Université de Rennes 1
UFR Mathématiques

MEEF PLC Maths
2022-2023

Suites et séries de fonctions

Premier contrôle continu (1 heure)

Il est possible d'obtenir la note maximale en résolvant trois des quatre exercices.

Exercice 1. Soit $(E, \leq_E)$ et $(F, \leq_F)$ deux ensembles finis, de même cardinal et totalement ordonnés. Montrer qu'il existe une bijection strictement croissante de E dans F.

Exercice 2. Soit $r \in [0,1]$. On considère la suite numérique $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_n = r^n$, c'est à dire définie par récurrence par $u_0 = 1$ et si $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = r \times u_n$. Montrer que si $r \in [0,1[$ la suite u est convergente de limite 0 et si $r = 1$ la suite u est convergente de limite 1.

Exercice 3. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Étudier les convergences simple et uniforme de la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n$.

Exercice 4. Expliquer ce que signifie que l'ensemble des réels est archimédien.