuité, que $\sqrt{x}$ est continue.
On suppose connu le fait que les fonctions sin et cos vérifient, si $x, y \in \mathbf{R}$, les propriétés suivantes :

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1,$$

$$|\sin(x)| \leq |x|,$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y),$$

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y),$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

2) Démontrer que $\sin(0) = 0$ et $\cos(0) = 1$.
3) Démontrer en revenant à la définition de la continuité que sin est continue en 0.
4) Démontrer que cos est continue en 0.
5) Démontrer que sin et cos sont des fonctions continues.
6) Démontrer en revenant à la définition de dérivée que sin est dérivable en 0 et que $\sin'(0) = 1$.
7) Démontrer en revenant à la définition de dérivée que cos est dérivable en 0 et que $\cos'(0) = 0$.
8) Démontrer que sin et cos sont des fonctions dérivables et que $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$.

Exercice 5. (2 pts) Soit $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ continue, dérivable sur $]0, +\infty)$ et telle que $f(0) = 0$ et $\lim_{+\infty} f = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]0, +\infty)$ tel que $f'(c) = 0$.