L'épreuve d'analyse comporte cinq exercices de même poids.

M2 MEEF, Analyse — Université de Rennes 1, 2021-2022

Jeudi 16 décembre 2021, contrôle continu

Les documents et la calculatrice ne sont pas autorisés. Les réponses sont argumentées. La rédaction est soignée.

Exercice A Dire ce que signifie qu'une suite de fonctions converge simplement et dire ce que signifie qu'une suite de fonctions converge uniformément.

Exercice B Étudier suivant $a > 0$ la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie sur $[0,a]$ par $f_n(x) = x^n$ si $n \in \mathbf{N}$ et $x \in [0,a]$.

Exercice C Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $f_n(x) = \exp(-n(x-n)^2)$ si $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$.

Exercice D Calculer les rayons de convergence des séries $\sum \frac{1}{n!}x^n$, $\sum x^n$ et $\sum n!x^n$.

Exercice E Si $n \in \mathbf{N}$ on note f_n la fonction définie sur $]-1,1[$ par $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers une fonction f.
2. Montrer que si $n \in \mathbf{N}^*$ alors f_n est dérivable et ${f_n}' = f_{n-1}$.
3. Montrer que f est dérivable et vérifie $f = f'$.
4. Montrer que si $x \in]-1,1[$ alors $f(x) = \exp(x)$.