Université de Rennes 1
UFR Mathématiques

M1 MEEF PLC Maths-S1
2020-2021

Analyse 1

Programme des révisions et exercices
(archives 16-17 d'É. Jourdain)

1 Limites des suites numériques

Programme des révisions

- Qu'est-ce qu'une suite numérique ? Rappeler la définition d'une suite convergente. Donner des exemples simples, tous justifiables à l'aide de la définition.
  Rappeler la définition d'une suite divergente. Donner des exemples simples, tous justifiables à l'aide de la définition.
- Montrer qu'une suite convergente est bornée.
- Rappeler la définition de la borne supérieure d'une partie E de $\mathbf{R}$.
  Écrire (à l'aide de quantificateurs) une phrase mathématique signifiant que le réel M est la borne supérieure de la partie non vide E de $\mathbf{R}$.
  La borne supérieure de E est-elle toujours un élément de E ? Donner des exemples.
- *(CAPES 2015-première composition)*
  Démontrer que si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite croissante et non majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.
  Démontrer que si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite croissante et majorée alors elle converge.
  Établir une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite décroissante soit convergente.
- Quand dit-on que deux suites réelles sont adjacentes ?
- Énoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Exercices

Exercice 1
Étudier la nature des suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par :

$$\text{a) } u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad \text{b) } u_n = \frac{n+(-1)^n}{n+\ln(n)} \quad \text{c) } u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} \text{ pour } a > 0 \text{ et } b > 0$$
$$\text{d) } u_n = \frac{n^2+\cos(n)}{2^n+\sin(n)} \quad \text{e) } u_n = \prod_{p=2}^{n}\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

Exercice 2
(CAPES 2009, oral 2)
On considère une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ positive et la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? justifier dans chaque cas.
1) La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée.

2) Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante.
3) Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente.
4) Si la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente.

Exercice 3

Étudier la nature des suites $(u_n)_{n\geq 1}$ définies par :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} & \text{b) } u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^2+k}} & \text{c) } u_n = \displaystyle\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k! \\ \text{d) } u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} & \text{e) } u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} & \text{f) } u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \end{array}$$

Exercice 4

(CAPES 2012-Première composition)

On considère la suite $(H_n)_{n\geq 1}$ définie par $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Montrer que pour tout $k \geq 1$, $\dfrac{1}{k+1} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$. En déduire que $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$

Exercice 5

1) (d'après CAPES 2014-Oral 2) Un magazine est vendu uniquement par abonnement. Le modèle économique prévoit qu'il y ait 1800 nouveaux abonnés chaque année et que d'une année sur l'autre, 15% des abonnés ne se réabonnent pas. En 2013, il y avait 8 000 abonnés.

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de milliers d'abonnés prévus en $(2013+n)$. Expliciter une relation entre u_{n+1} et u_n puis donner l'expression de u_n en fonction de n.

2) (CAPES 2016-Oral 2) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 7$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}\ u_{n+1} = 10u_n - 18.$$

Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 6

Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} x_{n+1} & = \dfrac{1}{2}x_n + \dfrac{1}{2^n} \\ x_0 & = 1 \end{cases}$

1) Déterminer x_1, x_2, x_3 et x_4, en laissant les résultats sous forme fractionnaire.
2) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante à partir du rang $n = 1$.
3) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
4) Conjecturer l'expression générale de x_n en fonction de n et démontrer cette égalité.

Exercice 7

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.
1) Montrer que pour pour tout entier naturel n, $u_n \geq n$.
2) En déduire les variations et la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
3) Construire un algorithme qui prend en entrée un réel A strictement positif et renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > A$.

Exercice 8

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent-elles ?

a) $u_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1}\frac{1}{k}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{2n+1}$ b) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n^2}$

Exercice 9

On définit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$. Montrer que les suites $(u_{2n})_{n\geq 1}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 1}$ sont adjacentes. Conclusion ?

Exercice 10

(CAPES 2015-Première composition)

On considère la suite définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $a_{2n} - a_n \geq \frac{1}{2}$. La suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est-elle convergente ?

Exercice 11

(CAPES 2013-Première composition)

On rappelle que $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$. On se propose de démontrer que le nombre e est un nombre irrationnel. Pour cela, on fait l'hypothèse qu'il existe p et q, entiers naturels non nuls, tels que $e = \frac{p}{q}$ et on démontre que cette hypothèse conduit à une contradiction.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$. Démontrer que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes, puis montrer $u_q < e < v_q$.

Aboutir à une contradiction en multipliant les termes de cet encadrement par $q! \times q$.

Exercice 12

(CAPES 2010-Première composition)

1) Soit $p \in \mathbf{N}$. Montrer que la suite $\left(\frac{1}{2^n}\binom{n}{p}\right)_{n\geq p}$ converge vers 0.

2) Soit $(u_p)_{p\in\mathbf{N}}$ une suite réelle convergeant vers 0. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}u_p = 0$. On pourra, un réel $\varepsilon > 0$ étant donné, choisir un entier k suffisamment grand pour que $\left|\frac{1}{2^n}\sum_{p=k+1}^{n}\binom{n}{p}u_p\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Exercice 13

(CAPES 2015-Première composition)

À toute suite $(u_n)_{n\geq 1}$ on associe la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par $\forall n \geq 1,\ v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$. On dit que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge au sens de Cesàro si la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ converge.

1) Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de limite nulle et $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$.

a) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right) - \varepsilon \leq v_n \leq \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right) + \varepsilon$.

b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0.

2) Énoncer et démontrer la généralisation du résultat précédent au cas où la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers un réel l quelconque.

3) La réciproque de ce dernier résultat est-elle exacte ?

2 Limite et continuité d'une fonction

Programme des révisions

- Rappeler la définition de la limite finie d'une fonction à valeurs réelles en un point a de $\mathbf{R}$. Donner des exemples simples, tous justifiables à l'aide de la définition.
  Montrer que si la fonction f admet une limite l en a si la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers a alors la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers l. Que dire de la réciproque ?

- Rappeler les définitions des limites à l'infini d'une fonction à valeurs réelles. Comparer avec les suites. Donner des exemples simples, tous justifiables à l'aide de la définition.

- Rappeler les définitions de la continuité et de la continuité uniforme d'une fonction à valeurs réelles sur un domaine D. Comparer. Donner des exemples.

- Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires. En donner une démonstration.

- Montrer qu'une fonction à valeurs réelles continue sur un segment $[a,b]$ de $\mathbf{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

- Donner la définition d'une fonction convexe sur un intervalle I. Donner des exemples dont au moins un concernera une fonction non dérivable sur I.

Exercices

Exercice 14

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^3\sin^3(x) - x^2\cos^2(x) + x\sin(x) - 3}{x^2\cos(x)+20}$ pour $x \in [-1,4]$. Trouver deux nombres réels a, b tels que $a \leq f(x) \leq b$ pour tout x de l'intervalle $[-1,4]$.

Exercice 15

Soit $f : x \mapsto \cos(x) + x^4$ et $x_0 = \ln(5)$ (donc $1 < x_0 < 2$). On veut calculer $f(x_0)$ avec une précision de 10^{-2}.
a) Trouver un réel $\eta_1 > 0$ tel que pour tout x vérifiant $|x - x_0| < \eta_1$, on ait $|\cos(x) - \cos(x_0)| < 0,005$. On pourra utiliser la factorisation de $\cos(p) - \cos(q)$ et la majoration $|\sin(x)| \leq |x|$.
b) Trouver un réel $\eta_2 > 0$ tel que pour tout x vérifiant $|x - x_0| < \eta_2$, on ait $|x^4 - x_0^4| < 0,005$.
c) En déduire un réel $\eta > 0$ tel que pour tout x vérifiant $|x - x_0| < \eta$, on ait $|f(x) - f(x_0)| < 10^{-2}$.

Exercice 16

Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}$, admettant une période strictement positive t. Montrer que si f a une limite en $+\infty$, alors f est constante.

Exercice 17

Soit k un réel strictement positif et différent de 1. Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}$ telle que, pour tout réel x, $f(kx) = f(x)$. Montrer que si f est continue à l'origine, elle est constante.

Exercice 18

Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue. On note $E = \{x \in [a,b] | f(x) = 0\}$. Montrer que si E n'est pas vide, alors $\sup(E)$ est un élément de E.

Exercice 19

1) (CAPES 2011-Première composition ; CAPES 2014-Deuxième composition)
Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et soit f une fonction continue sur $[a,b]$, à valeurs dans [a,b].

a) Montrer que f a au moins un point fixe : il existe c dans $[a,b]$ tel que $f(c)=c$.
b) Peut-on assurer l'unicité du point fixe si on suppose f en outre strictement décroissante (respectivement strictement croissante) ?
2) Soit $f:[0,2]\to\mathbf{R}$ continue et telle que $f(0)=f(2)$. Montrer que l'équation $f(x)=f(x+1)$ a au moins une solution.

Exercice 20
(CAPES 2011-Oral 2 (sujet zéro))
Un marcheur a parcouru 10km en une heure. Existe-t-il un intervalle d'une demi-heure pendant lequel il a parcouru exactement 5km ? Voici comment on se propose de résoudre ce problème :
Pour t appartenant à l'intervalle $[0,1]$, on désigne par $f(t)$ la distance, en kilomètres, parcourue à l'instant t, en heures. Il est naturel de faire l'hypothèse que f est une fonction continue sur $[0,1]$.
1) Préciser $f(0)$ et $f(1)$. Écrire l'équation traduisant le problème.
2) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0,1]$ par $g(t)=f(t+\frac{1}{2})-f(t)$. Démontrer que l'équation $g(t)=5$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0,\frac{1}{2}]$. Conclure.

Exercice 21
Soit $f:]a,b[\to\mathbf{R}$ continue. On suppose que f admet la même limite finie l en a et b. Montrer que f n'est pas injective sur $]a,b[$.

Exercice 22
(d'après CAPES 1993)
Soit $f:[0,+\infty[\to\mathbf{R}$ continue et ayant une limite finie l en $+\infty$. Montrer que f est bornée sur $[0,+\infty[$ et atteint au moins une de ses bornes.

Exercice 23
Soit $f:[0,+\infty[\to\mathbf{R}$ continue telle que pour tout $x>0$, $|f(x)|<x$. Calculer $f(0)$. Montrer qu'à tout couple (a,b) de réels vérifiant $0<a<b$, on peut associer un nombre k de $]0,1[$ tel que, pour tout x de $]a,b[$, $|f(x)|\leq kx$. Est-ce vrai pour les couples $(0,b)$?

Exercice 24
(CAPES 2012-Première composition)
1) Montrer que pour tous réels x et y on a $||y|-|x||\leq|y-x|$. En déduire que $f:x\mapsto\frac{1}{1+|x|}$ est uniformément continue sur $\mathbf{R}$.
2) Montrer que pour tous réels positifs x et y on a $\sqrt{x+y}\leq\sqrt{x}+\sqrt{y}$ et $|\sqrt{x}-\sqrt{y}|\leq\sqrt{|x-y|}$. En déduire que $g:x\mapsto\sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbf{R}^+$.

Exercice 25
(CAPES 2014ex-Première composition)
Soient a et b deux réels tels que $a<b$ et f une fonction continue sur $[a,b]$. Pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, pour tout $k\in\{0,...,n\}$, on pose : $x_k=a+k\frac{b-a}{n}$.
1) Démontrer que :

$$\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0,\forall(x,y)\in[a,b]^2,|x-y|\leq\eta\Rightarrow|f(x)-f(y)|\leq\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

2) Soit ε un réel strictement positif. Démontrer qu'il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, \forall k \in \{0,...,n-1\}, \forall t \in [x_k, x_{k+1}], |f(t)-f(x_k)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Exercice 26

(CAPES 2012-Première composition)

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbf{R}$ uniformément continue.

On se propose de montrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbf{R}^+$: $f(x) \leq ax+b$.

1) Justifier l'existence d'un réel η_1 strictement positif tel que :

$$\forall (x,y) \in (\mathbf{R}^+)^2, (|x-y| \leq \eta_1 \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq 1).$$

Soit $x_0 \in \mathbf{R}^+$.

2) Soit n_0 le plus petit entier tel que $\dfrac{x_0}{n_0} \leq \eta_1$; justifier l'existence de n_0 et exprimer n_0 en fonction de x_0 et de η_1.

3) Montrer que $|f(x_0)-f(0)| \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{n_0-1} \left| f\left(\frac{(k+1)x_0}{n_0}\right) - f\left(\frac{kx_0}{n_0}\right)\right| 6.$

4) Conclure.

Exercice 27

1)a) Montrer que les fonctions $f : x \mapsto e^{-x}$ et $g : x \mapsto |x|$ sont convexes sur $\mathbf{R}$.

b) Soit $h : x \mapsto e^{-|x|}$. Vérifier que $h(0) > \frac{1}{2}(h(1)+h(-1))$. La fonction h est-elle convexe sur $\mathbf{R}$?

2) Soient $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ convexes. On pose $h = f \circ g$.

a) Peut-on affirmer que h est convexe sur $\mathbf{R}$?

b) On suppose en outre f croissante sur $\mathbf{R}$. Montrer que h est convexe sur $\mathbf{R}$.

Exercice 28

(CAPES 2013-Première composition)

On considère une fonction f convexe sur un intervalle I, $(x_1,...,x_n) \in I^n$, $(\lambda_1,...,\lambda_n) \in \mathbf{R}_+^n$, avec $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$.

Démontrer que : $f\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$. On pourra procéder par récurrence sur n en remarquant que si $\lambda_n \neq 1$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \lambda_n x_n + (a-\lambda_n)\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_n} x_k\right)$.

Exercice 29

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction convexe et bornée.

1) Soit a un réel quelconque. On pose $g_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

a) Montrer que g_a est croissante sur l'intervalle $]a,+\infty[$ (on pourra, pour $a < x < y$, écrire x sous la forme $x = ta+(1-t)y$, pour un t convenablement choisi).

Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} g_a(x) = 0$.

b) En déduire que f est décroissante sur $\mathbf{R}$.

2) Montrer que $\hat{f} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto f(-x)$ est aussi convexe et bornée. Qu'en déduit-on pour f ?

3) Énoncer un résultat résumant cet exercice.

3 Dérivabilité

Programme des révisions

- Rappeler la définition de la dérivabilité d'une fonction à valeurs réelles en un point a de $\mathbf{R}$.
  Donner des exemples simples, tous justifiables à l'aide de la définition.
  Donner une autre définition, équivalente à la première. Interpréter graphiquement.
- Rappeler la formule de Leibniz de dérivation à l'ordre n d'un produit de fonctions. Démontrer cette formule en utilisant un raisonnement par récurrence.
- Rappeler ce qu'est une fonction de classe C^k sur un intervalle. Donner un exemple de fonction dérivable sur un intervalle mais qui n'est pas de classe C^1.
- Énoncer le théorème de Rolle *(CAPES 2016-première composition)*. En proposer une démonstration. Donner des exemples simples montrant l'importance des hypothèses de ce théorème.
- *(CAPES 2016-première composition)* On suppose que $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ est n fois dérivable sur $[a,b]$ et s'annule en au moins $n+1$ points distincts de $[a,b]$. Montrer que la fonction dérivée n-ième $g^{(n)}$ s'annule en au moins un point de $[a,b]$.
- Rappeler le théorème des accroissements finis. En donner une démonstration. Appliquer ce théorème à une fonction trinôme du second degré. Quelle propriété géométrique en déduit-on ?

Exercices

Exercice 30

Pour tout réel λ, $-1 \leq \lambda \leq 1$, on considère la fonction f_λ donnée par $f_\lambda(x) = \ln(x^2 - 2\lambda x + 1)$. Soit C_λ la courbe représentative de f_λ dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer suivant les valeurs de λ l'ensemble de définition de f_λ et montrer que la droite d'équation $x = \lambda$ est un axe de symétrie pour C_λ.

Par quelle transformation géométrique simple peut-on déduire $C_{-\lambda}$ de C_λ ?

2) Étudier, en discutant suivant les valeurs de λ, la fonction f_λ. On précisera les variations, les limites aux bornes de l'ensemble d'étude et les branches infinies éventuelles.

3) Soit M_0 un point du plan de coordonnées (x_0, y_0). Combien de courbes C_λ passent par M_0 ?

Exercice 31

Soit $f :]a,b[\to \mathbf{R}$ une fonction continue qui ne s'annule pas sur $]a,b[$. Montrer que si la fonction carrée f^2 est dérivable, il en est de même de f.

Exercice 32

(CAPES 2011-Première composition)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I d'intérieur non vide et soit $(a,b) \in I^2$ avec $a < b$. On suppose $f'(a) < f'(b)$ et on considère $\lambda \in]f'(a), f'(b)[$. Soit g la fonction définie sur I par $g(x) = f(x) - \lambda x$.

1) Justifier l'existence d'un $c \in [a,b]$ tel que $g(c) = \inf_{x \in [a,b]} g(x)$ et montrer que $c \notin \{a,b\}$.

2) En déduire que f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.

3) Donner alors un exemple de fonction définie sur $\mathbf{R}$ ne possédant pas de primitive sur $\mathbf{R}$.

Exercice 33

1) Soit $\alpha > 0$. À l'aide du théorème des accroissements finis appliqué à $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$, montrer que pour tout n de $\mathbf{N} \setminus \{0,1\}$, $\frac{1}{n^{1+\alpha}} < \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}\right)$.
2) En déduire que la suite donnée par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ converge pour $\alpha > 1$.

Exercice 34
On définit la fonction f de la variable réelle x par $f(x) = x + 2x^2 \sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
1) Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}$.
2) À l'aide de la définition de la dérivée, montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 1$.
3) Peut-on en déduire que f est croissante près de 0 ?
4) Montrer que sur tout intervalle $[-\alpha, \alpha]$ il existe des points où f' vaut 1 et des points où f' vaut -1.
5) Qu'en déduit-on du point de vue de la monotonie de f au voisinage de 0 ?

4 Formules de Taylor et développements limités

Programme des révisions

- Énoncer le théorème de Taylor-Lagrange. En proposer une démonstration. De quel théorème est-il la généralisation ?
- Rappeler le théorème de Taylor avec reste intégral. En proposer une démonstration *(CAPES 2016-première composition)*.
- Rappeler la formule de Taylor-Young. En proposer une démonstration.
- Quelles différences y a-t-il entre ces trois formules ?
- Donner un exemple de fonction non identiquement nulle, de classe C^∞, dont toutes les dérivées sont nulles en 0.
- Rappeler la définition du développement limité d'une fonction f au voisinage de 0. Retrouver les exemples classiques.
- Jusqu'à quel ordre la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x^\pi & \text{si } x > 0 \end{cases}$ admet-elle un développement limité en 0 ?

Exercices

Exercice 35
Soit $f : [-1,1] \to \mathbf{R}$ de classe C^2 telle que $f(-1) = f(1) = 0$. Montrer que, pour tout α de $]-1,1[$, il existe un polynôme P de degré ≤ 2 tel que la fonction $g = f + P$ s'annule en -1, 1 et α. En déduire que $f(\alpha) = \frac{\alpha^2 - 1}{2} f''(c)$ où $c \in]-1,1[$, puis que :

$$\sup_{x \in [-1,1]} |f(x)| \leq \frac{1}{2} \sup_{x \in [-1,1]} |f''(x)|.$$

Exercice 36
Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbf{R}$, de classe C^2 sur $\mathbf{R}$. On suppose que $f(0) = f'(0) = 0$. On pose

$g(x) \begin{cases} f(\sqrt{x}) & \text{si } x \geq 0 \\ f(-\sqrt{-x}) & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1) Vérifier que g est de classe C^1 sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

2) Vérifier que g est continue sur $\mathbf{R}$.

3) Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} g'(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} g'(x)$.

4) Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur $f''(0)$, pour que g soit de classe C^1 sur $\mathbf{R}$.

Exercice 37

(CAPES 2000)

Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $L_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $t \mapsto \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(t^2-1)^n$. Montrer que $L_n(1) = 2^n n!$ et calculer $L_n(-1)$.

Exercice 38

(d'après CAPES 2002)

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable solution sur $\mathbf{R}$ de l'équation $f(x) = xf'(\frac{x}{2})$.

1) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$.

2) On suppose en outre f de classe C^n ($n \in \mathbf{N}, n \geq 2$). En utilisant la formule de Taylor-Young, montrer que, pour tout entier p compris entre 1 et n, on a : $f^{(p)}(0) = 0$ ou $p2^{1-p} = 1$.

Exercice 39

(CAPES 1991)

Soit f une fonction positive, de classe C^2 sur $\mathbf{R}$ et telle que f'' soit bornée sur $\mathbf{R}$.

1) On note $M = \sup\limits_{x \in \mathbf{R}} |f''(x)|$.

a) Montrer, en appliquant la formule de Taylor avec reste de Lagrange à la fonction f que, pour tout couple de réels (x, λ) on a $f(x) + \lambda f'(x) + \dfrac{\lambda^2}{2} M \geq 0$.

b) En déduire que pour tout réel x on a : $|f'(x)| \leq \sqrt{2M.f(x)}$.

2) Soit x_0 un réel tel que $f(x_0) = 0$. On pose $g = \sqrt{f}$.

a) Montrer que pour tout réel x, $x \neq x_0$, il existe un réel c compris entre x_0 et x tel que : $f(x) = \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(c)$ (on pourra commencer par remarquer que $f'(x_0) = 0$).

b) En déduire que si $f''(x_0) > 0$, g n'est pas dérivable en x_0.

Exercice 40

1) Soient f une fonction convexe et dérivable sur un intervalle I et $a, x \in I$.

Montrer que $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$. Quelle interprétation géométrique peut-on donner de cette inégalité ?

2) Soit $x > 0$. On pose $f(x) = \dfrac{1}{x}$. On rappelle que par définition $\ln(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)dt$. En utilisant la convexité de f sur $[1, 2]$ majorer $\ln(2)$ par la surface d'un trapèze. En appliquant le 1) à la fonction f, pour $a = 2$, minorer $\ln(3)$ par la surface d'un trapèze. En déduire que $e \in]2, 3[$ (e est défini par $\ln(e) = 1$)

Exercice 41

Soit $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de classe C^2 ; on suppose que φ et φ'' sont bornées sur $\mathbf{R}$ et on pose :

$$M_0 = \sup_{x \in \mathbf{R}} |\varphi(x)| \text{ et } M_2 = \sup_{x \in \mathbf{R}} |\varphi''(x)|$$

Montrer que pour tout réel x et tout réel $a > 0$, $|\varphi'(x)| \leq \dfrac{M_0}{a} + \dfrac{aM2}{2}$.

En déduire que φ' est bornée sur $\mathbf{R}$ et que : $M_1 = \sup_{x\in\mathbf{R}} |\varphi'(x)| \leq \sqrt{2M_0M_2}$.

Exercice 42

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de classe C^3. Pour k dans $\{0,1,2,3\}$, on note $M_k = \sup_{x\in\mathbf{R}} |f^{(k)}(x)|$. On suppose que M_0 et M_3 sont finis.

1) Soient x un réel et $h > 0$.

a) Écrire les formules de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 au voisinage de x d'une part pour un accroissement $+h$ et d'autre part pour un accroissement $-h$.

b) Résoudre le système linéaire d'inconnues $f'(x)$ et $f''(x)$ ainsi obtenu et en déduire :

$$|f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + h^2\frac{M_3}{6} \text{ et } |f''(x)| \leq \frac{4M_0}{h^2} + h\frac{M_3}{3}.$$

2) Montrer que M_1 et M_2 sont finis.

3) En déduire l'existence de constantes C_1 et C_2 (que l'on déterminera) telles que :

$$M_1 \leq C_1\sqrt[3]{M_0^2M_3} \text{ et } M_2 \leq C_2\sqrt[3]{M_0M_3^2}.$$

Exercice 43

On pose $v_n = 2^n \sin(\frac{\pi}{2^n})$, pour $n \in \mathbf{N}$.

1) Montrer que $|\pi - v_n| \leq \frac{\pi^3}{6\times 4^n}$ (on pourra utiliser la formule de Taylor-Lagrange pour sinus en 0).

2) Montrer de même que $|\pi - v_n - \frac{\pi^3}{6\times 4^n}| \leq \frac{\pi^5}{120\times 4^{2n}}$.

3) Soit λ un nombre réel. On pose $w_n = \lambda v_{n+1} + (1-\lambda)v_n$. Déterminer le réel λ pour que l'on ait, pour tout $n \in \mathbf{N}$: $|\pi - w_n| \leq \frac{K}{4^{2n}}$, où K est une constante, que l'on précisera.

5 Suites définies par récurrence, théorèmes de point fixe

Programme des révisions

- Énoncer le théorème du point fixe et son application à l'étude des suites récurrentes.
  Donner une démonstration de ce théorème. Illustrer graphiquement.
  Peut-on utiliser ce résultat pour l'étude de la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n - 1}$?

- Rappeler les méthodes d'étude d'une suite récurrente à valeurs dans $\mathbf{R}$ définie par la donnée de u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$, en fonction de la monotonie de la fonction f.

Exercices

Exercice 44

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dérivable. On suppose qu'il existe $k \in]0,1[$ telle que, pour tout x : $|f'(x)| \leq k$. Montrer que f a un unique point fixe (on montrera que $g : x \mapsto f(x) - x$ est une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$). Vérifier que $h : x \mapsto 1 + \ln(\cosh(x))$ vérifie $|h'(x)| < 1$ sur $\mathbf{R}$ mais que h n'a pas de point fixe.

Exercice 45

(CAPES 2014-Deuxième composition)

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, on désigne par I l'intervalle $[a,b]$. On considère une fonction $f : I \to \mathbf{R}$ contractante, de coefficient de contraction γ. On suppose que l'intervalle I est stable par f.

1) Démontrer que f est continue sur I.

2) On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Quelle hypothèse permet d'assurer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bien définie ?

b) Démontrer que : $\forall (n,p) \in \mathbf{N}^2, |u_{n+p} - u_n| \leq \sum\limits_{j=n}^{n+p-1} \gamma^j |u_1 - u_0|$ et en déduire que :

$$\forall (n,p) \in \mathbf{N}^2, |u_{n+p} - u_n| \leq \frac{\gamma^n}{1-\gamma}|u_1 - u_0|.$$

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente dans I.

3) Démontrer que la fonction f admet un point fixe unique dans I.

Exercice 46

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+2}$. On définie une suite récurrente par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \in \mathbf{N}$.

1) Établir l'inégalité $|f(x) - f(y)| \leq \frac{3}{4}|x-y|$.

2) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Que dire de la limite l ?

3) Trouver $N \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geq N$ on ait $|u_n - l| \leq 10^{-5}$.

Exercice 47

(CAPES 2008-Oral 2)

1) On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$.

a) Résoudre l'équation $f(x) = x$.

b) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a $f(x) \geq x$.

2) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par la donnée de son premier terme $u_0 \in [0,1]$ et par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 48

(CAPES 2010-Oral 2)

Soit a un réel. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = a$ et, pour tout entier n :

$$u_{n+1} = u_n(2 - u_n).$$

1) Étudier les cas $a = 0$, $a = 1$ et $a = 2$.

Dans toute la suite, on suppose que $a \in]0;1[$.

2) Étudier les variations de la fonction f définie sur $[0;1]$ par : $f(x) = x(2-x)$.

3) Montrer que, pour tout entier n, on a : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

4) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 49

Étudier les suites récurrentes définies par

$$1)\ u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}, \quad 2)\ u_0 \in \mathbf{R} \text{ et } u_{n+1} = -u_n^2 + 2u_n,$$
$$3)\ u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n^2}, \quad 4)\ u_0 \in [0,1] \text{ et } u_{n+1} = 1 - {u_n}^2.$$

Exercice 50

(CAPES 1995)

On définit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par $a_0 = a \geq 0$, $b_0 = b \geq 0$ ($b \neq a$), $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ et $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$.

1) Montrer que $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante, $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ décroissante, et que pour tout $n \geq 1$ on a $b_n < a_n$.

2) Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont deux suites adjacentes.

3) Que se passe-t-il si $a = b$?

Exercice 51

1) Soit g la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $g(x) = x - 2 - \ln(x)$. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution dans l'intervalle $[3,4]$. Dans toute la suite, on appelle l cette solution.

2) Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x) = 2 + \ln(x)$. Montrer que la donnée $u_0 = 3$ et la relation

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = 2 + \ln(u_n)$$

définissent bien une suite de nombres réels. Montrer que pour tout entier n, $3 \leq u_n \leq 4$.

3) Montrer que pour tout entier n, $\frac{|u_0 - l|}{4^n} \leq |u_n - l| \leq \frac{|u_0 - l|}{3^n}$ (on pourra utiliser le théorème des accroissements finis). Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$?

Dans la suite de l'exercice, on applique la méthode de Newton pour la résolution de l'équation $g(x) = 0$, ce qui conduit à considérer la fonction Φ définie pour $x > 1$ par

$$\Phi(x) = \frac{x(1 + \ln(x))}{x - 1}.$$

4) Montrer que $\Phi(l) = l$. Calculer $\Phi'(x)$ et montrer que $\Phi'(l) = 0$. Étudier les variations de Φ.

5) Montrer que la donnée $v_0 = 4$ et la relation $\forall n \in \mathbf{N}$, $v_{n+1} = \Phi(v_n)$ définissent bien une suite de nombres réels. Montrer que pour tout entier n, $v_n \leq 4$, et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers l.

6) Calculer $\Phi''(x)$. En écrivant $\Phi''(x)$ sous la forme $\frac{A(x)}{x(x-1)^3}$, à l'aide de majorations très simples, montrer que pour tout x de l'intervalle $[3,4]$, $|\Phi''(x)| \leq 2$.

7) Soit $v \geq l$ un nombre réel. Écrire la formule de Taylor-Lagrange, à l'ordre 1, pour la fonction Φ entre l et v. En déduire que pour tout entier n, $|v_{n+1} - l| \leq |v_n - l|^2$.