Analyse - Questions-réponses

Exercice 3

Question

Dans la correction il est écrit que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$ et qu'on reconnaît une somme de Riemann associée à l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$, ce qui donne $\ln(2)$. Qu'est-ce qui permet d'enlever le $\frac{1}{n}$?

Réponse

Pour répondre il faut dans un premier temps revenir à la définition d'une somme de Riemann d'une fonction continue f sur un segment $[a,b]$. Je vais considérer seulement le cas des subdivisions régulières. L'idée est d'approximer l'aire définie à partir du graphe de la courbe représentant f sur $[a,b]$ par la somme $S(f,n)$ des aires de n rectangles de largeur $\frac{(b-a)}{n}$ et de hauteurs $f(a)$, $f(a+\frac{(b-a)}{n})$,...,$f(a+k\frac{(b-a)}{n})$,...,$f(a+(n-1)\frac{(b-a)}{n})$:

$$S(f,n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)}{n} f(a+k\frac{(b-a)}{n})$$

qui s'écrit aussi

$$S(f,n) = \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{(b-a)}{n}).$$

La théorie des intégrales de Riemann dit (établit, montre) que lorsque n tend vers $+\infty$ alors $S(f,n)$ a une limite finie. Cette limite est la définition précise de l'aire définie à partir du graphe de la courbe représentant f sur $[a,b]$ c'est à dire de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ de f entre a et b.

Dans l'exercice la fonction f est définie par $f(x) = \frac{1}{1+x}$ et le segment $[a,b]$ est le segment $[0,1]$.

On a

$$S(f,n) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+k\frac{1}{n}}$$

c'est à dire

$$S(f,n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \frac{1}{\frac{k}{n}+1}$$

ou encore

$$S(f,n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n}$$

et donc

$$S(f,n) = u_n.$$

Ainsi, puisque $\lim_{n\to+\infty} S(n,f)$ vaut l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$ c'est à dire $\ln(2)$, et que $S(f,n) = u_n$, on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln(2)$.

Exercice 10

Question

Pourquoi $a_{2n} - a_n =$ somme de $k = n+1$ à $2n$ de $1/k \geq$ somme de $k = n+1$ à $2n$ de $1/2n = 1/2$?

Réponse

On a

$a_n = 1 + 1/2 + ... + 1/n$

et

$a_{2n} = 1 + 1/2 + ... + 1/n + 1/(n+1) + ... + 1/(2n)$

La différence vaut

$a_{2n} - a_n = 1/(n+1) + ... + 1/(2n)$

Cette différence est formée de n termes positifs qui sont de la forme $1/k$ avec k qui varie entre $n+1$ et $2n$. Il y a bien n termes (par exemple si $n = 10$ alors k varie entre 11 et 20 et ça fait bien 10 termes). Lorsque k varie entre $n+1$ et $2n$, le nombre k est toujours inférieur ou égal à $2n$ donc son inverse, $1/k$, est toujours supérieur ou égal à $1/(2n)$. Ainsi $a_{2n} - a_n$ est la somme de n termes tous supérieurs ou égaux à $1/n$, donc cette somme est supérieure ou égale à n fois $1/2n$ c'est à dire à $1/2$.

Exercice 15

Question

Dans les préliminaires de l'exercice 15, on comprend la partie calculatoire mais comment trouver ces inégalités :

- avec les x et y pour déterminer que $\ln(5) > 1$

- avec $n+1$ et x pour déterminer qui $\ln(5) < 2$

C'est avec le graphique ?

Réponse

J'essaie d'expliquer les idées qui ont précédé les calculs.

Le préliminaire a pour objectif d'encadrer $\ln(5)$. Comme je sais que c'est l'aire entre l'axe des abscisses et le graphe de $1/x$ entre $x = 1$ et $x = 5$ j'ai choisi d'encadrer cette aire par des figures géométriques simples. De quelles figures je dispose ? Essentiellement des rectangles, des triangles et des trapèzes. Ces figures correspondent à des fonctions constantes par morceau ou dites aussi en escaliers pour les rectangles, ou affines par morceau pour les triangles et trapèzes.

Je vais donc dans un premier temps tenter de remplir le domaine dont je veux mesurer l'aire par de telles figures pour minimiser l'aire étudiée par l'aire totale de ces figures. La figure que je retiens un un trapèze dont un côté est la tangente au graphe au point d'abscisse 3 (3 étant le milieu de $[1,5]$). C'est a priori un candidat raisonnable car les tangentes sont "proches des courbes" et comme ici la fonction est convexe le graphe est au dessus de ses tangentes. Je teste l'idée sur mon brouillon et miracle, elle marche et permet d'obtenir $\ln(5) > 1$ qui est celle donnée dans l'exercice. Si elle n'avait pas marché, j'aurai peut-être utilisé la même idée mais en l'appliquant au dessus des segment $[1,3]$ et $[3,4]$.

Dans un second temps je vais essayer d'inclure le domaine dont je veux mesure l'aire par de telles figurer pour majorer l'aire étudiée par l'aire totale de ces figures. Comme la fonction $1/x$ est décroissante je peux essayer avec des rectangles car c'est facile de trouver un majorant de $1/x$ sur $[a,b]$, c'est $1/a$ (lorsque $0 < a < b$). Essayons avec le rectangle $[1,5] \times [0,1]$ (car 1 est le maximum de $1/x$ sur $[1,5]$). On trouve comme majorant 4 : $\ln(5) < 4$. C'est déjà ça. Voyons ce qui se passe avec les 4 rectangles $[1,2] \times [0,1]$, $[2,3] \times [0,1/2]$, $[3,4] \times [0,1/3]$ et $[4,5] \times [0,1/4]$. Le domaine étudié est bien dans la somme des quatre rectangle et donc son aire est majoré par la somme des aires de ces rectangles c'est à dire par $1+1/2+1/3+1/4$ ou encore $2+1/12$: $\ln(5) < 2+1/12$. On progresse mais mince on n'a pas atteint le 2 de l'exercice. On va maintenant utiliser le fait que $1/x$ est convexe. Ça implique que son graphe sur un segment $[a,b]$ est sous sa corde correspondante. En faisant ça on approche $1/x$ non pas par une fonction constante par morceau comme on l'a fait avec les rectangles mais par une fonction continue et affine par morceaux dont le graphe est la réunion des cordes. Ça peut donner des meilleurs résultats que les rectangles (le dessin permet de le deviner et les mathématiques permettent de le démontrer). Commençons avec une seule corde, celle qui va de $(1,1)$ à $(5,1/5)$. On va majorer l'aire qui nous intéresse par le trapèze dont les sommets sont $(1,0)$, $(1,1)$, $(5,1/5)$ et $(5,0)$. Son aire est $1/2 \times 4 \times (1+1/5)2+2/5$: $\ln(5) < 2+2/5$. C'est mieux que $\ln(5) < 4$ mais moins bien que $\ln(5) < 2+1/12$. Essayons maintenant avec 4 cordes au dessus des segments $[1,2]$, $[2,3]$, $[3,4]$ et $[4,5]$. C'est le calcul qui est fait dans le document en ligne et qui donne $\ln(5) < 2$.

Question

Comment on trouve la formule $1/x < 1/(n+1) \times (x-n) + 1/n \times (n+1-x)$?

Réponse

La convexité, toujours la convexité ! Si f est strictement convexe (c'est le cas pour f définie par $f(x) = 1/x$) et si t dans $]0,1[$ alors $f(ta+(1-t)b) < tf(a)+(1-t)f(b)$.

Application à la situation où x est dans $]n,n+1[$. Trouvons t en écrivant $x = tn+(1-t)(n+1) = n+1-t$ qui donne $t = n+1-x$. L'inégalité de convexité donne ici $1/x = 1/(tn+(1-t)(n+1)) < t/n+(1-t)/(n+1) = (n+1-x)/n+(x-n)/(n+1)$ c'est à dire $1/x < (n+1-x)/n+(x-n)/(n+1)$ qui s'écrit aussi $1/x < 1/(n+1)*(x-n)+1/n*(n+1-x)$.

Question

La factorisation de $\cos(t)-\cos(s)$ ne serait-elle pas incomplète, un facteur semble manquer et le s et le t semblent inversés ?

Réponse

La factorisation donnée est effectivement inexacte et la factorisation correcte est

$$\cos(t)-\cos(s) = 2\sin(\frac{s+t}{2})\sin(\frac{s-t}{2}).$$

Exercice 18

Question

Pourquoi avoir écrit $M = \sup(M)$?

Réponse

Si on peut donner un sens à cette égalité en confondant le nombre M et le singleton $\{M\}$ elle n'a pas de réel intérêt. Ce qui est intéressant de remarquer est que "Comme $E \subset [a,b]$, $M = \sup(E) \in [a,b]$".

Exercice 23

Question

Comment est choisi ε à la fin de l'exercice et pourquoi faire apparaître $\frac{1}{2}(1+k)$?

Réponse

Dans la solution proposée ε n'est pas choisi explicitement. On établit seulement son existence. On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x}{1+x}$ si $x \in [0, +\infty[$. Alors $\frac{|f(x)|}{x} = \frac{1}{1+x}$. Or $\lim_{\substack{x->0 \\ x>0}} \frac{1}{1+x} = 1$. Considérons $k \in]0,1[$. On a $k < \frac{1}{2}(1+k) < 1$ et $K = 1 - \frac{1}{2}(1+k) = \frac{1}{2}(1-k)$ vérifie $K > 0$. Donc, puisque $\lim_{\substack{x->0 \\ x>0}} \frac{1}{1+x} = 1$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $x \in]0, \varepsilon[$ alors $\frac{1}{1+x} \in]1-K, 1+K[$, en particulier $x > 1-K = \frac{1}{2}(1+k) > k$ (car $\frac{1}{2}(1+k)$ est le milieu du segment $[k,1]$). Ça donne une réponse négative à la dernière question de l'exercice : en effet si $b > 0$ et si $k \in]0,1[$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $x \in]0, \varepsilon[$ alors $\frac{|f(x)|}{x} > k$. C'est vrai en particulier si $x \in]0, \min(b, \varepsilon)[$ qui est non vide. Ici, ce qui est noté K est d'habitude noté ε et ce qui est noté ε est d'habitude noté η. Enfin le nombre $\frac{1}{2}(1+k)$ est introduit pour être certain que $\frac{1}{1+x}$ est strictement plus grand que k, mais en fait ce n'est pas utile d'utiliser ce terme.

Question

Le raisonnement suivant convient-il ?

"On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x}{1+x}$ si $x \in [0, +\infty[$. Alors $\frac{|f(x)|}{x} = \frac{1}{1+x}$. On considère aussi $k \in]0,1[$. En prenant $\varepsilon < \frac{1-k}{k}$, si $0 < x < \varepsilon$ on a $1 + x < 1 + \frac{1-k}{k} = \frac{1}{k}$ et donc $\frac{1}{1+x} > k$."

Réponse

Cette méthode consiste à trouver un ε explicite. Et ça marche. Pour être complet, il faut préciser que le ε choisi doit vérifier aussi $\varepsilon > 0$, et c'est possible car, puisque $k < 1$, on a $1-k$>0 et donc $\frac{1}{1-k} > 0$ et donc l'intervalle $]0, \frac{1}{1-k}[$ est bien non vide et on peut y choisir ε.

Exercice 32

Question

Quel est le sens de la phrase "Or $m = \inf_{x \in [ab]} g(x)$" qui apparaît à la troisième ligne de la réponse à la question 1, qui a-t-il derrière ce "or" ?

Réponse

Dans la question 1 de l'exercice 32 on nous demande de prouver l'existence d'un nombre noté c qui est dans le segment $[a,b]$ et qui minimise la fonction g sur ce segment. Je reprends la démonstration pas à pas pour expliquer ce "Or" (mais je conçois que la formulation que j'ai retenue soit un peu sèche et difficile) :

- Tout d'abord je dis que parce que la fonction g est continue et que $[a,b]$ est un segment, l'image $g([a,b])$ du segment $[a,b]$ par g est un segment et je note $[m,M]$ ce segment. On a donc $g([a,b]) = [m,M]$.

- Ensuite j'observe que l'égalité $g([a,b]) = [m,M]$ a pour conséquence que m qui est dans $[m,M]$ est donc l'image d'un nombre c appartenant à $[a,b]$.

- Je signale alors que puisque $g([a,b]) = [m,M]$ le nombre m est le plus petit nombre de $[m,M]$ c'est à dire de $g([a,b])$ et je le dis par la fameuse phrase "Or $m = \inf_{x \in [ab]} g(x)$".

- Pour finir je fais observer que puisque d'une part il existe c dans $[a,b]$ tel que $g(c) = m$ et que d'autre part $m = \inf\limits_{x\in[ab]} g(x)$ on peut conclure qu'il existe c dans $[a,b]$ tel que $g(c) = \inf\limits_{x\in[ab]} g(x)$.

Exercice 34

Question

Serait-il possible de préciser le déroulé du raisonnement qui est fait dans la réponse corrigée à la question 3 pour montrer que f n'est pas croissante près de 0.

Réponse

Avant de préciser le déroulé du raisonnement expliquons ce que signifie qu'une fonction est croissante près de 0. On considère une fonction f définie sur un domaine D.

Dire que f est croissante près de 0 signifie qu'il existe un intervalle ouvert I qui contient 0 tel que la restriction de f à $D\cap I$ est croissante. Aussi dire que f n'est pas croissante près de 0 signifie que pour tout intervalle I qui contient 0, la restriction de f à $D\cap I$ n'est pas croissante c'est à dire qu'il existe x,y dans $D\cap I$ tels que $x < y$ et $f(x) > f(y)$. Pour prouver que f n'est pas croissante près de 0 il suffit donc de prouver que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x,y \in D\cap]-\varepsilon,\varepsilon[$ tels $x < y$ et $f(x) > f(y)$, c'est à dire que la fonction f en restriction à $D\cap]-\varepsilon,\varepsilon[$ n'est pas croissante.

Reprenons maintenant le déroulé du raisonnement fait dans la réponse corrigée à la question 3.

On demande dans la question si le fait que la dérivée vérifie $f'(0) = 1$ permet de déduire que f est croissante près de 0. Pour y répondre on aurait pu se contenter de dire que la connaissance de la stricte positivité de la dérivée d'une fonction juste en un point ne dit rien a priori sur la croissance de cette fonction près du point. Dans la réponse à la question 3 donnée dans le corrigé on dit plus. En effet on montre explicitement que la fonction f n'est pas croissante près de 0 en procédant de la façon suivante.

La première étape consiste à donner une suite de terme général x_n qui tend vers 0 et qui vérifie $f'(x_n) = -1$ pour tout entier naturel non nul : il s'agit de la suite définie par $x_n = \dfrac{1}{2\pi n}$ si $n \neq 0$ (prendre $x_0 = 0$).

La seconde étape consiste à revenir, pour $n \neq 0$ fixé, à la définition de la dérivée $f'(x_n)$ comme la limite du taux d'accroissement $\dfrac{f(y)-f(x_n)}{y-x_n}$ lorsque y tend vers x_n en en étant différent. Ceci permet d'affirmer que si $\varepsilon > 0$ est fixé alors pour tout $n \in \mathbf{N}$ tel que $n > \dfrac{1}{2\pi\varepsilon}$ on a $0 < x_n < \varepsilon$ et donc il existe $y_n \in]x_n,\varepsilon[$ tel que $\dfrac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}$ est proche de -1 et donc strictement négatif : ceci entraîne que $0 < x_n < y_n < \varepsilon$ mais $f(x_n) > f(y_n)$.

Ça montre que, quel que soit $\varepsilon > 0$, la fonction f en restriction à $D\cap]-\varepsilon,\varepsilon[$ n'est pas croissante. Ainsi la fonction f n'est pas croissante près de 0.

Observons maintenant le fait général qu'on vient d'établir. Si une fonction f dérivable en un réel $a \in \mathbf{R}$ vérifie $f'(a) < 0$ alors la fonction f n'est pas croissante près de a : quel que soit $\varepsilon > 0$ il existe x dans le domaine définition de f tel que $|x-a| < \varepsilon$ mais $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} < 0$ c'est à dire tel que f$(x)-f(a)$ et $x-a$ sont de signes opposés. En revanche si une fonction f dérivable en un réel $a \in \mathbf{R}$ vérifie $f'(a) > 0$ ceci ne suffit pas pour pouvoir affirmer que f est croissante près de a.

Question

Serait-il possible de préciser le calcul de $f'(y_n)$ dans la question 4) de l'exercice ?

Réponse

Si $x \in \mathbf{R}^*$ $f(x) = x + 2x^2 \sin(\frac{1}{x})$. Par conséquent en un tel réel x le nombre dérivé vaut

$$f'(x) = 1 + 4x\sin(\frac{1}{x}) - 2\cos(\frac{1}{x}).$$

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $y_n = \frac{1}{2\pi n + \pi}$. On a $\frac{1}{y_n} = 2\pi n + \pi$ donc

$$\sin(\frac{1}{y_n}) = \sin(2\pi n + \pi) = 0 \text{ et } \cos(\frac{1}{y_n}) = \cos(2\pi n + \pi) = -1.$$

Par conséquent

$$f'(y_n) = 1 + \frac{4}{2\pi n + \pi} \times 0 - 2 \times (-2) = 3$$

et donc $f'(y_n) = 3$.

Exercice 37

Question

Le sujet du CAPES dont est tiré l'exercice suggérait d'utiliser la formule de Leibniz. Avez vous utilisé les développements limités pour nous montrer une méthode alternative ou est-ce la méthode attendue ?

Réponse

On peut effectivement résoudre cet exercice en utilisant la formule de Leibniz. Je décris le début du calcul avec cette formule. Si $n \in \mathbf{N}$ en notant g_n et h_n les fonctions définies par $g_n(t) = (t-1)^n$ et $h_n(t) = (t+1)^n$ il vient d'après Leibniz

$$\begin{aligned} L_n(x) &= \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(gh)(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n \cdot \ldots \cdot (n-k+1)(x-1)^{n-k} \times n \cdot \ldots \cdot (k+1)(x+1)^k \end{aligned}$$

L'évaluation de L_n et 1 et -1 est alors faite en observant que $(x-1)^{n-k}$ est nul en $x = 1$ sauf pour $k = n$ et que $(x+1)^k$ est nul en $x = -1$ sauf pour $k = 0$.

J'ai préféré utiliser le binôme de Newton et l'identification "tronquée" entre polynôme de Taylor et fonction dans le cas où la fonction est un polynôme parce que ça me paraissait peut-être plus simple (et parce que je n'ai pas pensé à Leibniz).

Attention, une fonction peut admettre un développement limité d'ordre n avec $n > 1$ sans être n fois dérivable au point. Dans la solution que je propose je n'utilise pas la seule notion de développement limité mais bien la formule de Taylor-Young qui permet entre autre le calcul de développements limités.

Exercice 39

Question

Comment fait-on dans la question 2)b) pour établir l'égalité $g(x) = (x - x_0) \times \varepsilon_0(x)$ où ε_0 est une fonction qui a pour limite 0 en x_0. Est-ce que c'est en lien avec le fait que $g(x_0) = 0$ et que $g'(x_0) = 0$

et que ces égalités impliqueraient qu'on peut dire que d'après le théorème des accroissements finis le quotient $\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$ tend vers $g'(x_0)$ quand x tend vers x_0 et qu'on "remplace" $g'(x_0)$ qui est nul par un ε dont la limite en $+\infty$ tend vers 0 ?

Réponse

Voici deux façons d'établir $g(x)=(x-x_0)\times\varepsilon_0(x)$ où ε_0 est une fonction qui a pour limite 0 en x_0.

La première façon reprend la piste suggérée dans la question ci-dessus. On va donner en particulier un sens mathématique au "remplacement" suggéré en introduisant une fonction ε_0 qui tendra vers 0 en x_0 (plutôt qu'en $+\infty$). Notons donc ε_0 la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $\varepsilon_0(x)=\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$ si $x\neq 0$ et par $\varepsilon_0(x_0)=0$. Puisque $g'(x_0)=0$ et que $g'(x_0)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\neq 0}}\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$ il vient que $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\neq 0}}\varepsilon_0(x)=0=\varepsilon_0(x_0)$ et donc, puisque $g(x)-g(x_0)=(x-x_0)\times\varepsilon_0(x)$ si $x\neq x_0$ et $g(x_0)=0$, on obtient

$$g(x)=(x-x_0)\times\varepsilon_0(x)\ \text{ si }\ x\in\mathbf{R}$$

avec $\varepsilon_0(x_0)=0=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\neq 0}}\varepsilon_0(x)$.

La deuxième façon est de considérer un développement limité à l'ordre 1 de la fonction g en x_0. Ceci est possible puisque g est dérivable en x_0. D'après le théorème de Taylor-Young il existe une fonction ε_0 définie sur $\mathbf{R}$ (la fonction g est définie sur $\mathbf{R}$) continue en x_0, qui vaut 0 en x_0 et telle que si $x\in\mathbf{R}$

$$g(x)=g(x_0)+g'(x_0)\times(x-x_0)+(x-x_0)\times\varepsilon_0(x).$$

Notons que puisque $\varepsilon_0(x_0)=0$ et que ε_0 est continue en x_0 on a bien $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\neq 0}}\varepsilon_0(x)=0$. Puisque $g(x_0)=0$ et $g'(x_0)=0$ il vient

$$g(x)=(x-x_0)\times\varepsilon_0(x)\ \text{ si }\ x\in\mathbf{R}$$

avec $\varepsilon_0(x_0)=0=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\neq 0}}\varepsilon_0(x)$.

Exercice 41

Question

Est-il possible d'expliquer pourquoi il est introduit la fonction g dans la résolution de l'exercice ? Comme cette fonction dépend de x ne faut-il pas l'indiquer quand on la nomme ? Comment justifier $g(0)=|\phi(x)|$ et surtout $g'(0)=|\phi'(x)|$.

Réponse

Oui, il est mieux de renommer g en g_x puisqu'il s'agit d'une famille de fonctions de la variable $t\in\mathbf{R}$ et qui dépendent du paramètre $x\in\mathbf{R}$. La solution en ligne a été modifiée et des coquilles on été retirées ligne 9 dans les égalités qui font intervenir M_0 et M_1.

Voici pourquoi la famille g_x est introduite. On veut contrôler $|\phi(x)|$ et $|\phi'(x)|$ en fonction de M_0 et M_2 et d'un réel $a>0$. Pour le faire on envisage d'appliquer la formule de Taylor-Lagrange entre x et $x+a$ ou x et $x-a$ (on utilise généralement Taylor-Lagrange lorsqu'on recherche des propriétés globales d'une fonction, c'est à dire des propriétés qui nécessitent la connaissance de f sur tout son domaine de définition). Pour y arriver on va considérer l'une des quatre fonctions suivantes de la variable t :

- celle qui à t associe $\phi(x+t)$;

- celle qui à t associe $-\phi(x+t)$;

- celle qui à t associe $\phi(x-t)$;

- celle qui à t associe $-\phi(x-t)$.

Ces quatre fonctions de la variable t sont deux fois dérivables et pour chacune le maximum de la valeur absolue de la fonction sur $\mathbf{R}$ vaut M_0 et le max de la valeur absolue de la seconde sur $\mathbf{R}$ vaut M_2 car on a juste composé ϕ, à droite par t donne $x+t$ ou t donne $x-t$, à gauche par l'identité ou $-$ l'identité.

De plus chacune de ces quatre fonctions est telle que sa valeur en 0 est $\phi(x)$ ou son opposé et la valeur de sa dérivée est $\phi'(x)$ ou son opposé.

L'idée est de retenir parmi les quatre fonctions celle dont la valeur en 0 est positive, ainsi que la valeur de la dérivée première. C'est ce qui est fait avec g_x.

Bien entendu cette idée arrive dans le cheminement de la pensée, après avoir fait des tests lors de la recherche de la solution. Elle n'apparaît pas au début, mais quand on a un peu souffert avec la formule de Taylor-Lagrange appliquée à ϕ entre x et a et qu'on arrive à lui faire dire quelque chose d'utile dans le cadre de l'exercice que quand $\phi(x)$ et $\phi'(x)$ sont de même signe. Et le corrigé ne dévoile pas ça ;-).

Exercice 42

Question

Comment à partir des inégalités

$$|f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + h^2\frac{M_3}{6} \text{ et } |f''(x)| \leq \frac{4M_0}{h^2} + h\frac{M_3}{3}$$

trouver les constantes C_1 et C_2 de la question 3) ? Peut-on partir d'égalités du type

$$\frac{M_0}{h} + h^2\frac{M_3}{6} = C_1 \times (M_0^2 \times M_3)^{1/3} \text{ et } \frac{4M_0}{h^2} + h\frac{M_3}{3} = C_2 \times (M_0 \times M_3^2)^{1/3} \text{ ?}$$

Réponse

L'objet de la question 3) et de montrer qu'il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que

$$M_1 \leq C_1 \sqrt[3]{M_0^2 M_3} \text{ et } M_2 \leq C_2 \sqrt[3]{M_0 M_3^2}.$$

On va proposer trois méthodes pour trouver la constante C_1. Ces méthodes peuvent être adaptées pour trouver C_2.

La première méthode consiste à travailler à partir d'une égalité du type

$$\frac{M_0}{h_1} + h_1^2\frac{M_3}{6} = C_1 \times (M_0^2 \times M_3)^{1/3}$$

et de rechercher h_1 et C_1 qui vérifient une telle égalité.

Si dans l'égalité

$$\frac{M_0}{h_1} + h_1^2\frac{M_3}{6} = C_1 \times (M_0^2 \times M_3)^{1/3}$$

on divise par $(M_0^2 \times M_3)^{1/3}$ on obtient

$$\left(\frac{M_0}{M_3}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{h_1} + \frac{h_1^2}{6}\left(\frac{M_3}{M_0}\right)^{\frac{2}{3}} = C_1.$$

Maintenant on va chercher à ce que C_1 ne dépende pas de M_0 et de M_3 c'est à dire que

$$\left(\frac{M_0}{M_3}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{h_1}+\frac{h_1^2}{6}\left(\frac{M_3}{M_0}\right)^{\frac{2}{3}}$$

ne dépende pas de M_0 et de M_3. C'est le cas si $\left(\frac{M_0}{M_3}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{h_1}$ et $\frac{h_1^2}{6}\left(\frac{M_3}{M_0}\right)^{\frac{2}{3}}$ ne dépendent pas de M_0 et M_3. On constate qu'en prenant $h_1=\left(\frac{M_0}{M_3}\right)^{\frac{1}{3}}$ ça marche et on obtient

$$\left(\frac{M_0}{M_3}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{h_1}=1 \ \text{ et } \ \frac{h_1^2}{6}\left(\frac{M_3}{M_0}\right)^{\frac{2}{3}}=\frac{1}{6}$$

et donc

$$C_1=\left(\frac{M_0}{M_3}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{h_1}+\frac{h_1^2}{6}\left(\frac{M_3}{M_0}\right)^{\frac{2}{3}}=1+\frac{1}{5}=\frac{7}{6}.$$

On revient alors à l'inégalité

$$|f'(x)|\leq\frac{M_0}{h}+h^2\frac{M_3}{6}$$

vraie pour tout x et pour tout h. D'après les calculs qui viennent d'être faits, cette inégalité appliquée avec $h_1=\left(\frac{M_0}{M_3}\right)^{\frac{1}{3}}$ donne $C_1=\frac{7}{6}$ et

$$|f'(x)|\leq\frac{7}{6}\sqrt[3]{M_0^2M_3}$$

quel que soit $x\in\mathbf{R}$ et donc

$$M_1\leq\frac{7}{6}\sqrt[3]{M_0^2M_3}.$$

La deuxième méthode consiste à partir de l'inégalité

$$|f'(x)|\leq\frac{M_0}{h}+h^2\frac{M_3}{6}$$

vraie pour tout x et pour tout h et à chercher un h_2 de la forme $h_2=M_0^{\alpha}M_3^{\beta}$ de telle sorte que le nombre $\frac{M_0}{h_2}+h_2^2\frac{M_3}{6}$ s'écrive sous la forme d'un monôme $KM_0^{\gamma}M_3^{\delta}$. En posant $h_2=M_0^{\alpha}M_3^{\beta}$ il vient

$$\frac{M_0}{h_2}+h_2^2\frac{M_3}{6}=M_0^{1-\alpha}M_3^{-\beta}+\frac{1}{6}M_0^{2\alpha}M_3^{1+2\beta}.$$

Pour obtenir $\frac{M_0}{h_2}+h_2^2\frac{M_3}{6}$ de la la forme d'un monôme $KM_0^{\gamma}M_2^{\delta}$ il suffit donc que $1-\alpha=2\alpha$ c'est à dire $\alpha=\frac{1}{3}$ et $-\beta=1+2\beta$ c'est à dire $\beta=-\frac{1}{3}$. Avec ces choix de α et β il vient $\gamma=1-\alpha=\frac{2}{3}$ et $\delta=-\beta=\frac{1}{3}$. Ainsi si on pose $h_2=M_0^{\alpha}M_3^{\beta}$ avec $\alpha=\frac{1}{3}$ et $\beta=-\frac{1}{3}$ c'est à dire si on pose $h_2=\left(\frac{M_0}{M_3}\right)^{\frac{1}{3}}$ alors on obtient

$$\frac{M_0}{h_2}+h_2^2\frac{M_3}{6}=(1+\frac{1}{6})(M_0^2M_3)^{\frac{1}{3}}=\frac{7}{6}(M_0^2M_3)^{\frac{1}{3}}.$$

Puisque
$$|f'(x)| \leq \frac{M_0}{h_2} + h_2^2 \frac{M_3}{6}$$
pour tout $x \in \mathbf{R}$ il vient
$$|f'(x)| \leq \frac{7}{6}(M_0^2 M_3)^{\frac{1}{3}}$$
pour tout $x \in \mathbf{R}$ et donc
$$M_1 \leq \frac{7}{6}(M_0^2 M_3)^{\frac{1}{3}}$$
et on trouve $C_1 = \dfrac{7}{6}$.

La troisième méthode consiste à partir de l'inégalité
$$|f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + h^2 \frac{M_3}{6}$$
vraie pour tout x et pour tout h et à trouver un réel h_3 qui minimiserait le second terme de cette inégalité.

On considère la fonction $\phi : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ définie par $\phi(h) = \dfrac{M_0}{h} + h^2 \dfrac{M_3}{6}$. C'est une fonction dérivable et sa dérivée vaut $\phi'(h) = -\dfrac{M_0}{h^2} + h\dfrac{M_3}{3}$ si $h \in \mathbf{R}_+^*$. Cette dérivée est nulle en $h_3 = \left(\frac{3M_0}{M_3}\right)^{\frac{1}{3}}$ et elle est strictement négative sur $]0, +h_3[$ mais strictement positive sur $]h_3, +\infty[$. La fonction ϕ atteint donc un minimum strict en h_3 et on a
$$\phi(h_3) = \phi(\left(\frac{3M_0}{M_3}\right)^{\frac{1}{3}}) = M_0 \left(\frac{M_3}{3M_0}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{3M_0}{M_3}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{M_3}{6} = \frac{3^{\frac{2}{3}}}{2}(M_0^2 M_3)^{\frac{1}{3}}.$$
Par conséquent
$$|f'(x)| \leq \frac{M_0}{h_3} + h_3^2 \frac{M_3}{6} = \phi(h_3) = \frac{3^{\frac{2}{3}}}{2}(M_0^2 M_3)^{\frac{1}{3}}$$
quel que soit $x \in \mathbf{R}$ et donc
$$M_1 \leq \frac{3^{\frac{2}{3}}}{2}(M_0^2 M_3)^{\frac{1}{3}}$$
et on trouve $C_1 = \dfrac{3^{\frac{2}{3}}}{2}$.

On va comparer maintenant les différentes constantes C_1 obtenues. Les deux premières méthodes donnent la même constante, le rationnel $\dfrac{7}{6}$, qui est obtenue en calculant une valeur particulière de la fonction ϕ. La constante $\dfrac{3^{\frac{2}{3}}}{2}$ obtenue par la troisième méthode l'est en minimisant la fonction ϕ et donc $\dfrac{3^{\frac{2}{3}}}{2} \leq \dfrac{7}{6}$. On pourrait vérifier par le calcul que l'inégalité est stricte. On peut le vérifier par un argument arithmétique. D'un côté $\dfrac{7}{6}$ est un rationnel et de l'autre $3^{\frac{2}{3}}$ est irrationnel et par conséquent $\dfrac{3^{\frac{2}{3}}}{2}$ est irrationnel. Ainsi ces deux nombres sont différents donc l'inégalité est bien stricte : $\dfrac{3^{\frac{2}{3}}}{2} < \dfrac{7}{6}$.

Exercice 43 (et 42)

Question

Quelle est la signification de l'expression "formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n" ? Cela signifie-t-il que le reste doit être d'ordre n, i.e. que l'élément principal est une somme qui va de $k=0$ à $k=n-1$ et que le reste dépend de la dérivée n-ième ? La solution proposée de l'exercice 43 de la liste confirme cette hypothèse mais dans l'exercice 42, la première question et la solution proposée l'infirme. Dans le premier cas il est en effet évoquée une formule de Taylor à l'ordre 3 et dans le second cas il est en effet évoquée une formule de Taylor à l'ordre 3 mais c'est exactement le même type de formule de Taylor-Lagrange qui est utilisée. Comment lever la contradiction ?

Réponse

Il y a effectivement une contradiction entre les définitions de formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n utilisées dans les exercices 42 et 43. L'usage voudrait que ce qu'on appelle l'ordre d'une formule de Taylor, avec reste de Lagrange, avec reste intégral ou avec reste de Young, soit l'entier n qui apparaît dans la description de la partie principale P_n : $P_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$.

L'énoncé de la question 1 de l'exercice 42 et la solution proposée respectent cet usage. Ce n'est pas le cas de la solution proposée dans l'exercice 43. Ça ne rend pas la solution inexacte, ça signifie juste qu'on utilise improprement une terminologie mathématique.

Question diverse

Quand peut-on comparer à l'infini la suite des sommes partielles $u_0+...+u_n, n\in\mathbf{N}$ associée à une suite $u=(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à l'intégrale de la borne supérieure $\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ d'une fonction f ?

Réponse

Soit $f:[0,+\infty[\to\mathbf{R}$ une fonction. On considère la suite $u=(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_n=f(n)$ si $n\in\mathbf{N}$. Supposons que f soit strictement positive et monotone. Alors la suite $S=(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}u_k$ si $n\in\mathbf{N}$ admet une limite finie si et seulement la fonction qui à $x\geq 0$ associe $\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ admet une limite finie à l'infini.

Montrons cette affirmation.

Puisque f est strictement positive la suite S est strictement croissante ainsi que la fonction qui à $x\geq 0$ associe $\displaystyle\int_0^x f(t)dt$. Elles ont donc toutes les deux des limites à l'infini qui sont soit finies soit infinies.

Si f est croissante alors $f(x)\geq f(0)>0$ si $x>0$. Par conséquent d'une part $S_n\geq f(0)(n+1)$ si $n\in\mathbf{N}$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}S_n=+\infty$ et et d'autre part $\displaystyle\int_0^x f(t)dt\geq f(0)x$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)dt=+\infty$.

Si f est décroissante alors pour tout $n\in\mathbf{N}$ et pour tout $t\in[n,n+1]$ les inégalités $u_n\geq f(x)\geq u_{n+1}>0$ sont vérifiées et en intégrant sur l'intervalle $[n,X]$ avec $X\in[n,n+1]$ il vient

$$u_n\times(X-n)\geq\int_n^X f(t)dt\geq u_{n+1}\times(X-n).$$

Par conséquent si $x>0$ il vient, si on pose $N=\mathrm{Ent}(x)$,

$$\sum_{k=0}^{N-1}u_k+u_N\times(x-N)\geq\sum_{k=0}^{N-1}\int_k^{k+1}f(t)dt+\int_N^X f(t)dt\geq\sum_{k=0}^{N-1}u_{k+1}+u_{N+1}\times(x-N)\quad(*).$$

Or $S_N\geq\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1}u_k+u_N\times(x-N)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1}u_{k+1}+u_{N+1}\times(x-N)\geq\sum_{k=1}^{N}u_k=S_N-u_0$ d'une part et d'autre part $\int_0^x f(t)dt = \sum_{k=0}^{N-1} \int_k^{k+1} f(t)dt + \int_N^X f(t)dt$. Par conséquent $(*)$ donne $S_N \geq \int_0^x f(t)dt \geq S_N - u_0$.

Par conséquent si S tend vers $+\infty$ alors, puisque $\int_0^x f(t)dt \geq S_N - u_0$ si $N = \text{Ent}(x)$ et puisque $\lim_{x\to+\infty} \text{Ent}(x) = +\infty$, on a $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)dt = +\infty$.

Et si S ne tend pas vers $+\infty$, puisque f est croissante, alors S converge en croissant vers une limite finie notée l. Dans ce cas on a $l \geq S_N \geq \int_0^x f(t)dt$ si $x \geq 0$ et $N = \text{Ent}(x)$. Ceci signifie que la fonction qui à $x \geq 0$ associe $\int_0^x f(t)dt$ qui est croissante est bornée donc admet une limite finie à l'infini.

Question diverse

Pour montrer que la fonction f qui à $x \in \mathbf{R}$ associe $f(x) = x^3$ est continue en 2 il suffit de montrer que quel que soit le réel strictement positif ε considéré il existe un réel strictement positif η tel que si $x \in \mathbf{R}$ vérifie $|x-2| < \eta$ alors $|x^3 - 8| < \varepsilon$.

Or le calcul donne $|x^3 - 8| = |x-2| \times |x^2 + 2x + 4|$ et donc$|x^3 - 8| = |x-2| \times (x+2)^2$.

Pour majorer $|x^3 - 8|$ il suffit de majorer $|x-2|$ et $(x+2)^2$. Aussi comment majorer $(x+2)^2$?

Réponse

Le terme $|x-2|$ sera majoré par η. Pour majorer $(x+2)^2$ l'astuce consiste à limiter le choix possible de η. On va convenir qu'on choisira η dans $]0,1]$. En faisant ça on ne fixe pas η mais on impose de le borné par 1.

Dans ce cas si $|x-2| < \eta$ alors $|x-2| < 1$, donc $1 < x < 3$ et ceci entraîne $3 < (x+2) < 5$ et finalement $9 < (x+2)^2 < 25$.

Finalement on sait que si $0 < \eta \leq 1$ et $|x-2| < \eta$ alors $(x+2)^2 < 25$ et donc, puisque $|x^3 - 8| = |x-2| \times (x+2)^2$, il vient $|x^3 - 8| < 25|x-2| < 25\eta$.

Or on souhaite que $|x^3 - 8| < \varepsilon$. Il suffit donc que $0 < \eta \leq 1$ et $25\eta \leq \varepsilon$, c'est à dire $0 < eta \leq 1$ et $\eta \leq \frac{1}{25}\varepsilon$. Si $\varepsilon > 0$ le nombre $\eta = \min(1, \frac{1}{25}\varepsilon)$ est un réel strictement positif qui convient.

Question diverse

Comment expliquer dans ce qui précède le nombre $\eta = \min(1, \frac{1}{25}\varepsilon)$.

Réponse

On a démontré que pour avoir $|x^3 - 8| < \varepsilon$ avec $|x-2| < \eta$ il suffisait que $0 < eta \leq 1$ et $25\eta \leq \varepsilon$. Ça signifie la chose suivante. Chaque fois qu'on prend $\varepsilon > 0$ quelconque si on choisit un $\eta > 0$ qui vérifie les deux contions $\eta \leq 1$ et $25\eta \leq \varepsilon$ (c'est à dire $\eta \leq \frac{1}{25}\varepsilon$) alors une fois un tel η choisi, pour tout x réel, si $|x-2| < \eta$, alors $|x^3 - 8| < \varepsilon$. Donc quand on choisit $\varepsilon > 0$ il suffit que η soit inférieur ou égal à la fois à 1 et à $\frac{1}{25}\varepsilon$ c'est à dire inférieur ou égal au plus petit de ces deux nombres 1 et $\frac{1}{25}\varepsilon$, ce qui signifie qu'il suffit que η soit inférieur ou égal à $\min(1, \frac{1}{25}\varepsilon)$. En particulier ça marche en prenant $\eta = \min(1, \frac{1}{25}\varepsilon)$ comme écrit. Ce choix de $\eta = \min(1, \frac{1}{25}\varepsilon)$ signifie que si $\varepsilon > 25$ (et donc $\frac{1}{25}\varepsilon > 1$) on choisit $\eta = 1$ et si $\varepsilon \leq 25$ (et donc $\frac{1}{25}\varepsilon \leq 1$) on choisit $\eta = \frac{1}{25}\varepsilon$.

Question diverse

Pourquoi dans le polycopié traiter deux fois la divergence d'une suite géométrique de raison strictement supérieure à 1 ?

Réponse

Lorsque la raison d'une suite géométrique est strictement supérieure à 1 on peut s'intéresser à deux notions de divergence. Dans le polycopié on montre d'abord que la suite n'admet aucune limite c'est à dire qu'elle diverge au sens premier. On montre ensuite qu'elle diverge vers $+\infty$. C'est la deuxième notion de divergence qui apparaît dans le polycopié. On observe qu'a priori une suite divergente vers $+\infty$ n'est pas nécessairement divergente au sens premier. C'est cependant vrai car une suite convergente est bornée alors qu'une suite divergente vers $+\infty$ est non bornée donc non convergente et donc divergente au sens premier. Il existe des suites divergentes et bornées, la suite des $(-1)^n, n \in \mathbf{N}$ par exemple. De telles suites ne sont pas divergentes vers $+\infty$. Il existe aussi des suites divergentes et non bornées mais qui ne divergent pas vers $+\infty$, la suite des $(-1)^n \times n, n \in \mathbf{N}$.

Question diverse

Pourquoi, dans la preuve du théorème de Taylor-Lagrange proposée dans le polycopié, la fonction g_λ s'annule en b.

Réponse

La fonction g_λ s'annule car $g_\lambda(b) = f(b) - f(b)$=combinaison linéaire de termes $(b-b)^1$,...,$(b-b)^{n+1}$ [j'ai isolé le terme qui correspond à $k = 1$ et qui donne $-f(b)$ et j'ai remplacé x par b dans la formule].

Question diverse

Quelles sont les idées de la preuve de la formule de Taylor-Young.

Réponse

La preuve de Taylor-Young proposée dans le polycopié est une récurrence qui repose sur les deux idées suivantes.

1/ On observe que Taylor-Young est vraie pour les polynômes puisque tout polynôme est une somme finie de monômes de la forme $(x-a)^k$. On observe aussi que si Taylor-Young est vraie pour des fonctions g et h alors elle est vraie pour $g+h$. Aussi quitte à remplacer f par $f-P$ où P est le polynôme de Taylor de degré $n+1$ de f en a on peut supposer que toutes les dérivées de f en a jusqu'à l'ordre $n+1$ sont nulles. C'est exactement ce que dit la phrase du polycopié "Puisque la dérivation est linéaire on peut supposer que pour tout entier k compris entre 0 et $n+1$, $f^(k)(a) = 0$".

2/ La preuve repose sur l'inégalité des accroissements finis qui dit que si deux fonctions g et h vérifient $|g'| \leq h'$ sur un intervalle I alors $|g(s)-g(t)| \leq |h(s)-h(t)|$ si s,t dans I. On l'applique à f et $\varepsilon(x-a)^n$ [attention il y a une petite astuce, il faut distinguer les cas $x > a$ et $x < a$ dans la preuve].

Question diverse

La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est-elle un contre-exemple à l'affirmation selon laquelle si une suite est divergente elle n'est pas bornée. Ça semble le cas puisque si on prend $A = 2$ on a un réel A tel que les valeurs absolues des termes de la suite sont toujours plus petites que A.

Réponse

Une suite divergente est par définition une suite non convergente. L'exemple donné est correct. Il s'agit bien d'une suite non convergente donc d'une suite divergente. Et elle est bornée donc c'est l'exemple d'une suite divergente qui est bornée. L'exemple permet de dire qu'il est faux d'écrire "Si une suite est divergente, alors elle n'est pas bornée".

Bien sûr parmi les suites divergentes il y a les suites qui divergent vers $+\infty$ (et celles qui divergent vers $-\infty$). Mais il y en a beaucoup d'autres comme le montre l'exemple.

Il faut être précis sur la définition de suite divergente. Dans le cours est définie comme "suite divergente" toute suite qui ne converge pas vers une limite finie (première définition). Il aussi la définition de "suite divergente vers $+\infty$" (deuxième définition), c'est à dire qui est telles que quel que soit le réel considéré, les termes de la suite sont tous plus grande que ce réel à partir d'un certain rang. Il y a de façon comparable la définition de "suite divergente vers $-\infty$". Dans la deuxième définition, bien moins générale que la première il ne faut pas dissocier divergente de $+\infty$ ou de $-\infty$. Une suite divergente vers $+\infty$ et une suite divergente vers $-\infty$ sont des suites divergentes, c'est à dire divergentes au sens de la première définition. L'exemple donne l'exemple d'une suite divergente et bornée et donc d'une suite divergente pour la première définition mais qui n'est ni divergente vers $+\infty$ ni divergente vers $-\infty$.

Question diverse

Que signifie qu'une fonction admet un nombre fini de zéros ?

Réponse

Avant de répondre à cette question précisons quelques définitions.

Si f est une fonction numérique (à valeurs dans $\mathbf{R}$) de la variable réelle (variable réelle signifie que le domaine de définition est un sous ensemble de $\mathbf{R}$) on dit qu'un réel a est racine de l'équation $f = 0$ si $f(a) = 0$ (racine d'une équation a pour synonyme solution d'une équation) et on dit qu'un réel a est un zéro de f si $f(a) = 0$, c'est à dire si c'est une racine de l'équation $f = 0$ (c'est à dire d'une solution de l'équation $f = 0$).

On emploie trois termes, racine, solution et zéro, pour désigner à peu près la même chose. Le terme solution d'une équation est général, mais le mot racine est employé plutôt lorsque f est un polynôme (fonction polynomiale) ou une fonction rationnelle on parle de racine d'un polynôme, d'une fonction rationnelle ou encore d'une équation algébrique. En analyse, on préfère le terme zéro d'une fonction.

Pour les racines d'un polynôme, d'une fonction rationnelle ou encore d'une équation algébrique il faut être précis sur l'ensemble où on les cherche. Par exemple l'équation $x^2+1=0$ n'admet pas de racines réelles mais deux racines complexes $x = i$ et $x = -i$.

Venons-en à la question.

Dire qu'une fonction $f : I \to \mathbf{R}$ admet un nombre fini de zéros signifie que l'ensemble S des zéros de f est fini (éventuellement vide). Par exemple, un polynôme, sauf le polynôme nul, admet un nombre fini de zéro, ce nombre est majoré par le degré du polynôme. En revanche la fonction sinus admet une infinité de zéros, mais la fonction f qui est la restriction de la fonction sinus à l'intervalle $]0,\pi[$ admet un nombre fini de zéro (ce nombre est 0 puisque la fonction sinus ne s'annule pas sur $]0,\pi[$.

Dernier point. Quand une fonction f est dérivable au moins d fois en un réel a on dit que a est un zéro d'ordre d si $f(a) = f'(a) = ... = f^(d-1)(a) = 0$ mais $f^(d)(a) \neq 0$. On parle aussi de racine de multiplicité d (plutôt lorsque f est un polynôme). Par exemple si f est la fonction définie par $f(x) = \sin^2(x)$ alors 0 est un zéro d'ordre 2 de f car $f(0) = f'(0) = 0$ mais $f''(0) = 2$ est différent de 0. Si f est le polynôme réel défini par $f(x) = (x-1)^2(1+x+x^2)$ alors 1 est son seul zéro (réel) et c'est un zéro de multiplicité 2 car $f(1) = f'(1) = 0$ mais $f''(1) = 6$ (si les calculs sont exacts).

Question diverse

Comment introduire le produit scalaire et la norme en évitant d'utiliser des arguments circulaires ?

Réponse

Il est exact que les notions de norme (euclidienne) et de produit scalaire sont très voisines et formellement on peut déduire l'une de l'autre.

On peut par exemple définir le produit scalaire comme étant une forme bilinéaire symétrique et définie positive sur un espace vectoriel réel E, c'est à dire une application de $E \times E$ dans $\mathbf{R}$ et noté $< .,. >$ telle que :
- si u dans E alors l'application qui à v dans E associe $< u,v >$ est linéaire ;
- si v dans E alors l'application qui à u dans E associe $< u,v >$ est linéaire ;
- si u et v dans E alors $< u,v >=< v,u >$;
- si u dans E est non nul alors $< u,u >$ est strictement positif.

Partant de là, on dit que la norme $||w||$ d'un vecteur w (associée à ce produit scalaire) est la racine carrée du produit scalaire $< w,w >$.

On peut aussi partir de la notion de norme d'un vecteur (relativement à une base orthonormée $(e_1,...,e_n)$ par exemple) en posant $||u|| = \sqrt{u_1^2+...+u_n^2}$ si $u = u_1e_1+...+u_ne_n$ puis définir le produit scalaire de deux vecteurs u et v (associé à cette norme) en posant $< v,w >= 1/4(||v+w||^2 - ||u-v||^2)$.

Pour la norme d'un vecteur, plutôt que de définir la norme à partir d'une base qu'on aura privilégiée, on peut utiliser Pythagore et la notion de distance euclidienne en disant que si A et B sont deux points d'un espace euclidien alors le vecteur $u = \text{vect}(A,B)$ associé au couple (A,B) à pour norme $||u||$ la distance euclidienne de A à B.

Le premier point de vue est plus formel et peut-être plus rigoureux mais il n'est pas forcément le plus accessible par des élèves de l'enseignement secondaire. C'est pourquoi, si on se réfère au programme du collège est du lycée et qu'on souhaite introduire ces notions dans le cadre de l'enseignement secondaire actuel il semble indiqué de partir de la notion de norme d'un vecteur qu'on va définir à partir de résultats de collège (Pythagore qu'on aura "établi" avec des découpages, avec Thalès, avec les cosinus et les sinus (établi est entre guillemets car les preuves reposent sur des résultats admis)) pour arriver au produit scalaire en première et terminale (spécialité mathématiques des classes qui mènent au bac général).

La consultation des programmes du collège et du lycée dans lesquels on peut rechercher "Pythagore", "norme", "scalaire" (on peut les trouver sur le site https://www.education.gouv.fr du ministère de l'éducation nationale) permet d'étayer ce point de vue.

Question diverse

Comment s'organisent les unes par rapport aux autres les définitions de plan euclidien, vectoriel, affine et cartésien ?

Réponse

Il est peut-être utile d'essayer de faire des dessins pour comprendre la réponse qui suit. Cette réponse s'intéresse de façon volontaire plus au plan physique qu'aux objets mathématiques que sont les plans euclidien, vectoriel, affine et cartésien.

Le plan euclidien, plus exactement le plan affine euclidien, est l'objet mathématique (donc une idée, une abstraction, une figure de l'esprit) le plus proche du plan physique naïf qu'on imagine, celui de tous les jours, dont un morceau est une table, ou encore une feuille de papier, ou le tableau noir qui est vert et dont l'épidémie nous prive. De même, les droites affines euclidiennes sont les objets mathématiques les plus proches des droites physiques de tous les jours, qui bien souvent vivent dans un plan physique naïf, dont on peut tracer des morceaux (dits segments) avec une règle ou en tendant un fil entre deux points ou encore en pliant une feuille de papier. Le plan physique et les droites physiques sont toujours formés d'une infinité de points.

On sait mesurer la distance physique entre deux points d'un plan physique ou d'une droite physique avec une règle graduée ou un mètre à ruban par exemple, ou encore avec le mètre pliable utilisé en menuiserie. Deux points différents d'un plan physique sont à une distance non nulle. Si A, B et C sont trois points d'un plan physique alors la distance entre A et C est inférieure ou égale à la sommes des distances entre A et B et entre B et C. Il y a égalité seulement lorsque B est dans le segment d'extrémités A et C.

Quand on est dans le plan physique on peut faire quelques mouvements remarquables. Par exemple on commence par appliquer une feuille de papier sur un tableau et on on marque trois points A_1, B_1, C_1 sur le tableau et trois points A_2, B_2, C_2 sur la feuille de telle sorte que les points se superposent deux à deux : A_1 est superposé à A_2, B_1 est superposé à B_2, C_1 est superposé à C_2. Ensuite on change la position de la feuille en l'appliquant toujours sur le tableau après l'avoir fait bouger. Les points $A_2, B_2, C2$ sont superposés maintenant aux points A'_1, B'_1, C'_1 sur le tableau : A'_1 est superposé à A_2, B'_1 est superposé à B_2, C'_1 est superposé à C_2. Et, magie, les distances entre A_1 et B_1, entre B_1 et C_1 et entre C_1 et A_1 sont les mêmes que les distances correspondantes entre A'_1 et B'_1, entre B'_1 et C'_1 et entre C'_1 et A'_1. Si on considère un point quelconque X du tableau et le point Y correspondant sur la feuille dans sa position initiale, quand on déplace la feuille dans sa nouvelle position, les points A_2, B_2, C_2 sont donc superposés aux points A'_1, B'_1, C'_1, et le point Y est maintenant superposé à un point X'. On définit ainsi un mouvement de points du tableau par le changement de position de la feuille et ce mouvement conserve les distances. C'est ce qu'on appelle une isométrie physique. Si cette isométrie physique est réalisée en bougeant la feuille sans la décoller du tableau on parle de déplacement physique. Si pour la réaliser il est nécessaire de décoller la feuille du tableau pour échanger recto et verso on parle d'antidéplacement physique. Il y a pour le plan euclidien les analogues des déplacements et antidéplacements du plan physique.

Pour mesurer la distance entre deux points du plan physique, le plan du tableau noir, on a utilisé une règle graduée. On peut coller cette règle graduée à une feuille de papier et on constate en mesurant avec cette règle graduée collée à la feuille la distance entre deux points A et B puis entre deux autres points C et D que si les deux distances sont égales alors il y a un unique déplacement du plan qui envoie A sur C et B sur D et il y a un unique antidéplacement du plan qui envoie A sur C et B sur D.

Le pendant mathématique de l'étude du plan physique et de ses transformations qui conservent les distances est l'étude du plan affine euclidien et des isométries affines de ce plan. C'est pour comprendre ces transformations et les propriétés de la distance dans le plan physique qu'en mathématiques on introduit la notion de plan affine euclidien et celle de groupe des isométries affines du plan.

On vient de mettre l'accent sur les propriétés du plan physique en lien avec la notion de distance. On va maintenant s'intéresser aux propriétés en lien avec l'alignement et le parallélisme. Deux points différents d'un plan physique appartiennent tout deux simultanément à une unique droite physique, c'est la droite physique qui est formée des points qui sont dits alignés avec ces deux points. Pour savoir si trois points du tableau sont alignés on prend une règle qui n'a plus besoin d'être graduée et si on peut placer la règle sur le tableau de telle sorte qu'elle passe par ces trois points ils sont alignés.

Deux droites physiques sont dites parallèles si elles n'ont aucun point en commun ou si elles sont confondues. Étant donnée une droite physique et un point du plan physique il existe une unique droite physique qui passe par ce point et qui est parallèle à la droite physique donnée.

Dans le plan physique, deux droites physiques qui ne sont pas parallèles sont toujours sécantes, ce qui signifie qu'elles ont un unique point en commun.

Les droites physiques du plan physique vérifient la remarquable propriété suivante. Considérons six points différents, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, d'un plan physique. On suppose que les trois droites physiques définies par les couples de points (A_1, A_2), (B_1, B_2) et (C_1, C_2) sont parallèles, de même que les deux droites physiques définies par les couples de points (A_1, B_1) et (A_2, B_2) et que les deux droites physiques définies par les couples de points (A_1, C_1) et (A_2, C_2). Alors les deux droites physiques définies par les couples de points (B_1, C_1) et (B_2, C_2) sont également parallèles.

On observe qu'il existe des transformations du plan physique qui envoient les droites physiques sur les droites physiques (qui respectent l'alignement, qui respectent le parallélisme) mais qui ne sont pas nécessairement des déplacements ou des antidéplacements. On pourrait en décrire à partir de rayons du soleil entrant dans une pièce en traversant la vitre d'une fenêtre qui est encore un exemple de morceau de plan physique, puis se reflétant grâce à un jeu de glaces planes placées (encore des morceaux de plans physiques) dans une pièce pour ressortir de la pièce par la vitre. S'intéresser à ce type de transformations revient à se focaliser sur les propriétés du plan physique associées à l'alignement et au parallélisme, en oubliant la notion de distance. C'est pour comprendre ces transformations et ces propriétés d'alignement et de parallélisme qu'en mathématiques on introduit la notion de plan affine et celle de groupe des transformations affines du plan.

Parmi les transformations du plan physique qui respectent l'alignement et le parallélisme il y a les translations physiques : une translation physique qui n'est pas l'identité bouge tous les points et envoie toute droite sur une droite qui lui est parallèle. Une translation physique est totalement déterminée par la donnée d'un point du plan physique et de son image par la translation physique.

La compréhension mathématique de l'ensemble des translations physiques du plan physique peut se faire grâce à l'introduction de la notion de plan vectoriel réel. Un vecteur représente d'une certaine façon une translation physique. C'est aussi vrai pour le plan affine. Ainsi à tout plan géométrie ou affine est associé un espace vectoriel.

Les couples de réels permettent de décrire des points d'un plan physique, d'un plan affine euclidien, d'un plan affine ou les vecteurs d'un plan vectoriel réel pourvu qu'on ait associé au plan physique, affine euclidien ou affine, un repère cartésien ou qu'on ait associé au plan vectoriel une base. On parle alors, dans le cas du plan physique, affine euclidien ou affine, de coordonnées cartésiennes et éventuellement de plan cartésien, et dans cas du plan vectoriel des coordonnées de vecteurs relativement à la base choisie. Finalement on rapproche les plans physique, affine euclidien, affine et vectoriel (et aussi vectoriel euclidien qui n'a pas été évoqué dans ce texte) de $\mathbf{R}^2$, l'ensemble des couples de réels. Ces rapprochements permettent d'identifier des objets géométriques à des couples de nombres. C'est souvent très pratique mais il faut se souvenir qu'à l'origine les objets sont différents.

Question diverse

Pourquoi l'interpolation affine l d'une fonction f sur un segment $[a,b]$ avec $a < b$ est donnée par la formule

$$l(x) = \frac{1}{b-a}(f(b)(x-a) - f(a)(x-b))$$

si $x \in [a,b]$?

Réponse

Il s'agit de trouver une fonction affine, la fonction l l'est, qui vaut $f(a)$ en a et $f(b)$ en b, la fonction l vérifie bien $l(a) = f(a)$ et $l(b) = g(b)$.

La fonction g est l'unique fonction affine vérifiant ces conditions car une fonction affine est uniquement déterminée par ses valeurs en deux réels distincts.

Cette fonction l est une combinaison linéaire de la fonction affine $(x-a)$ qui s'annule en a seulement et de la fonction affine $(x-b)$ qui s'annule en b seulement. Les coefficients de la combinaison linéaire, $\alpha = \frac{1}{b-a}f(b)$ devant $(x-a)$ et $\beta = -\frac{1}{b-a}f(a)$ devant $(x-b)$ sont choisis pour que que l prenne les valeurs de f en a et b. On peut les retrouver en résolvant le système linéaire d'inconnue (α, β) donné par

$$\begin{cases} f(a) = \alpha \times (a-a) + \beta \times (a-b) \\ f(b) = \alpha \times (b-a) + \beta \times (b-b). \end{cases}$$

qui est équivalent à

$$\begin{cases} f(a) = \beta \times (a-b) \\ f(b) = \alpha \times (b-a). \end{cases}$$

puisque $(a-a) = (b-b) = 0$.

Plus généralement, si $a_0 < ... < a_n$ sont $n+1$ réels distincts appartenant au domaine de définition d'une fonction f alors il existe un et un seul polynôme P de degré au plus n tel que si $i \in \{0,...,n\}$ alors $P(a_i) = f(a_i)$, il s'agit du polynôme d'interpolation de Lagrange défini par

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} f(a_j) \prod_{\substack{0 \le k < \le n \\ k \neq j}} \frac{x-a_k}{a_j-a_k}.$$

Il suffit d'observer que si $j,k \in \{0,...n\}$ alors le polynôme P_j défini par $P_j(x) = \prod_{\substack{0 \le k < \le n \\ k \neq j}} \frac{x-a_k}{a_j-a_k}$ vérifie $P_j(a_i) = 0$ si $j \neq i$ et $P_j(a_i) = 1$ si $j = i$. On a donc bien pour $i \in \{0,...,n\}$

$$\begin{aligned} P(a_i) &= \sum_{j=0}^{n} f(a_j) \prod_{\substack{0 \le k < \le n \\ k \neq j}} \frac{a_i-a_k}{a_j-a_k} \\ &= \sum_{j=0}^{n} f(a_j) P_j(a_i) \\ &= f(a_i). \end{aligned}$$

Question diverse

La preuve suivante de la non existence d'une limite en 0 de la fonction f de $\mathbf{R}^*$ dans $\mathbf{R}$ définie par $\sin(1/x)$ est-elle exacte ? Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ les suites définies par $u_n = \frac{1}{2n\pi}$ et $v_n = \frac{1}{n+\frac{\pi}{2}}$. On a $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$. Or $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} f(v_n) = 1$. Donc f n'a pas de limite en 0.

Réponse

Cette preuve marche bien. Il peut être bien de développer la conclusion de la façon suivante. Si f admet une limite l en 0 alors pour toute suite de $\mathbf{R}^*$ qui tend vers 0 la suite image par f tend vers l et donc $l = 0$ puisque $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = 0$ et $l = 1$ puisque $\lim_{n\to+\infty} f(v_n) = 1$. Aussi, puisque $0 \neq 1$, f n'a pas de limite en 0.

De façon générale pour prouver qu'une fonction f n'a pas de limite en $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty,+\infty\}$ on montre l'existence de deux suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et de $l,l' \in \mathbf{R} \cup \{-\infty,+\infty\}$ tels que $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$, $\lim_{n\to+\infty} v_n = a$, $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = l$, $\lim_{n\to+\infty} f(v_n) = l'$ et $l \neq l'$. On peut aussi montrer l'existence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$ mais telle que $(f(u_n))_{n\in\mathbf{N}}$ n'a pas de limite finie ou infinie.

Question diverse

Pour résoudre des équations différentielles, quand savoir si la méthode de la variation de la constante n'est pas utile ?

Réponse

La méthode de la variation de la constante est une méthode qui a un intérêt surtout théorique :c'est dans les développements théoriques qu'elle relève tout son intérêt. Rares sont les exemples ordinaires où elle est incontournable. En pratique, c'est souvent l'ultime méthode

Quand on résout des équations différentielles linéaires à coefficients constants on recherche souvent les solutions particulières sous une forme type qui dépend du second membre.

Un cas classique et celui d'une équation différentielle du type

$$ay'' + by' + cy = P(x)\exp(vx)\cos(wx+\phi)$$

avec P polynôme de degré p, a, b, c, v, w, ϕ réels et $(a,b) \neq (0,0)$. Une solution particulière est

$$x \mapsto Q(x)\exp(vx)\cos(wx) + R(x)\exp(vx)\sin(wx)$$

où Q et R sont des polynômes de degré au plus $p+2$. Plus précisément, si on note u_1 et u_2 les racines de l'équation caractéristique $az^2 + bz + c = 0$ (il n'y a que u_1 si $a = 0$), on distingue les trois cas suivants.

— Si $v + iw$ est différent des racines u_1 et u_2 les degrés de Q et R peuvent être choisis égaux à p.
— Si $v + iw = u_1$ et $u_1 \neq u_2$ les degrés de Q et R peuvent être choisis égaux à $p+1$.
— Si $v + iw = u_1 = u_2$ les degrés de Q et R peuvent être choisis égaux à $p+2$.

Dans l'équation précédente, si P est une constante et si $v + iw$ est différent des racines u_1 et u_2 (seulement de la racine u_1 si $a = 0$), on peut rechercher une solution particulière sous la forme $\beta\exp(vx)\cos(wx+\psi)$ avec $\beta \in \mathbf{R}$ et si $w = 0$ on peut rechercher une solution particulière sous la forme $Q(x)\exp(vx)$.

Question diverse

Soit $f :]a,b[\to \mathbf{R}$ continue et qui admet $+\infty$ comme limite à droite en a et à gauche en b. Existe t-il m_1 et m_2 deux réels appartenant à $]a,b[$ tels que la restriction de f à $]m_2,b[$ soit strictement croissante et que la restriction de f à $]a,m_1[$ soit strictement décroissante ?

Réponse

Non, converger vers l'infini n'implique pas la monotonicité comme le montre le contre exemple suivant. Soit $f :]-1,1[\to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2} + 2\sin\left(\frac{1}{1-x^2}\right) \text{ si } x \in]-1,1[.$$

Puisque $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{1-x^2} = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{1}{1-x^2} = +\infty$ et que la fonction sinus est bornée, la fonction tend vers $+\infty$ quand x tend vers 1 et quand x tend vers -1.

La fonction f est dérivable et si $x \in]-1,1[$ alors

$$f'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2} \times \left(1 + 2\cos\left(\frac{1}{1-x^2}\right)\right).$$

Or, si on pose $u_n = \sqrt{1 - \dfrac{1}{(1+n)\pi}}$ si $n \in \mathbf{N}$, alors, d'une part $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -u_n = -1$, et d'autre part, puisque

$$\frac{1}{(1-u_n^2)} = \frac{1}{1 - \left(\sqrt{1 - \frac{1}{(1+n)\pi}}\right)^2} = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{(1+n)\pi}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{(1+n)\pi}} = (1+n)\pi,$$

il vient

$$1 + 2\cos\left(\frac{1}{1-u_{2n}{}^2}\right) = 1 + 2\cos\left(\frac{1}{1-(-u_{2n})^2}\right) = -1$$

et

$$1+2\cos\left(\frac{1}{1-u_{2n+1}{}^2}\right)=1+2\cos\left(\frac{1}{1-(-u_{2n+1})^2}\right)=3,$$

ce qui implique $f'(u_{2n})<0$, $f'(u_{2n+1})>0$, $f'(-u_{2n})>0$, $f'(-u_{2n+1})<0$.

Par conséquent la fonction f n'est monotone sur aucun intervalle du type $]m_2,1[$ ou $]-1,m_1[$ avec $m_1,m_2\in]-1,1[$.

Question diverse

Combien d'anagrammes le mot PROFESSEUR possède-t-il ? (exercice 3 de la deuxième sous-partie de la partie Probabilités, statistique du "vrai-faux")

Réponse Considérons d'abord 10 pièces avec le côté pile numéroté de 1 à 10 et le côté face portant respectivement les lettres E, E, R, R, S, S, F, O, P, U. On définit ainsi l'application suivante qui à tout entier de 1 à 10 associe la lettre de la face correspondante :

$$1,2\mapsto \text{E},\ 3,4\mapsto \text{R},\ 5,6\mapsto \text{S},\ 7\mapsto \text{F},\ 8\mapsto \text{O},\ 9\mapsto \text{P},\ 10\mapsto \text{U}.$$

Puisque les côtés pile sont tous différents, il y a $10!$ façons de les ordonner. Mais comme le E est répété deux fois, le R deux fois aussi et le S également deux fois, quand on a ordonné les dix côtés piles d'une façon, en permutant les côtés piles numérotés 1 et 2 et qui correspondent au E, ou en permutant les côtés piles numérotés 3 et 4 et qui correspondent au R ou encore en permutant les côtés piles numérotés 5 et 6 et qui correspondent au S on ne change pas le mot écrit du côté face. C'est pourquoi les $10!$ façons d'ordonner les côtés piles donnent $\dfrac{10!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}=453600$ anagrammes du mot PROFESSEUR.

Question diverse

Comment retrouver les coefficients d'une droite de régression ? (exercice 13 de la deuxième sous-partie de la partie Probabilités, statistique du "vrai-faux")

Réponse

Soit $S=(X,Y)=(x_i,y_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}\in(\mathbf{R}^2)^n$ une série statistique à deux variables X et Y. On suppose que les x_i ne sont pas tous égaux. La droite de régression associée à cette série est la droite d'équation $y=ax+b$ où a et b sont choisis de telle sorte qu'ils minimisent la fonction

$$\begin{aligned}\Theta:\mathbf{R}^2&\to\mathbf{R}\\(\alpha,\beta)&\mapsto\sum_{i=1}^n(y_i-(\alpha x_i+\beta))^2\end{aligned}$$

et plus précisément (a,b) vérifient $\Theta(a,b)<\Theta(\alpha,\beta)$ quel que soit $(\alpha,\beta)\in\mathbf{R}^2\setminus\{(a,b)\}$. Cette droite de régression permet d'approximer de façon *optimale* la série $S=(X,Y)=(x_i,y_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}\in(\mathbf{R}^2)^n$ par une série *affine* $\tilde{S}=(X,\tilde{Y})=(x_i,\tilde{y}_i=\alpha x_i+\beta)_{i\in\{1,\dots,n\}}\in(\mathbf{R}^2)^n$.

On va montrer l'existence et l'unicité de (a,b).

On note $E(X)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i$ et $\mathrm{E}(Y)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n y_i$ les espérances de X et Y.

On note aussi $\mathrm{V}(X)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n(x_i-\mathrm{E}(X))^2$ et $\mathrm{V}(Y)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n(y_i-\mathrm{E}(Y))^2$ les variances de X et Y et $\mathrm{cov}(X,Y)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n(x_i-\mathrm{E}(X))(y_i-\mathrm{E}(Y))$ la covariance de X et Y.

Puisque les x_i ne sont pas tous égaux, $\mathrm{V}(X) \neq 0$.

On considère $S = (X', Y') = (x'_i, y'_i)_{i \in \{1,\dots,n\}} \in (\mathbf{R}^2)^n$ la série donnée par

$$x'_i = x_i - \mathrm{E}(X) \text{ et } y'_i = y_i - \mathrm{E}(Y) \text{ si } i \in \{1,\dots,n\}.$$

On a

$$\mathrm{E}(X') = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x'_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mathrm{E}(X)) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) - \mathrm{E}(X) = 0$$

et

$$\mathrm{E}(Y') = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y'_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mathrm{E}(Y)) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \mathrm{E}(Y) = 0.$$

On a donc aussi

$$\mathrm{V}(X') = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i'^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mathrm{E}(X))^2 = \mathrm{V}(X)$$

$$\mathrm{V}(Y') = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i'^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mathrm{E}(Y))^2 = \mathrm{V}(Y)$$

et

$$\mathrm{cov}(X', Y') = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x'_i y'_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mathrm{E}(X))(y_i - \mathrm{E}(Y)) = \mathrm{cov}(X, Y).$$

On va montrer que le couple (a,b) qui minimise Θ et qui donne donc les coefficients de la droite de régression associée à la série statistique S est

$$(a,b) = \left(\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\mathrm{V}(X)}, \mathrm{E}(Y) - \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\mathrm{V}(X)}\mathrm{E}(X)\right).$$

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$. Alors, en posant $\beta' = \beta - \mathrm{E}(Y) + \alpha\mathrm{E}(X)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\Theta(\alpha,\beta) &= \sum_{i=1}^{n}(y_i - (\alpha x_i + \beta))^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\big((y'_i + \mathrm{E}(Y)) - (\alpha(x'_i + \mathrm{E}(X)) + (\beta' - \alpha\mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)))\big)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(y'_i - (\alpha x'_i + \beta'))^2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i'^2\right)\alpha^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n} x'_i y'_i\right)\alpha + 2\left(\sum_{i=1}^{n} x'_i\right)\alpha\beta' + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i'^2\right) - 2\left(\sum_{i=1}^{n} y'_i\right)\beta' + \beta'^2.
\end{aligned}$$

Puisque

$$\sum_{i=1}^{n} x_i'^2 = \mathrm{V}(X') = \mathrm{V}(X),$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i'^2 = \mathrm{V}(Y') = \mathrm{V}(Y),$$

$$\sum_{i=1}^{n} x'_i y'_i = \mathrm{cov}(X', Y') = \mathrm{cov}(X, Y),$$

$$\sum_{i=1}^{n} x'_i = \mathrm{E}(X') = 0 = \mathrm{E}(Y') = \sum_{i=1}^{n} y'_i$$

et

$$\beta' = \beta - \mathrm{E}(Y) + \alpha \mathrm{E}(X)$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\Theta(\alpha,\beta) &= \mathrm{V}(X)\alpha^2 - 2\mathrm{cov}(X,Y)\alpha + \mathrm{V}(Y) + (\beta - \mathrm{E}(Y) + \alpha\mathrm{E}(X))^2 \\
&= \mathrm{V}(X)\left(\alpha - \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\mathrm{V}(X)}\right)^2 - 2\frac{\mathrm{cov}(X,Y)^2}{\mathrm{V}(X)} + \mathrm{V}(Y) + (\beta - \mathrm{E}(Y) + \alpha\mathrm{E}(X))^2 \\
&\geq \mathrm{V}(Y) - \frac{\mathrm{cov}(X,Y)^2}{\mathrm{V}(X)}.
\end{aligned}$$

et le minimum de Θ est atteint si et seulement si les deux termes carrés

$$\left(\alpha - \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\mathrm{V}(X)}\right)^2 \text{ et } (\beta - \mathrm{E}(Y) + \alpha\mathrm{E}(X))^2$$

qui apparaissent dans l'expression de Θ sont nuls c'est à dire si et seulement si

$$\alpha = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\mathrm{V}(X)} \text{ et } \beta = \mathrm{E}(Y) - \alpha\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y) - \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\mathrm{V}(X)}\mathrm{E}(X).$$

Remarquons que la fonction Θ s'annule si et seulement si

$$\mathrm{V}(Y) - \frac{\mathrm{cov}(X,Y)^2}{\mathrm{V}(X)} = 0$$

c'est à dire si et seulement si

$$\mathrm{V}(X) \times \mathrm{V}(Y) = \mathrm{cov}(X,Y)^2.$$

On peut donner une interprétation géométrique de l'annulation de Θ en munissant l'espace $\mathbf{R}^n$ du produit scalaire défini par

$$< U,V >= \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

pour tout $U = (u_1,...,u_n) \in \mathbf{R}^n n$ et pour tout $V = (v_1,...,v_n) \in \mathbf{R}^n$ et de la norme euclidienne $|| \;\; ||$ associée : $||U||^2 =< U,U >$ si $U \in \mathbf{R}^n$.

On a alors

$$V(X) = ||X'||^2,\ V(Y) = ||Y'||^2 \text{ et } \mathrm{cov}(X,Y) =< X',Y' >$$

avec $X' = (x_1 - \mathrm{E}(X),...,x_n - \mathrm{E}(X))$ et $Y = (y_1 - \mathrm{E}(Y),...,y_n - \mathrm{E}(Y))$. Ainsi Θ s'annule si et seulement si

$$||X'||^2 \times ||Y'||^2 =< X',Y' >^2$$

c'est à dire si et seulement si X' et Y' sont liés, ce qui est équivalent au fait les n points $(x_1,y_1),...,(x_n,y_n)$ sont alignés.