Université de Rennes 1 | MEEF PLC Maths
UFR Mathématiques | 2023-2024

Compléments d'analyse
Premier contrôle (1 heure)

Partie I

On admet qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $f :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbf{R}$ dérivable tels que $f(0) = 1$ et $f'(x) = f(x)$ pour tout $x \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. En revanche on ignore l'existence de l'exponentielle. Pour répondre aux questions qui suivent on peut donc utiliser tous les résultats généraux sur les fonctions numériques d'une variable réelle continues ou dérivables mais rien sur l'exponentielle et le logarithme.

1. Montrer que si $x \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ alors $-x \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ et $f(-x) \cdot f(x) = 1$.

2. Montrer que si $x \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ alors $f(x) \neq 0$.

3. Montrer que s'il existe $g :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbf{R}$ dérivable telle que $g(0) = 1$ et $g'(x) = g(x)$ alors $g = f$.

4. Montrer que si $x, y, x+y \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ alors $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$.

5. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que la fonction f_n définie sur $]-n\varepsilon, n\varepsilon[$ par $f_n(x) = f(\frac{x}{n})^n$ est une fonction bien définie, dérivable et qui vérifie $f_n'(x) = f_n(x)$ pour tout $x \in]-n\varepsilon, n\varepsilon[$.

6. Montrer qu'il existe une unique fonction $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dérivable et telle que $F(0) = 1$ et $F'(x) = F(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

7. On admet qu'il existe $a < b$ et $g :]a, b[\to \mathbf{R}$ dérivable tels que $g'(x) = g(x)$ pour tout $x \in]a, b[$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que si $x \in]a, b[$ alors $g(x) = \lambda F(x)$.

8. Montrer que si $x, y \in \mathbf{R}$ alors $F(x+y) = F(x) \cdot F(y)$.

Partie II

Résoudre l'équation différentielle $2\sqrt{y} - y' = 0$.