Université de Rennes
UFR Mathématiques

MEEF PLC Maths
2024-2025

Compléments d'analyse

Premier contrôle (1 heure)

Partie A (10 points)

Donner une résolution détaillée de l'une des quatre équations différentielles suivantes :

$$y'' - 6y' + 25y = \sin(5x) \tag{1}$$

$$y'' - 2y' + y = \exp(x) + x \tag{2}$$

$$y' - 2xy = \ln(x)\exp(x^2) \tag{3}$$

$$2\sqrt{y} - y' = 0 \text{ avec } y \geq 0 \text{ et } y(0) = 0 \tag{4}$$

Partie B (10 points)

1. Soit $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ de la façon suivante : si $n \in \mathbf{N}$ et $x \in [0,1]$ alors $s_n(x) = \sin^n(x)$. Montrer, en revenant à la définition de la convergence uniforme, que $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend uniformément vers la fonction identiquement nulle sur $[0,1]$.

2. Soit $(g_k)_{k\in\mathbf{N}}$ la suite de fonctions définies sur $]0,1]$ de la façon suivante : si $k \in \mathbf{N}$ alors $g_k(x) = 2^k x$ lorsque $x \in]0, \frac{1}{2^k}[$ et $g_k(x) = 1$ sinon.
a. Montrer que la suite $(g_k)_{k\in\mathbf{N}}$ tend simplement vers la fonction g définie sur $]0,1]$ par $g(x) = 1$.
b. Calculer $g_k(\frac{1}{2^{k+1}})$ si $k \in \mathbf{N}$.
c. Montrer, en revenant à la définition de la convergence uniforme, que $(g_k)_{k\in\mathbf{N}}$ ne tend pas uniformément vers g.