Université de Rennes 1
UFR Mathématiques

M1 MEEF PLC Maths - S1
2020-2021

Analyse - Résumé des séances

03/09. Les suites numériques et la convergence de telles suites sont définies. L'étude de la convergence éventuelle de suites classiques est réalisée. En particulier une étude détaillée des suites $(n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(1/(n+1))_{n\in\mathbf{N}}$, $(2^n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(1/2^n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(\lambda)_{n\in\mathbf{N}}$ où $\lambda \in \mathbf{R}$, $(a^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est faite. C'est aussi l'occasion de montrer que si $a > 1$ et si $n \in \mathbf{N}$ alors $a^n \geq n(a-1)$.

Des solutions des exercices 1, 2, 3, 4, 5 et 6 sont mises en ligne.

10/09. L'ensemble des points constituant la première des cinq parties des compléments d'analyse est projeté et commenté. Les inégalités $2^n > n$, $n \in \mathbf{N}$ sont l'occasion de réfléchir sur la notion de cardinalité pour les ensembles finis ou infinis et d'expliquer comment on démontre que $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}^2$, $\mathbf{Z}\times\mathbf{N}$ et $\mathbf{Q}$ ont mêmes cardinal (c'est dire qu'il existe des bijections des uns vers les autres) et pourquoi il n'existe pas de bijection de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$ (par l'argument diagonal de Cantor).

Des solutions des exercices 7, 8, 9 ,10, 11, 12 et 13 sont mises en ligne. C'est le cas aussi de la partie 1 des compléments d'analyse.

22/09. Une version provisoire de l'ensemble des compléments d'Analyse est en ligne. Il est discuté de l'intérêt d'introduire la notion de point d'adhérence d'un sous-ensemble de $\mathbf{R}$ lorsqu'on veut définir de façon générale la notion de limite. Il est montré par un raisonnement par l'absurde le résultat suivant : *Soit $f : D \to \mathbf{R}$ et $a \in \mathbf{R}$ tel que pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in D^{\mathbf{N}}$ qui converge vers a la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbf{N}} \in D^{\mathbf{N}}$ possède une limite finie ou infinie. Alors s'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in D^{\mathbf{N}}$ qui converge vers a telle que la suite $(f(a_n))_{n\in\mathbf{N}} \in D^{\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$ alors $\lim_a f$ existe et vaut $+\infty$.* Ceci complète la preuve de la Proposition 14 (Caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction) des compléments en ligne. Les exercices 9 et 14 sont résolus en partie.

Des solutions des exercices 14, 15, 16, 17, 18, 19 , 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28 et 29 sont mises en ligne. C'est le cas aussi de la partie 1 des compléments d'analyse. Le premier contrôle continu d'Analyse-Probabilités aura lieu le lundi 12 octobre à 8h. L'épreuve dure 100 minutes et est formée d'une partie Analyse et une partie Probabilités d'importance égale.

01/10. Les exercices 15, 16, 19 (question 1), 20 et 31 sont corrigés au tableau grâce à l'intervention de personnes assistant à la séance.

Les cinq parties des compléments d'analyse sont en ligne dans une version toujours provisoire.

05/10. Les exercices 9, 18, 19 (question 2), 24 et 28 sont corrigés au tableau grâce à l'intervention de personnes assistant à la séance. Lors de la correction de l'exercice il est signalé que la démonstration proposée sous-entend que si $x_1,\ldots,x_n$ appartiennent à un intervalle I de $\mathbf{R}$ et si $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ sont des réels positifs dont la somme vaut 1 alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ appartient à I. Ce résultat peut être établi de la façon suivante. On note m le plus petit des $x_k, 1 \leq k \leq n$ et M le plus grand : $m, M \in I$ et comme I est un intervalle $[m,M] \subset I$. Alors pour tout k entier compris entre 1 et n on a $m \leq x_k \leq M$ et, puisque $\lambda_k \geq 0$ on a aussi $\lambda_k m \leq \lambda_k x_k \leq \lambda_k M$. En sommant sur k compris entre 1 et n et en utilisant $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ il vient

$$m = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) m = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k m \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k M \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) M = M$$

et donc on a bien $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in [m, M] \subset I$.

Il est indiqué que la séance du 06/10 aura lieu de 10h15 à 12h15 sauf pour les personnes qui auraient une nécessité impérieuse d'abréger au début ou à la fin.

06/10. Les exercices 25, 26, 27 et 29 sont corrigés au tableau grâce à l'intervention de personnes assistant à la séance. La propriété de stabilité des intervalles par des combinaisons linéaires à coefficients positifs et de somme égale à 1 (voir ci-dessus) est donnée.

15/10. Le contrôle continu du 12/10 est corrigé à la tablette vidéo-projetée et visible à distance. Les exercices 32 et 33 (question 1), sont corrigés, à la tablette pour le premier et au tableau pour le second, grâce à l'intervention de personnes assistant à la séance.

L'espace documentaire associé à Analyse 1 (`https://perso.univ-rennes1.fr/jean-marie.lion/314capes`) est aussi accessible via Moodle (`https://foad.univ-rennes1.fr/` puis en suivant le chemin Mathématiques/Master MEEF/Prépa CAPES/Analyse 1 (semestre 1)).

Les notes écrites en cours avec la tablette sont accessibles dans l'espace documentaire dans le répertoire appelé en-direct-de-la-salle-305/.

22/10. Le contrôle continu du 12/10 est remis aux personnes présentes. Les exercices 33, question 2, 34 et 35 sont corrigés, à la tablette, grâce à l'intervention de personnes assistant à la séance (33 et 34).

Les notes écrites en cours avec la tablette sont accessibles dans l'espace documentaire dans le répertoire appelé en-direct-de-la-salle-305/.

02/11. La séance est entièrement à distance. Les exercices 36, 37 et 43 sont corrigés à la tablette.

Les notes écrites en cours avec la tablette sont accessibles dans l'espace documentaire dans le répertoire appelé en-direct-de-la-salle-305/.

05/11. La séance est entièrement à distance. Elle débute par une question d'échauffement. Il s'agit de donner une condition pour que, étant donnés a, b, c, u réels tels que $a > 0$, pour tout x réel vérifiant $x \geq u$ on ait $ax^2 + bx + c > 0$. Trois réponses sont données. La première est une condition suffisante qui porte sur le discriminant du polynôme P défini par $P(x) = ax^2 + x + c$, la seconde est une condition nécessaire et suffisante qui porte sur la position de u par rapport à la plus grande des racines de ce polynôme et la dernière est une condition nécessaire et suffisante qui porte sur la valeur $P(u)$ et sur le positionnement de u par rapport au positionnement de u par rapport au milieu des racines éventuelles de P. L'intérêt de la dernière condition est qu'elle ne fait pas intervenir le calcul d'une racine carrée, elle engendre donc des calculs plus simples que la seconde, elle est aussi plus précise que la première car c'est une condition nécessaire et suffisante. Une variante de la troisième condition, non abordée dans la séance, est une condition nécessaire est suffisante qui porte sur le calcul de la valeur $P(u)$ et la valeur $P'(u)$. L'exercice 46 est corrigé.

Les notes écrites en cours avec la tablette sont accessibles dans l'espace documentaire dans le répertoire appelé en-direct-de-la-salle-305/.

09/11. La séance est entièrement à distance. Elle est consacrée à la correction des exercices qui étaient à rédiger pendant les vacances.

Les notes écrites en cours avec la tablette sont accessibles dans l'espace documentaire dans le répertoire appelé en-direct-de-la-salle-305/.

12/11. La séance est entièrement à distance. Elle est consacrée à la correction des exercices 44, 47 et

50. Au début de séance l'exercice 41 est évoqué mais l'auditoire est aussi invité à regarder le corrigé en ligne de cet exercice pour les détails et la partie du document en ligne "2020-2021-m1-capes-analyse-questions-reponses.pdf" qui lui est consacrée. Une interprétation physique de l'exercice est donnée en séance. Il est dit que l'objet de l'exercice est de montrer qu'un objet en mouvement rectiligne dans un intervalle $[-M_0, M_0]$ et qui obéit à des accélérations et à des décélérations majorée par M_2 a une vitesse maximale majorée par $\sqrt{2M_0M_2}$. Pour donner un peu plus de consistance à cette interprétation physique on peut considérer un objet qui à l'instant $t = 0$ se trouve en $x(0) = -M_0$ à une vitesse $v(0) = 0$ et qui subit une accélération constante égale à M_2 pendant une durée T puis une décélération égale à M_2 pendant une durée aussi égale à T. Ainsi, la vitesse de l'objet vérifie $v(t) = M_2t$ si $t \in [0,T]$ et $v(t) = M_2(2T - t)$ si $t \in [T,2T]$ et sa position vérifie $x(t) = -M_0 + \frac{1}{2}M_2t^2$ si $t \in [0,T]$ et $x(t) = -M_0 + M_2T^2 - \frac{1}{2}M_2(2T - t)^2$ si $t \in [T,2T]$. En $t = 2T$ l'objet se trouve en $x(2T) = -M_0 + M_2T^2$ et en $t \in [0,2T]$ l'objet se trouve dans $[-M_0, -M_0 + M_2T^2]$. En prenant $T = \sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}$ alors l'objet parcourt l'intervalle $[-M_0, M_0]$, sa vitesse est nulle en $t = 0$ et $t = 2T$ et elle est maximale en $t = T$. Elle vaut alors $v(T) = M_2T = M_2\sqrt{\frac{2M_0}{M_2}} = \sqrt{2M_0M_2}$. Ouf, l'analyse conforte l'intuition physique et celle-ci permet de trouver un mouvement restreint à un segment, à accélération et décélération bornées et dont la vitesse atteint le maximum que l'analyse prévoit !

Les notes écrites en cours avec la tablette sont accessibles dans l'espace documentaire dans le répertoire appelé en-direct-de-la-salle-305/.

26/11. La séance est entièrement à distance. Elle est consacrée à la correction par des étudiants et étudiantes d'exercices parmi les 42 envoyés le 14/11. Les exercices 1, 8, 14, 24, 33, 37 et 41 sont corrigés.

Les notes écrites en cours avec la tablette sont accessibles dans l'espace documentaire dans le répertoire appelé en-direct-de-la-salle-305/.

07/12. La séance est entièrement à distance. Elle est consacrée en partie à la correction par des étudiants et étudiantes d'exercices parmi les 42 envoyés le 14/11. Les exercices 4, 27, 38, 16 sont corrigés. Le 16 est l'occasion de donner des précisions sur les compacts de $\mathbf{R}$ et d'en donner quelques exemples dont le triadique de Cantor. L'exercice 12 de la feuille d'exercices classique (celle qui en compte 51) est corrigé.

Des précisions sont données sur le contrôle continu du 18 décembre. Il dure 5 heures et il compte une partie analyse et une partie probabilités d'importance égale. La partie analyse compte cinq exercices mais pour avoir la note maximale dans cette partie il suffit d'en traiter parfaitement quatre. Plus précisément chaque exercice est affecté d'un poids différent qui peut être 8, 6, 4, 2 ou 0 et ce poids est d'autant plus important que la candidate ou le candidat a réussi l'exercice. Dans un premier exercice il est demandé d'énoncer et de prouver une des trois formules de Taylor classiques, d'établir une formule classique sur les suites géométriques et de calculer un développement limite à l'ordre 5 d'une fonction classique. Dans un deuxième exercice on étudie les points de continuité et ceux de discontinuité d'une fonction très singulière. Les troisième et quatrième exercices sont consacrés à l'étude de suites à valeurs dans $\mathbf{N}$. Le dernier exercice est une étude du nombre de zéros de certains polynômes.

Les notes écrites en cours avec la tablette sont accessibles dans l'espace documentaire dans le répertoire appelé en-direct-de-la-salle-305/.

04/01. Cette séance qui termine l'enseignement d'Analyse 1 est entièrement à distance. Elle est consacrée à la correction du contrôle continu de décembre. Un corrigé est mis en ligne. Au cours de la séance, des commentaires sont apportés sur chaque exercice de l'épreuve et des preuves qui peuvent différentes de celles du corrigé sont proposées.

Les notes écrites en cours avec la tablette sont accessibles dans l'espace documentaire dans le répertoire appelé en-direct-de-la-salle-305/.