Université de Rennes 1 MEEF PLC Maths
UFR Mathématiques 2023-2024

Compléments d'analyse

Deuxième contrôle (1 heure)

Partie I

Soit $\beta_1 \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et $\alpha,\beta : [0,1] \to \mathbf{R}$ de classe C^1. On suppose que $\alpha(0)=\alpha(1)=0$, $\beta(0)=-\frac{\pi}{2}$, $\beta(1)=\beta_1$ et $\beta(]0,1[) \subset]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. On note γ l'application de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}^3$ définie par

$$\gamma(t) = (\cos(\alpha(t))\cos(\beta(t)), \sin(\alpha(t))\cos(\beta(t)), \sin(\beta(t))).$$

On admet que si $t \in [0,1]$ alors

$$||\gamma'(t)||^2 = (\cos(\beta(t))\alpha'(t))^2 + (\beta'(t))^2.$$

1. Montrer

$$\int_0^1 ||\gamma'(t)||dt \geq |\beta_1 + \frac{\pi}{2}|$$

et qu'il y a égalité si et seulement si α est la fonction nulle et β est croissante.

2. Interpréter géométriquement ces résultats.

Partie II

Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels appartenant à $[-1,1]\setminus\{0\}$. Si $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$ on pose

$$A_n(x) = \frac{a_n}{n!}x^n,\ P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!}x^k \text{ et } Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{|a_k|}{k!}|x|^k.$$

1. Prouver que si $n \in \mathbf{N}^*$ alors la dérivée de la fonction polynomiale P_n vérifie

$$P_n'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{k!}x^k.$$

2. Soit $K \in \mathbf{N}^*$. Montrer que si $x \in [-K,K]$ et si $k \in \mathbf{N}$ vérifie $2K \leq k$ alors

$$|A_k(x)| = \frac{|a_k|}{k!}|x|^k \leq \frac{|a_k|}{k!}K^k \leq \frac{1}{(2K)!}K^{2K}2^{2K}\left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

3. Soit $K \in \mathbf{N}^*$. Montrer que si $x \in [-K,K]$ et si $p,q \in \mathbf{N}$ vérifient $2K \leq p < q$ alors

$$|P_q(x) - P_p(x)| \leq Q_q(x) - Q_p(x) \leq \sum_{k=p+1}^{q} \frac{1}{(2K)!}K^{2K}2^{2K}\left(\frac{1}{2}\right)^k \leq \frac{1}{(2K)!}K^{2K}2^{2K}\left(\frac{1}{2}\right)^p.$$

4. En déduire que si $K \in \mathbf{N}^*$, la série de fonctions $\sum A_n$ converge normalement sur $[-K,K]$.

5. Montrer que la suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement sur $\mathbf{R}$ vers une fonction f.

6. Montrer que la convergence vers f n'est pas uniforme.

7. Montrer que f est dérivable et que la suite $(P_n')_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement sur $\mathbf{R}$ vers f'.

Partie III Résoudre le système $x' = -x,\ y' = -y + x$ et tracer le portrait de phase associé.