M11EEF
PLC MATHS
CC1 Anal Partie 1
Partie Analyse

Ex1 Th Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et soient a et $b \in I$. Pour tout γ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe c compris entre a et b tel que $f(c) = \gamma$

Preuve 1/ On construit deux suites adjacentes a_n et b_n définies par $a_0 = a$ $b_0 = b$ et pour $n \in \mathbb{N}$

* $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ si $f(a_n) - \gamma$ est de signe que $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) - \gamma$
* $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ $b_{n+1} = b_n$ sinon

. Par construction $(a_{n+1} - a_n)(b_{n+1} - b_n) \leq 0$ pour tout n et $|a_n - b_n| = \frac{|a-b|}{2^n}$ donc $\lim a_n - b_n = 0$ et (a_n) et (b_n) sont deux suites monotones, l'une croissante et l'autre décroissante. Donc les deux suites convergent vers la même limite

. Par construction $f(a_n) - \gamma$ est de signe constant et $f(b_n) - \gamma$ est de signe constant opposé donc à la limite $f(c) - \gamma$ est à la fois positif et négatif donc nul on a $f(c) = \gamma$

Ex2 Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $u_n \longrightarrow l$ il existe N tel que $|u_k - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ si $k \geq N$

Soit $M > N$ et $M > \frac{2}{\varepsilon/2} \left(1 + \sum_{k=0}^{N} |u_k - l|\right)$, $M \in \mathbb{N}$

On a si $n > M$

$$|v_n - l| \leq \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{N} |u_k - l|\right) + \frac{1}{n+1} \sum_{k=N+1}^{n} |u_k - l|$$

$$|v_n - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n-N}{n+1} \frac{\varepsilon}{2}$$

$|v_n - l|$

On a montré que si $\varepsilon > 0$ il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $n > M$ alors $|v_n - l| < \varepsilon$

donc $\lim v_n = l$

exo3

Calculons $|f(x+\eta)-f(x)|$

$|f(x+\eta)-f(x)| = |2x\eta+\eta^2|$

Soit $\eta>0$ et soit $x=\frac{1}{\eta}$. On a

$|f(x+\eta)-f(x)| = 2+\eta^2 > 2$

On vient de prouver que si on prend $\varepsilon = 1$ alors quelque soit $\eta>0$ il existe $x\in\mathbb{R}$ ($x=\frac{1}{\eta}$) tel que $|f(x+\eta)-f(x)|>1=\varepsilon$

Cela montre que f n'est pas uniformément continue c'est à dire que $\exists\varepsilon>0,\ \forall\eta>0\ \exists x\in\mathbb{R}\ \exists y\in\mathbb{R}$ $|x-y|<\eta$ et $|f(x)-f(y)|>\varepsilon$

exo4

1) soit $x,y\geq 0$

$|\sqrt{x}-\sqrt{y}| = \left|\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right|$ si $x,y\neq(0,0)$

- Continuité de f en $x>0$

Soit $\varepsilon>0$. Soit $\eta>0$ vérifiant

$\eta<\sqrt{x}\cdot\varepsilon$

Soit $y\geq 0$ tel que $|x-y|<\eta$

On a $|\sqrt{x}-\sqrt{y}| = \frac{|x-y|}{|\sqrt{x}+\sqrt{y}|} < \frac{|x-y|}{\sqrt{x}} \leq \frac{\sqrt{x}\varepsilon}{\sqrt{x}} = \varepsilon$

Donc $\forall\varepsilon>0\ \exists\eta>0\ \forall y\geq 0\ |x-y|<\eta \Rightarrow |\sqrt{x}-\sqrt{y}|<\varepsilon$

Cela prouve que $\sqrt{\ }$ est continue en $x>0$

- Continuité de f en $x=0$

Soit $\varepsilon>0$ soit $\eta<\varepsilon^2$

alors si $x\geq 0$ et on a

$|x-0|<\eta \Rightarrow |x|<\varepsilon^2 \Rightarrow \sqrt{x}<\varepsilon$

car $\sqrt{\ }$ est croissante sur $[0,+\infty)$

donc $\forall\varepsilon>0\ \exists\eta>0\ \forall x\geq 0\ |x-0|<\eta \Rightarrow |\sqrt{x}-\sqrt{0}|<\varepsilon$

Cela prouve que $\sqrt{\ }$ est continue en 0

2) - $|\sin(x)|\leq|x|$ si $x\in\mathbb{R}$ donc $|\sin(0)|\leq|0|$

donc $\sin(0)=0$

- $\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$

donc $\cos 0 = \cos(0+0) = \cos^2 0 - \sin^2 0$

donc $\cos 0 = \cos^2 0$. De plus $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

donc $\cos^2(0) + \sin^2(0) = 1$ donc $\cos^2(0) = 1$

Ainsi $\cos(0) = \cos^2(0) = 1$.

3) Soit $\varepsilon > 0$ on pose $\eta = \varepsilon$. Alors
$\forall x \in \mathbb{R}$ $|x - 0| < \eta \Rightarrow |\sin(x) - \sin(0)|$
$= |\sin(x)| \leq |x| < \eta = \varepsilon$

Donc la fonction sin est continue en 0

4) On a $\cos(x) = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$

donc $\cos(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) - 2\sin^2(x/2)$
$= 1 - 2\sin^2(x/2)$

On en déduit, puisque sin est continue en 0 que $\cos(x)$ est continue en 0. En effet
Soit $\varepsilon > 0$ Soit $\eta = \min(1, \varepsilon)$. On a
alors si $x \in \mathbb{R}$ et $|x - 0| < \eta$
$|\cos(x) - \cos(0)| = \left|2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right| \leq \frac{x^2}{2} \leq \frac{1 \cdot \varepsilon}{2} < \varepsilon$,

5) On a $\sin(y) = \sin(x + (y - x))$
$= \sin x \cdot \cos(y - x) + \cos x \cdot \sin(y - x)$
$\cos(y) = \cos(x + y - x)$
$= \cos x \cos(y - x) - \sin x \sin(y - x)$

Puisque $\lim_{t \to 0} \cos t = \cos(0) = 1$ et

$\lim_{t \to 0} \sin t = \sin(0) = 0$

on a $\lim_{y \to x} \sin(y) = \sin x \lim_{y \to x} \cos(y - x) + \cos x \lim_{y \to x} \sin(y - x)$

$= \sin x \times 1 + \cos x \times 0 = \sin x$

En fait sin est bien continue en x

On a $\lim_{y \to x} \cos y) = \cos x \lim_{y \to x} \cos(y - x) - \sin x \lim_{y \to x} \sin(y - x)$

$= \cos x \times 1 - \sin x \times 0 = \cos x$

En fait cos est bien continue en x

6) $\frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \frac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$.

or $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ donc

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = 1$. Ceci prouve que sin est dérivable en 0 de dérivée $1 = \cos 0 = \sin'(0)$

7) $\frac{\cos x - \cos 0}{x - 0} = \frac{2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x}$ (voir question 5)

donc $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \cos 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{x}{2}\right) \lim_{x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}$

$= 0 \times 1 = 0$

donc cos est dérivable en 0 de dérivée $\cos'(0) = \sin(0) = 0$

8) Puisque $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
et cos, sin et cos sont dérivables en 0 de dérivées 0 et 1
on en déduit que sin est dérivable en x
de dérivée $\sin'(x) = \sin x \cos' 0 + \cos x \sin' y$

$= \sin x \times 0 + \cos x \times 1$
$= \cos x$

Puisque $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
et cos et sin dérivables en 0 dérivées 0 et 1
on en déduit que cos est dérivable en x
de dérivée $\cos'(x) = \cos x \cos' 0 - \sin x \sin' 0$

$= \cos x \times 0 - \sin x \times 1$
$= -\sin x$

Exo 5

1) Si $f \equiv 0$ c'est fini $f' \equiv 0$. Sinon il existe a tel que $f(a) > 0$
Puisque $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ il existe $M > a$ tel que $\forall x \geq M$, $0 < f(x) < \frac{f(a)}{2}$
En particulier $0 < f(M) < f(a)$. D'après le théorème des V.I
il existe $b \in [0, a]$ tel que $f(b) = f(M)$
$b < a < M$ D'après le théorème de Rolle il existe $c \in]b, M[$ tel que $f'(c) = 0$.