L'épreuve d'analyse comporte douze questions de même poids.

M2 MEEF, Analyse — Université de Rennes 1, 2022-2023

Jeudi 15 décembre 2022, contrôle continu

Les documents et la calculatrice ne sont pas autorisés. Les réponses sont argumentées. La rédaction est soignée.

Exercice A
On considère la fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(0)=0$ et, si $x \in \mathbf{R}^*$, $f(x)=\exp(-\dfrac{1}{x^2})$.

1. Montrer que g, la restriction de f à $\mathbf{R}^*$, est infiniment dérivable.
2. Montrer qu'il existe une suite $(R_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fractions rationnelles telle que si $n \in \mathbf{N}$ alors, pour tout $x \in \mathbf{R}^*$,

$$g^{(n)}(x) = R_n(x)\exp(-\frac{1}{x^2}).$$

3. Montrer (sans passer par le logarithme) que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\exp(t)}{t} = +\infty$.

4. Montrer que si $m \in \mathbf{Z}$ alors $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\exp(t)}{t^m} = +\infty$.

5. Montrer que si $n \in \mathbf{N}$ alors $\displaystyle\lim_{x\to 0} g^{(n)}(x) = 0$.

6. Soit $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur $\mathbf{R}$, dérivable sur $\mathbf{R}^*$. Montrer que si $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} h'(x) = 0$ alors h est dérivable en 0 et $h'(0)=0$.

7. Montrer que f est infiniment dérivable sur tout $\mathbf{R}$, que si $n \in \mathbf{N}$ alors $f^{(n)}(0)=0$, mais que si $x \in \mathbf{R}^*$ alors $f(x) \neq 0$.

Exercice B Soit f une fonction bornée de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^+$.

1. Montrer qu'il existe alors $M \in \mathbf{R}^+$ tel que $M = \sup\{f(x) | x \in \mathbf{R}\}$.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite de fonctions définie par $f_n(x) = f(x)^n$ si $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$.
2. Montrer que si $M \in [0,1[$ alors $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle.
3. Montrer que si $M = 1$ alors $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers l'indicatrice de $f^{-1}(1)$.
4. Montrer que si $M = 1$ alors $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne converge uniformément vers aucune fonction.
5. Montrer que si $M > 1$ alors $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne converge simplement vers aucune fonction.