Université de Rennes 1
UFR Mathématiques

M1 MEEF PLC Maths - S1
2020-2021

Analyse - Memento

Où on essaie, en suivant les conseils de Jean Dieudonné,
de MAJORER, MINORER, APPROCHER

Version provisoire du 20 décembre 2023

Table des matières

1 Limites des suites numériques

1.1 Qu'est-ce qu'une suite numérique ?

Définition 1 Une suite numérique est une application de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$. Une suite numérique u est parfois notée $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et le réel u_n, appelé n-ème terme de la suite u (ou terme de rang n ou terme général), désigne l'image $u(n)$ de l'entier n par u.

1.2 Rappeler la définition d'une suite convergente.

Définition 2 Une suite numérique $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est dite convergente s'il existe un réel l appelé limite de la suite u et qui vérifie la propriété suivante. Quel que soit l'intervalle ouvert qui contient l il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle. Autrement dit, la suite numérique $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est dite convergente si l'assertion suivante est vraie :

$$\exists l \in \mathbf{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N}\ (n \geq N) \Rightarrow (|u_n - l| < \varepsilon).$$

Proposition 1 Si une suite numérique $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge et a pour limite les réels l et l' alors $l = l'$: la limite d'une suite convergente est unique.

Preuve On suppose que $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge et a pour limite les réels l et l'. Si $\varepsilon > 0$ il existe donc $N, N' \in \mathbf{N}$ tels que si $n \in \mathbf{N}$ alors $n \geq N$ implique $|u_n - l| < \varepsilon$ et $n \geq N'$ implique $|u_n - l'| < \varepsilon$. En prenant $n = \max(N, N')$, on obtient $|l - l'| \leq |u_n - l| + |u_n - l'| < 2\varepsilon$. Or tout réel strictement positif s'écrit sous la forme 2ε avec $\varepsilon > 0$. Donc $|l - l'|$ est nul car strictement inférieur à tout réel strictement positif et la limite l est bien égale à l'.

Notation Si une suite numérique $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge et a pour limite le réel l on dit que u tend ou converge vers l et on le note

$$\lim u = \lim(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \lim_{n\to+\infty} u_n = l.$$

Rappel 1 Si $x \in \mathbf{R}$ il existe un unique entier relatif noté $\mathrm{Ent}(x)$, appelé partie entière de x et qui vérifie $\mathrm{Ent}(x) \leq x < x+1$. Ce résultat est une conséquence du caractère archimédien du corps des réels (si $x, y \in \mathbf{R}$ et $y > 0$ il existe un entier naturel $n \in \mathbf{N}$ tel que $x < ny$) et du fait que l'ordre sur l'ensemble des entiers naturels est un bon ordre (tout sous-ensemble non vide de $\mathbf{N}$ possède un plus petit élément).

1.3 Donner des exemples simples, tous justifiables à l'aide de la définition.

Exemple 1 Toute suite constante est convergente et sa limite est égale à sa valeur.

Preuve Soit λ la valeur de la suite constante considérée. Si $\varepsilon > 0$ et si $n \in \mathbf{N}$ alors $|u_n - \lambda| = 0 < \varepsilon$. La suite est donc bien convergente vers λ.

Exemple 2 La suite $u = (\frac{1}{1+n})_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente de limite 0.

Preuve Si $\varepsilon > 0$ et si n est un entier supérieur ou égal à la partie entière de $\frac{1}{\varepsilon}$ alors $1 + n > \frac{1}{\varepsilon} > 0$ et donc $0 < \frac{1}{1+n} < \varepsilon$. La suite est donc bien convergente vers 0.

Exemple 3 La suite $u = (\frac{1}{2^n})_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente de limite 0.

Preuve Si $\varepsilon > 0$ et si n est un entier strictement supérieur à $\frac{1}{\varepsilon}$ alors $2^n > n$ et $n > \frac{1}{\varepsilon} > 0$. Par conséquent $0 < \frac{1}{2^n} < \varepsilon$. La suite est donc bien convergente vers 0.

Remarque 1 Une raison (à méditer) pour laquelle 2^n est strictement supérieur à n est que 2^n est le nombre de sous-ensembles d'un ensemble à n éléments et que l'ensemble des parties d'un ensemble a un cardinal strictement plus grand que l'ensemble lui-même (que l'ensemble soit fini ou infini). En effet puisque si E est un ensemble et f est une application de E dans l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ de ses sous-ensembles alors l'ensemble $F = \{x \in E : x \notin f(x)\}$ est un élément de $\mathcal{P}(E)$ mais n'est l'image d'aucun élément de E et donc f n'est pas surjective.

Exemple 4 (suite géométrique de raison dans $]0,1[$) Si $a > 0$ la suite $u = (\frac{1}{(1+a)^n})_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente de limite 0.

Preuve Pour établir ce résultat montrons tout d'abord par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ que $1 \leq (1+a)^n$ et que $na < (1+a)^n$ si $n \in \mathbf{N}$. Ces inégalités sont vraies si $n = 0$ car elles s'écrivent alors $1 \leq 1 = (1+a)^0$ et $0 = 0a < 1 = (1+a)^0$. Il suffit donc de vérifier qu'elles sont héréditaires pour conclure à leur véracité. Considérons donc $n \in \mathbf{N}$ tel que $1 \leq (1+a)^n$ et $na < (1+a)^n$. Puisque $0 < a$ on a $1 < 1+a$ et puisque $1 \leq (1+a)^n$ il vient $1 \leq (1+a)^{n+1}$. Il vient aussi $a \leq a(1+a)^n$. Ceci entraîne aussi, combiné à l'hypothèse $na < (1+a)^n$

$$(n+1)a = na + a < (1+a)^n + a(1+a)^n = (1+a)^{n+1},$$

c'est à dire $(n+1)a < (1+a)^{n+1}$. Considérons maintenant $\varepsilon > 0$. D'après ce qui vient d'être établi, tout entier n strictement supérieur à $\frac{1}{a\varepsilon}$ est tel que $(1+a)^n > na > \frac{1}{\varepsilon} > 0$ et donc $0 < \frac{1}{(1+a)^n} < \frac{1}{na} < \varepsilon$.

Exemple 5 (théorème des gendarmes ou d'encadrement) Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $v = (v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $w = (w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ trois suites numériques. On suppose que u et w sont convergentes et tendent vers la même limite $l \in \mathbf{R}$. Si pour tout entier n les inégalités $u_n \leq v_n \leq w_n$ sont vérifiées alors v est aussi convergente et tend vers l.

Preuve Soit $\varepsilon > 0$. Puisque u et w tendent vers l et que $\frac{1}{3}\varepsilon > 0$ il existe $N_1, N_2 \in \mathbf{N}$ tels que si $n \in \mathbf{N}$ alors $|u_n - l| < \frac{1}{3}\varepsilon$ dès que $n \geq N_1$ et $|w_n - l| < \frac{1}{3}\varepsilon$ dès $n \geq N_2$. Soit $N = \max(N_1, N_2)$ et soit $n \geq N$. On a $|u_n - l| < \frac{1}{3}\varepsilon$ et $|w_n - l| < \frac{1}{3}\varepsilon$. Or $u_n \leq v_n \leq w_n$ donc $|v_n - u_n| \leq |w_n - u_n| \leq |u_n - l| + |w_n - l|$ (inégalité triangulaire). Par conséquent $|v_n - l| \leq |v_n - u_n| + |u_n - l| \leq |u_n - l| + |w_n - l| + |u_n - l|$ et comme chaque terme est strictement majoré par $\frac{1}{3}\varepsilon$ il vient $|v_n - l| < \varepsilon$. Ceci signifie que v est convergente et tend vers l.

1.4 Rappeler la définition d'une suite divergente.

Définition 3 Une suite numérique $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est dite divergente si elle n'est pas convergente, c'est à dire si quel que soit le réel l il existe un intervalle ouvert qui contient l tel que quel que soit le rang considéré il existe un terme de la suite de rang au moins égal qui n'appartient à cet intervalle. Autrement dit, la suite numérique $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est divergente si l'assertion suivante est vraie :

$$\forall l \in \mathbf{R}\ \exists\varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbf{N}\ \exists n \in \mathbf{N}\ (n \geq N) \wedge (|u_n - l| \geq \varepsilon).$$

On dit qu'une suite numérique $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ diverge vers $+\infty$ si pour tout réel il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite lui sont supérieurs :

$$\forall K \in \mathbf{R}\ \exists N \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N}\ (n \geq N) \Rightarrow (u_n > K).$$

On dit qu'une suite numérique $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ diverge vers $-\infty$ si pour tout réel il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite lui sont inférieurs :

$$\forall K \in \mathbf{R}\ \exists N \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N}\ (n \geq N) \Rightarrow (u_n < K).$$

1.5 Donner des exemples simples, tous justifiables à l'aide de la définition.

Exemple 6 La suite $u = ((-1)^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est divergente.

Preuve Raisonnons par l'absurde. On suppose que u tend vers un réel l et on montre que ceci entraîne une contradiction. Soit $\varepsilon = 1$. Si u converge il existe un rang N tel que si $n \geq N$ alors $|u_n - l| < 1$. Puisque $N \leq 2N < 2N+1$ on a $|1-l| = |u_{2N} - l| < 1$ et $|-1-l| = |u_{2N+1} - l| < 1$. Il vient donc

$$2 = |1-(-1)| \leq |1-l| + |-1-l| < 1+1 = 2.$$

C'est la contradiction recherchée.

Exemple 7 La suite $u = (n)_{n\in\mathbf{N}}$ est divergente, elle est même divergente vers $+\infty$.

Preuve Soit $l \in \mathbf{R}$. Si $\varepsilon > 0$, quel que soit l'entier naturel N alors pour tout entier naturel n au moins égal au maximum entre N et la partie entière de $l+\varepsilon+1$ on a $|u_n - l| > \varepsilon$ et $u_n > l$. Par conséquent la suite u ne converge pas vers l quel que soit $l \in \mathbf{R}$, la suite u est donc divergente. De plus elle est divergente vers $+\infty$.

Exemple 8 La suite $u = (2^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est divergente, elle est même divergente vers $+\infty$.

Preuve Soit $l \in \mathbf{R}$. Si $\varepsilon > 0$, quel que soit l'entier naturel N alors pour tout entier naturel n au moins égal au maximum entre N et la partie entière de $l+\varepsilon+1$ on a $|u_n - l| > \varepsilon$ car $l+\varepsilon < n < 2^n$ et $u_n > l$. Par conséquent la suite u ne converge pas vers l quel que soit $l \in \mathbf{R}$, la suite u est donc divergente. De plus elle est divergente vers $+\infty$. En effet quel que soit $K \in \mathbf{R}$ si on pose $N = \max(0, \mathrm{Ent}(K)+1)$ alors pour tout entier naturel n, $u_n > K$ dès que $n \geq N$.

Exemple 9 (suite géométrique de raison dans $]1,+\infty[$) Si $a > 0$ la suite $u = ((1+a)^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est divergente, elle est même divergente vers $+\infty$.

Preuve Soit $l \in \mathbf{R}$. Si $\varepsilon > 0$, quel que soit $N \in \mathbf{N}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$ au moins égal au maximum entre N et la partie entière de $\frac{(l+\varepsilon)}{a}+1$ on a $|u_n - l| > \varepsilon$ car $l+\varepsilon < na < (1+a)^n$ et $u_n > l$. Par conséquent la suite u ne converge pas vers l quel que soit $l \in \mathbf{R}$, la suite u est donc divergente. De plus elle est divergente vers $+\infty$. En effet quel que soit $K \in \mathbf{R}$ si on pose $N = \max(0, \mathrm{Ent}(\frac{K}{a})+1)$ alors pour tout entier naturel n, $u_n > K$ dès que $n \geq N$.

Exemple 10 (théorème des gendarmes *infinis* ou d'encadrement *infini*) Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $v = (v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $w = (w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ trois suites numériques. On suppose que u et w tendent vers la même limite infinie. Si pour tout entier n les inégalités $u_n \leq v_n \leq w_n$ sont vérifiées alors v tend aussi vers cette même limite infinie.

Preuve Soit $K \in \mathbf{R}$. Supposons que u et w tendent vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$). Il existe donc $N_1, N_2 \in \mathbf{N}$ tels que si $n \in \mathbf{N}$ alors $u_n > K$ (respectivement $u_n < K$) dès que $n \geq N_1$ et $w_n > K$ (respectivement $w_n < K$) dès $n \geq N_2$. Soit $N = \max(N_1, N_2)$ et soit $n \geq N$. On a $u_n > K$ et $w_n > K$ (respectivement $u_n < K$) et $w_n < K$). Or $u_n \leq v_n \leq w_n$ donc $v_n > K$ (respectivement $v_n < K$). Ceci signifie que v tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si u et w tendent vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$).

1.6 Limites et inégalités

Proposition 2 Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de limite l finie ou infinie et soit $K \in \mathbf{R}$. Supposons $K > l$ (respectivement $K < l$). Il existe alors $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n < K$ (respectivement $u_n > K$) dès que $n \geq N$.

Preuve Si $l = +\infty$ ou $l = -\infty$ l'énoncé correspond à la définition de limite infinie. Supposons $l \in \mathbf{R}$ et posons $\varepsilon = |K - l|$. Puisque $\varepsilon > 0$ et que u converge vers l il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon$ dès que $n \geq N$. Ainsi si $K > l$ (respectivement $K < l$) alors $K = l + \varepsilon$ (respectivement $K = l - \varepsilon$) et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n < l + \varepsilon = K$ (respectivement $u_n > l - \varepsilon = K$) dès que $n \geq N$.

Proposition 3 (théorème de comparaison) Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ deux suites numériques qui admettent l et l' comme limites finies ou infinies. Si pour tout n, $u_n \leq v_n$ alors $l \leq l'$.

Preuve Si ce n'est pas le cas il existe $K \in \mathbf{R}$ tel que $l' < K < l$. D'après la proposition précédente appliquée aux deux suites u et v il existe un rang N tel que si $n \in \mathbf{N}$ vérifie $n \geq N$ alors $u_n > K$ et $v_n < K$ donc $v_n < u_n$, ce qui n'est pas possible. Ainsi $l \leq l'$.

1.7 Montrer qu'une suite convergente est bornée.

Preuve Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite convergente vers un réel l. Soit $\varepsilon = 1$. Il existe un entier N tel que pour tout entier n supérieur ou égal à N il vient $|u_n - l| < 1$. On note

$$K = 1 + |l| + \max\{|u_k| : k \in \mathbf{N} \text{ et } k \leq N\}.$$

Puisque $\{|u_k| : k \in \mathbf{N} \text{ et } k \leq N\}$ est fini K est un réel et par construction c'est un majorant de $(|u_n|)_{n \in \mathbf{N}}$. La suite u est donc bornée.

Remarque 2 Puisque une suite convergente est bornée, une suite divergente vers $+\infty$ ou divergente vers $-\infty$ est divergente.

1.8 Rappeler la définition de la borne supérieure d'une partie E de R.

Définition 4 Un sous-ensemble E de $\mathbf{R}$ admet comme borne supérieure M si M est un majorant de E et si c'est le plus petit des majorants.

Remarque 3 Avec cette définition on autorise à $+\infty$ et $-\infty$ à être des bornes supérieures.

Notation La borne supérieure d'un sous-ensemble E de $\mathbf{R}$ est notée $\mathrm{Sup}(E)$ ou $\mathrm{Sup}E$.

Remarque 4 On définit de façon analogue la borne inférieure d'un sous-ensemble E de $\mathbf{R}$. C'est un minorant de E et c'est le plus grand des minorant. On la note $\mathrm{Inf}(E)$ ou $\mathrm{Inf}E$. Si m est borne inférieure de E alors $-m$ est borne supérieure de $-E$ et réciproquement.

1.9 Écrire (à l'aide de quantificateurs) une phrase mathématique signifiant que le réel M est la borne supérieure de la partie non vide E de R.

Caractérisation 1 (Caractérisation quantifiée de la borne supérieure d'un sous-ensemble de réels) On dit que $M \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ est la borne supérieure du sous-ensemble E de $\mathbf{R}$ si et seulement

$$(\forall x \in E \; x \leq M) \wedge (\forall x \in \mathbf{R} \; (x < M) \Rightarrow (\exists y \in E \; x < y \leq M)).$$

Remarque 5 Cette caractérisation marche pour $M \in \mathbf{R}$ mais aussi pour $M = +\infty$ ou $M = -\infty$.

Caractérisation 2 (Seconde caractérisation quantifiée de la borne supérieure d'un sous-ensemble de réels) Le réel M est la borne supérieure du sous-ensemble E de $\mathbf{R}$ si et seulement

$$(\forall x \in E \; x \leq M) \wedge (\forall \varepsilon \in \mathbf{R} \; (\varepsilon > 0) \Rightarrow (\exists y \in E \; M - \varepsilon < y \leq M)).$$

Remarque 6 Cette caractérisation ne marche que pour $M \in \mathbf{R}$ mais pas pour $M = +\infty$ ou $M = -\infty$.

Proposition 4 (Propriété fondamentale de $\mathbf{R}$) Tout sous-ensemble de $\mathbf{R}$ non vide et majoré admet une borne supérieure réelle.

Remarque 7 Cette propriété est spécifique à $\mathbf{R}$. Par exemple le sous-ensemble de $\mathbf{Q}$ des rationnels positifs et dont le carré est inférieur ou égal à 2 n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbf{Q}$ car $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Remarque 8 Tout sous-ensemble de $\mathbf{R}$ non vide et minoré admet une borne inférieure réelle.

Proposition 5 (caractérisation des intervalles de $\mathbf{R}$) Un sous-ensemble non vide I de $\mathbf{R}$ qui contient tout segment $[a,b]$ dès que $a \leq b \in I$ est un intervalle.

Preuve Tout intervalle I contient bien tout segment $[a,b]$ dès que $a \leq b \in I$. Réciproquement considérons I qui contient tout segment $[a,b]$ dès que $a \leq b \in I$. Il suffit de montrer que

$$]\mathrm{Inf}(I), \mathrm{Sup}(I)[\subset I \subset [\mathrm{Inf}(I), \mathrm{Sup}(I)]$$

car si c'est le cas alors I est l'un des quatre intervalles suivants : $]\mathrm{Inf}(I), \mathrm{Sup}(I)[$, $[\mathrm{Inf}(I), \mathrm{Sup}(I)[$, $]\mathrm{Inf}(I), \mathrm{Sup}(I)]$ ou $[\mathrm{Inf}(I), \mathrm{Sup}(I)]$. Soit $x \in]\mathrm{Inf}(I), \mathrm{Sup}(I)[$. Par définition de la borne inférieure et de la borne supérieure il existe $a, b \in I$ tels que $a < x < b$. Par conséquent on a $x \in [a,b] \subset I$ et $x \in I$. Ceci prouve $]\mathrm{Inf}(I), \mathrm{Sup}(I)[\subset I$. Si $y \in \mathbf{R}$ vérifie $y < \mathrm{Inf}(E)$ alors $y \notin E$ par définition de la borne inférieure et s'il vérifie $y > \mathrm{Sup}(E)$ alors $y \notin E$ par définition de la borne supérieure. Ceci prouve $I \subset [\mathrm{Inf}(I), \mathrm{Sup}(I)]$.

1.10 La borne supérieure de E est-elle toujours un élément de E ? Donner des exemples.

Réponse Non, la borne supérieure de $\mathbf{R}$ est $+\infty$, celle du vide est $-\infty$, celle de $]0,1[$ est 1, celle de $\{-\frac{1}{1+n} : n \in \mathbf{N}\}$ est 0.

Proposition 6 Soit $E \subset \mathbf{R}$ non vide. Alors il existe une suite croissante d'éléments de E qui tend vers $\mathrm{Sup}(E)$.

Preuve Si $\mathrm{Sup}(E) \in E$ il suffit de prendre la suite constante égale à $\mathrm{Sup}(E)$. On suppose dorénavant que $\mathrm{Sup}(E) \notin E$. On considère la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par récurrence de la façon suivante. On choisit $u_0 \in E$ (c'est possible car E est non vide). Soit $n \in \mathbf{N}$. On suppose que u_n est construit. L'ensemble E_n défini par $E_n = \{x \in E : (x > u_n) \wedge (x > \mathrm{Sup}(E) - \frac{1}{1+n})\}$ si $\mathrm{Sup}(E) \in \mathbf{R}$ et par $E_n = \{x \in E : (x > u_n) \wedge (x > n)\}$ si $\mathrm{Sup}(E) = +\infty$ est non vide et on choisit donc u_{n+1} dans E_n. Par construction on a $u_n < u_{n+1}$ si $n \in \mathbf{N}$ et donc u est strictement croissante. Il reste à montrer que u tend vers $\mathrm{Sup}(E)$. Soit $\varepsilon > 0$ si $\mathrm{Sup}(E) \in \mathbf{R}$ ou $K \in \mathbf{R}$ si $\mathrm{Sup}(E) = +\infty$. On pose $N = 1 + \mathrm{Ent}(\frac{1}{\varepsilon})$ si $\mathrm{Sup}(E) \in \mathbf{R}$ ou $N = \mathrm{Ent}(|K|) + 1 \in \mathbf{R}$ si $\mathrm{Sup}(E) = +\infty$. Alors pour tout entier $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geq N$ on a $|u_n - \mathrm{Sup}(E)| < \varepsilon$ si $\mathrm{Sup}(E) \in \mathbf{R}$ et $u_n > K$ si $\mathrm{Sup}(E) = +\infty$. Ceci prouve que u tend bien vers $\mathrm{Sup}(E)$.

1.11 Démontrer que si $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite croissante et non majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.

Preuve Soit $K \in \mathbf{R}$. Puisque $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ n'est pas majorée, K n'est pas un majorant et il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $u_N > K$. Puisque $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est croissante, pour tout entier n supérieur ou égal à N on a $u_n > K$.

Ceci établit que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ diverge vers $+\infty$.

1.12 Démontrer que si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite croissante et majorée alors elle converge.

Preuve Soit $E = \{u_n : n \in \mathbf{N}\}$ l'ensemble des valeurs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Par hypothèse il est majoré. Il admet donc une borne supérieure notée l qui majore tous les termes de la suite. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $l-\varepsilon < l$ il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $u_N > l-\varepsilon$. Puisque $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante et que l est un majorant de la suite pour tout entier n supérieur ou égal à N il vient $l-\varepsilon < u_n \leq l$. Ceci établit que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers l.

1.13 Établir une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite décroissante soit convergente.

Solution Soit $v = (v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite décroissante. Elle est convergente si et seulement si elle est minorée. En effet si v est minorée alors $-v$, qui est croissante puisque v est décroissante, est majorée donc convergente d'après ce qui précède et réciproquement, si v est convergente elle est bornée donc minorée.

1.14 Quand dit-on que deux suites réelles sont adjacentes ?

Définition 5 Les suites numériques $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont dites adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante et si la différence $v-u$ converge vers 0.

Théorème 1 Si les suites numériques $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont adjacentes alors elles sont convergentes et elles ont même limite.

Preuve Considérons u et v deux suites adjacentes. Quitte à permuter u et v on peut supposer u croissante et v décroissante. La différence $v-u$ est donc décroissante. S'il existe un rangs N tel que $v_N - u_N < 0$ alors pour tout $n \geq N$ $v_n - u_n \leq v_N - u_N < 0$ et donc la différence $v-u$ ne peut pas tendre vers 0. Or elle tend vers 0 puisque u et v sont adjacentes. Par conséquent pour tout rang n $v_n - u_n \geq 0$, c'est à dire $u_n \leq v_n$. Ainsi on vérifie par récurrence

$$u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0.$$

La suite u est donc croissante et majorée par v_0. Elle est donc convergente. Puisque $v = u + (v-u)$, que u convergente et que $v-u$ convergente vers 0, v est aussi convergente de même limite que u.

1.15 Énoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Définition 6 Soit $v = (v_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ une suite numérique. Une suite de la forme $(v_{\phi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ où $\phi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ est strictement croissante es appelée sous-suite ou suite extraite de v.

Théorème 2 (Théorème de Bolzano-Weierstrass) Toute suite numérique bornée possède une sous-suite convergente : si $a, b \in \mathbf{R}$ vérifient $a < b$ et si $v = (v_n)_{n\in\mathbf{N}} \in [a,b]^{\mathbf{N}}$ alors il existe $\phi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante telle que la sous-suite $(v_{\phi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente.

Preuve (Idée de preuve (par dichotomie)) Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in [a,b]^{\mathbf{N}}$, $w = (w_n)_{n\in\mathbf{N}} \in [a,b]^{\mathbf{N}}$ et $\phi = (\phi_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ définies par récurrence de la façon suivante. On pose $u_0 = a$, $w_0 = b$ et $\phi_0 = 0$. L'ensemble $\{k \in \mathbf{N} : (k > \phi_0) \wedge (u_0 \leq v_k \leq w_0)\}$ est infini. Soit $n \in \mathbf{N}$. On suppose u_n, w_n et ϕ_n définis et $\{k \in \mathbf{N} : (k > \phi_n) \wedge (u_n \leq v_k \leq w_n)\}$ infini. Si $\{k \in \mathbf{N} : (k > \phi_n) \wedge (u_n \leq v_k \leq \frac{1}{2}(u_n + w_n))\}$

est infini on note ϕ_{n+1} son plus petit élément et on pose $u_{n+1} = u_n$ et $w_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + w_n)$. Sinon l'ensemble $\{k \in \mathbf{N} : (k > \phi_n) \wedge (\frac{1}{2}(u_n + w_n) < v_k \leq w_n)\}$ est infini. On note alors ϕ_{n+1} son plus petit élément et on pose $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + w_n)$ et $w_{n+1} = w_n$. Par construction u est croissante, w décroissante, $w_n - u_n = \frac{1}{2^n}(b-a)$ et $u_n \leq v_{\phi_n} \leq w_n$ si $n \in \mathbf{N}$. Par conséquent $w - u$ est convergente vers 0 et u et w sont adjacentes donc convergentes vers la même limite l. Puisque $u_n \leq v_{\phi_n} \leq w_n$ si $n \in \mathbf{N}$ le théorème des gendarmes assure que la sous-suite $(v_{\phi(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ est convergente également vers l.

1.16 Remarques sur $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}^2$, $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}$ et $\mathbf{R}$.

Définition 7 (ensemble fini) Un ensemble E est dit fini s'il est vide ou s'il existe un entier naturel n et une bijection entre $\{1, ..., n\}$ et E. Cet entier est le nombre d'éléments de E. Un ensemble est dit infini s'il n'est pas fini.

Exemple 11 Par exemple l'ensemble $\mathbf{N}$ des entiers naturels n'est pas fini.

Preuve Pour le vérifier on observe que si $n \in \mathbf{N}$ et si f est une application de $\{1, ..., n\}$ dans $\mathbf{N}$ alors f n'est pas surjective car le nombre $1 + \sum_{k=0}^{n} f(k)$ qui est strictement supérieur à tout $f(k)$, $k \in \{0, ..., n\}$ n'a pas d'antécédent.

Caractérisation 3 Un ensemble non vide E est infini si et seulement s'il existe une bijection entre E et $E \setminus \{e\}$ quel que soit $e \in E$.

Preuve On montre d'abord par récurrence sur n que si E est un ensemble à $n+1$ éléments alors il n'existe pas de bijection de E dans $E \setminus \{e\}$ quel que soit $e \in E$. C'est bien vrai si $n = 0$ car alors E est un singleton, $E = \{e\}$ où e est son unique élément et E n'est pas en bijection avec $E \setminus \{e\} = \emptyset$ puisqu'il ne peut y avoir d'application d'un singleton dans le vide. Vérifions l'hérédité. Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que pour tout E ensemble à $n+1$ éléments il n'existe pas de bijection de E dans $E \setminus \{e\}$ quel que soit $e \in E$. Soit E un ensemble à $n+2$ éléments. Raisonnons par l'absurde : on suppose qu'il existe $e \in E$ et une bijection de f de E dans $E \setminus \{e\}$ et montrons que ça conduit à une contradiction. On pose $E' = E \setminus \{e\}$ et $e' = f(e)$. Puisque e n'a pas d'antécédent par f on a $e \neq e'$ et $e' \in E'$. Si $x \in E'$ alors $x \neq e$ et donc, puisque f est injective $f(x) \neq f(e) = e'$. De plus $f(x) \neq e$ car e n'a pas d'antécédent par f. Ainsi $f(E') \subset E' \setminus \{e'\}$ et l'application $g : E' \to E' \setminus \{e'\}$ définie par $g(x) = f(x)$ est bien définie et c'est une bijection. Or E' a $n+1$ éléments et donc, puisque $e' \in E'$, d'après l'hypothèse de récurrence, il ne peut avoir de bijection de E' dans $E' \setminus \{e'\}$. C'est la contradiction recherchée qui achève la preuve de l'hérédité. Il reste maintenant à prouver que si e est un élément d'un ensemble infini E il existe une bijection entre E et $E \setminus \{e\}$. Pour le faire on considère un ensemble non vide E dont on ne dit rien du cardinal et $e \in E$ un élément. Soit alors la suite $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de E construite par récurrence de la façon suivante. On pose $e_0 = e$ et si $n \in \mathbf{N}$ alors $e_{n+1} = e_n$ si $E \setminus \{e_0, ..., e_n\}$ est vide et sinon e_{n+1} est choisi dans $E \setminus \{e_0, ..., e_n\}$. Deux cas se présentent. Le premier est celui où il existe $n \in \mathbf{N}$ tel $e_n = e_{n+1}$. Dans ce cas on note N le plus petit de ces entiers et E est fini et il est en bijection avec $\{0, ..., N\}$. Dans le second cas la suite $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est injective, c'est à dire que si $n \neq n'$ alors $e_n \neq e_{n'}$, l'ensemble E est infini et la fonction f définie par $f(e_n) = e_{n+1}$ si $n \in \mathbf{N}$ et par $f(x) = x$ si $x \in E \setminus \{e_n : n \in \mathbf{N}\}$ est une bijection entre E et $E \setminus \{e\}$.

Définition 8 (cardinalité) On dit que deux ensembles ont même cardinal s'il existe une bijection entre les deux. Puisque la composée de deux bijections est une bijection et puisque toute bijection admet une réciproque qui est elle même une bijection, si E et F ont même cardinal et si F et G ont même cardinal c'est aussi le cas de E et G. Puisque l'identité est une bijection un ensemble a même cardinal que lui-même.

Exemple 12 (dans $\mathbf{R}$) On peut montrer que $\mathbf{R}$ et $]-1, 1[$ ont même cardinal en montrant que l'application f de $\mathbf{R}$ dans $]-1,1[$ définie par $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$ et l'application g de $]-1,1[$ dans $\mathbf{R}$ définie par $g(x)=\tan(\frac{\pi}{2}x)$ sont bijectives.

Définition 9 (dénombrabilité) Un ensemble qui a même cardinal que $\mathbf{N}$ est dit dénombrable.

Exemple 13 (dans $\mathbf{N}$) Par exemple l'application $n\mapsto 2n$ est une bijection de l'ensemble des entiers naturels dans l'ensemble des entiers naturels pairs et l'application $n\mapsto 2n+1$ est une bijection de l'ensemble des entiers naturels dans l'ensemble des entiers naturels impairs. Par conséquent $\mathbf{N}$ et l'ensemble des entiers naturels pairs (ou l'ensemble des entiers naturels impairs) ont même cardinal.

Exemple 14 (dénombrabilité de $\mathbf{N}^2$) En vérifiant que l'application $\alpha:\mathbf{N}^2\to\mathbf{N}$ définie par

$$\alpha(i,j)=\frac{1}{2}(i+j)(i+j+1)+j$$

est une bijection on établit que les ensembles $\mathbf{N}^2$ et $\mathbf{N}$ ont même cardinal.

Exemple 15 (dénombrabilité de $\mathbf{Z}\times\mathbf{N}$) De même l'application $\beta:\mathbf{Z}\times\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ définie par

$$\beta(i,j)=2\alpha(i,j)$$

si $i\geq 0$ et $\beta(i,j)=1+2\alpha(-i,j)$ si $i<0$ est une bijection et donc les ensembles $\mathbf{Z}\times\mathbf{N}$ et $\mathbf{N}$ ont même cardinal.

Exemple 16 (dénombrabilité de $\mathbf{Q}$) Munissons l'ensemble $\mathbf{Q}$ de l'ordre suivant : si $r=\frac{a}{b}$ et $s=\frac{c}{d}$ avec $a,c\in\mathbf{Z}$, $b,d\in\mathbf{N}$, $a\wedge b=c\wedge d=1$ alors $r\leq s$ si $a^2+b^2<c^2+d^2$ ou $a^2+b^2=c^2+d^2$ et $a\leq c$. On peut vérifier qu'on a bien défini une relation d'ordre telle que pour tout $s\in\mathbf{Q}$ l'ensemble $\{r\in\mathbf{Q}:r<s\}$ est fini. Soit $\gamma:\mathbf{Q}\to\mathbf{N}$ définie par $\gamma(s)=$ nombre d'éléments de $\{r\in\mathbf{Q}:r<s\}$. En vérifiant que l'application γ est une bijection on montre que les ensembles $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{N}$ ont même cardinal.

Exemple 17 (non dénombrabilité de $\mathbf{R}$) Expliquons en utilisant un argument dû à Cantor qu'il n'y a pas de bijection de $\mathbf{N}$ dans $[0,1[$, c'est à dire une suite $u\in[0,1[^{\mathbf{N}}$ telle que $[0,1[=\{u_n:n\in\mathbf{N}\}$. Rappelons d'abord que si $x\in[0,1[$ il existe une unique suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}\in\{0,1,2\}^{\mathbf{N}}$ telle que d'une part $x=\sum_{k\in\mathbf{N}}x_k\frac{1}{3^{1+k}}$ et d'autre part s'il existe un entier $K\in\mathbf{N}$ tel que pour tout $k\geq K$ $x_k=x_K$ alors $x_K=0$. Cette suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}\in\{0,1,2\}^{\mathbf{N}}$ sera appelée écriture privilégiée de x. Considérons maintenant une suite $u=(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à valeurs dans $[0,1[$. Pour chaque $n\in\mathbf{N}$ on choisit l'écriture privilégiée de u_n : $u_n=\sum_{k\in\mathbf{N}}u_{n,k}\frac{1}{3^{1+k}}$ avec pour tout $k\in\mathbf{N}$ $u_{n,k}\in\{0,1,2\}$ et s'il existe K tel que pour tout $k\geq K$ $u_{n,k}=u_{n,K}$ alors $u_{n,K}=0$. Considérons le réel $v=\sum_{k\in\mathbf{N}}v_k\frac{1}{3^{1+k}}$ défini de la façon suivante. Soit $k\in\mathbf{N}$. On pose $v_k=1$ si $u_{k,k}\neq 1$ et $v_k=0$ si $u_{k,k}=1$. Par construction le réel v appartient à $[0,1[$ mais n'est pas un terme de la suite u. Par conséquent la suite u ne peut définir une bijection de $\mathbf{N}$ sur $[0,1[$.

1.17 Opérations algébriques sur les limites.

Proposition 7 Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites numériques qui tendent vers $l\in\mathbf{R}$ et $l'\in\mathbf{R}$. Alors la somme $(u_n+v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $l+l'$, le produit $(u_n\times v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $l\times l'$ et, si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}\in\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ ne s'annule pas et $l\neq 0$, $(\frac{1}{u_n})_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $\frac{1}{l}$.

Preuve Soit $\varepsilon>0$. Puisque $\frac{1}{2}\varepsilon>0$ il existe $N_1\in\mathbf{N}$ tel que si $n\geq N_1$ alors $|u_n-l|<\frac{\varepsilon}{2}$, $|v_n-l'|<\frac{\varepsilon}{2}$ et donc $|(u_n+v_n)-(l+l')|\leq|u_n-l|+|v_n-l'|<\varepsilon$. Ainsi la somme $(u_n+v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $l+l'$. Il existe $K > 0$ qui majore les termes $|u_n|$ et $|v_n|$ ainsi que l et l'. Puisque $\frac{1}{2K}\varepsilon > 0$ il existe $N_2 \in \mathbf{N}$ tel que si $n \geq N_2$ alors $|u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2K}$, $|v_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2K}$ et donc

$$|u_n \times v_n - l \times l'| = |(u_n - l) \times v_n + (v_n - l') \times l| \leq |u_n - l| \times |v_n| + |v_n - l'| \times |l| < \varepsilon.$$

Ainsi le produit $(u_n \times v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $l \times l'$. On suppose maintenant que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ ne s'annule pas et que $l \neq 0$. Puisque $l \neq 0$ et $\varepsilon > 0$ on a $\min(\frac{|l|}{2}, \frac{l^2}{2}\varepsilon) > 0$ et donc il existe $N_3 > 0$ tel que si $n \geq N_3$ alors $|u_n - l| < \min(\frac{|l|}{2}, \frac{l^2}{2}\varepsilon)$. Ceci implique que si $n \geq N_3$ alors $|u_n| > \frac{|l|}{2}$ et donc

$$|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}| = \frac{1}{|u_n l|} \times |u_n - l| < \frac{1}{\frac{|l|}{2}|l|} \times \frac{l^2}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Ainsi la suie $(\frac{1}{u_n})_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $\frac{1}{l}$.

Proposition 8 Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites numériques qui tendent vers $+\infty$. Alors la somme $(u_n + v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et le produit $(u_n \times v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tendent vers $+\infty$ et, si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ ne s'annule pas alors $(\frac{1}{u_n})_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0.

Preuve Soit $K \in \mathbf{R}$ et soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_1 \in \mathbf{N}$ tel que si $n \geq N_1$ alors $u_n > \frac{K}{2}$, $v_n > \frac{K}{2}$ et donc $u_n + v_n > K$. Ainsi la somme $(u_n + v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$. Il existe $N_2 \in \mathbf{N}$ tel que si $n \geq N_2$ alors on a $u_n > 1 + |K|$ et $v_n > 1 + |K|$ et donc $u_n \times v_n > (1 + |K|)^2 = 1 + 2|K| + K^2 > K$. Ainsi le produit $(u_n \times v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ ne s'annule pas. Puisque $\frac{1}{\varepsilon} > 0$ il existe $N_3 > 0$ tel que si $n \geq N_3$ alors $u_n > \frac{1}{\varepsilon}$ et par conséquent $0 < \frac{1}{u_n} < \varepsilon$. Ainsi la suite $(\frac{1}{u_n})_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0.

Proposition 9 Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui tend vers $l \in \mathbf{R}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui tend vers $+\infty$. Alors la somme $(u_n + v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$.

Preuve Soit $K \in \mathbf{R}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui est convergente est minorée par un réel L et il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que si $n \geq N$ alors $v_n > K - L$ et donc $u_n + v_n > L + (K - L) = K$. Ainsi la somme $(u_n + v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$.

Proposition 10 Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui tend vers $l > 0$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui tend vers $+\infty$. Alors le produit $(u_n \times v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$.

Preuve Soit $K \in \mathbf{R}$. Il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que si $n \geq N$ alors $|u_n - l| > \frac{l}{2} > 0$, $v_n > \frac{2K}{l}$ et donc

$$u_n \times v_n > \frac{l}{2} \times \frac{2K}{l} = K.$$

Ainsi le produit $(u_n \times v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$.

Proposition 11 Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in]0, +\infty[^{\mathbf{N}}$ tend vers 0 alors la suite $(\frac{1}{u_n})_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$.

Preuve Soit $K \in \mathbf{R}$. Puisque $\frac{1}{1+|K|} > 0$ il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que si $n \geq N$ alors $0 < u_n < \frac{1}{1+|K|}$ et donc $\frac{1}{u_n} > 1 + |K| > K$. Ainsi la suie $(\frac{1}{u_n})_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$.

Proposition 12 La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$ si et seulement si $(-u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $-\infty$.

Preuve Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tende vers $+\infty$ et soit $K \in \mathbf{R}$. Il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que si $n \geq N$ alors $u_n > -K$ et donc $-u_n < K$. La suite $(-u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend donc vers $-\infty$. Réciproquement supposons que $(-u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $-\infty$ et soit $K \in \mathbf{R}$. Il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que si $n \geq N$ alors $-u_n < -K$ et donc $u_n > K$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend donc vers $+\infty$.

Remarque 9 Si on combine par somme, produit ou quotient les suites $((-1)^n+n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(-n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(-n+\frac{(-1)^n}{2}n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(n^2)_{n\in\mathbf{N}}$, $((-1)^n\frac{1}{n})_{n\in\mathbf{N}}$, $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbf{N}}$, $((-1)^n\frac{1}{n^2})_{n\in\mathbf{N}}$, $(\frac{1}{n^2})_{n\in\mathbf{N}}$ on constate que les opérations sur les limites non traitées par les propositions précédentes n'admettent pas de traitement général. On parle de formes indéterminées.

1.18 Suites extraites ou sous-suites et convergence.

Théorème 3 Si une suite numérique est convergente (respectivement divergente vers $+\infty$, vers $-\infty$) alors toute suite extraite est convergente vers la même limite (respectivement divergente vers $+\infty$, vers $-\infty$).

Preuve Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite numérique $\phi:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ strictement croissante. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $l\in\mathbf{R}$. Soit $\varepsilon>0$. Il existe $N\in\mathbf{N}$ tel que si $n\geq N$ alors $|u_n-l|<\varepsilon$. Puisque ϕ est strictement croissante si $n\geq N$ alors $\phi(n)\geq N$ et donc on a aussi $|u_{\phi(n)}-l|<\varepsilon$. Par conséquent la suite extraite $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente de limite l. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ diverge vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$). Soit $K\in\mathbf{R}$. Il existe $N\in\mathbf{N}$ tel que si $n\geq N$ alors $u_n>K$ (respectivement $u_n<K$). Puisque ϕ est strictement croissante si $n\geq N$ alors $\phi(n)\geq N$ et donc on a $u_{\phi(n)}>K$ (respectivement $u_{\phi(n)}<K$). Par conséquent la suite extraite $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ diverge vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$).

Proposition 13 Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite numérique. Si les suites extraites des termes de rang pair $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et impairs $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ tendent vers $l\in\mathbf{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ alors $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers l.

Preuve Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite numérique telle que les suites extraites des termes de rang pair $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et impairs $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ tendent vers $l\in\mathbf{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$. Supposons que $l\in\mathbf{R}$. Soit $\varepsilon>0$. Il existe $N_1\in\mathbf{N}$ tel que si $n\geq N_1$ alors $|u_{2n}-l|<\varepsilon$. Il existe $N_2\in\mathbf{N}$ tel que si $n\geq N_2$ alors $|u_{2n+1}-l|<\varepsilon$. Soit $N=2(N_1+N_2)+1$. Puisque $N\geq 2N_1$ et $N\geq 2N_2+1$, si $n\in\mathbf{N}$ vérifie $n\geq N$ alors il existe $k\in\mathbf{N}$ tel que $k\geq N_1$ et $2k=n$ ou $k\geq N_2$ et $2k+1=n$ et donc $|u_n-l|<\varepsilon$. Par conséquent la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente de limite l. Supposons que $l=+\infty$ (respectivement $-\infty$). Soit $K\in\mathbf{R}$. Il existe $N_1\in\mathbf{N}$ tel que si $n\geq N_1$ alors $u_{2n}>K$ (respectivement $u_{2n}<K$). Il existe $N_2\in\mathbf{N}$ tel que si $n\geq N_2$ alors $u_{2n+1}>K$ (respectivement $u_{2n+1}<K$). Soit $N=2(N_1+N_2)+1$. On a $N\geq 2N_1$ et $N\geq 2N_2+1$. Ainsi, si $n\in\mathbf{N}$ vérifie $n\geq N$ alors il existe $k\in\mathbf{N}$ tel que $k\geq N_1$ et $2k=n$ ou $k\geq N_2$ et $2k+1=n$ et donc $u_n>K$ (respectivement $u_n<K$). Par conséquent la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est divergente vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$).

1.19 Somme des termes d'une suite arithmétique

Définition 10 Une suite arithmétique est une suite de la forme $u_n=u_0\lambda^n$ si $n\in\mathbf{N}$ avec $u_0,\lambda\in\mathbf{R}$. Le nombre λ s'appelle la raison.

Proposition 14 Soit $\lambda\in\mathbf{R}$ tel que $\lambda\neq 1$. Si $n\in\mathbf{N}$ alors $\sum_{k=0}^n\lambda^k=\frac{1-\lambda^{n+1}}{1-\lambda}$.

Preuve On va prouver la propriété $\sum_{k=0}^n\lambda^k=\frac{1-\lambda^{n+1}}{1-\lambda}$ si $\lambda\in\mathbf{R}\setminus\{1\}$ par récurrence sur n. On a bien $\sum_{k=0}^0\lambda^k=1=\frac{1-\lambda^{0+1}}{1-\lambda}$. La propriété est donc vraie au rang 0. Il reste donc à vérifier l'hérédité de cette propriété. Soit $n\in\mathbf{N}$ tel que $\sum_{k=0}^n\lambda^k=\frac{1-\lambda^{n+1}}{1-\lambda}$ si $\lambda\in\mathbf{R}\setminus\{1\}$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n+1}\lambda^k=\sum_{k=0}^{n}\lambda^k+\lambda^{n+1}=\frac{1-\lambda^{n+1}}{1-\lambda}+\lambda^{n+1}=\frac{1-\lambda^{n+2}}{1-\lambda}$$

si $\lambda\in\mathbf{R}\setminus\{1\}$. La propriété est bien héréditaire.

Proposition 15 Soit $\lambda\in\mathbf{R}$ tel que $\lambda\neq 1$. Si $|\lambda|<1$ alors la suite $(\sum_{k=0}^n\lambda^k)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente de limite $\frac{1}{1-\lambda}$. Si $\lambda > 1$ alors la suite $(\sum_{k=0}^{n}\lambda^k)_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement croissante, divergente vers $+\infty$. Si $\lambda < -1$ alors la suite $(\sum_{k=0}^{n}\lambda^k)_{n\in\mathbf{N}}$ divergente, la sous-suite des termes de rang pair tendant vers $+\infty$ et celle des termes de rang impair tendant vers $-\infty$.

Preuve Si $|\lambda| < 1$ alors la suite de terme général $|\lambda|^n$ tend vers 0. C'est donc aussi vrai pour la suite de terme général λ^n. Or si $n \in \mathbf{N}$ alors $\sum_{k=0}^{n}\lambda^k = \frac{1-\lambda^{n+1}}{1-\lambda}$. On déduit des propriétés des limites de suites relativement aux opération algébriques que $(\sum_{k=0}^{n}\lambda^k)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente de limite $\frac{1}{1-\lambda}$. Si $\lambda > 1$ alors la suite de terme général λ^n est minorée par 1 donc si $n \in \mathbf{N}$ on a $\sum_{k=0}^{n+1}\lambda^k - \sum_{k=0}^{n}\lambda^k = \lambda^{n+1} \geq 1$ et $\sum_{k=0}^{n}\lambda^k \geq n$. La suite $(\sum_{k=0}^{n}\lambda^k)_{n\in\mathbf{N}}$ est donc strictement croissante et puisque la suite $(n)_{n\in\mathbf{N}}$ diverge vers $+\infty$ c'est aussi le cas de la suite $(\sum_{k=0}^{n}\lambda^k)_{n\in\mathbf{N}}$. Si $\lambda < -1$ alors $\lambda^2 > 1$. Si $n \in \mathbf{N}$ alors on a $\sum_{k=0}^{2n}\lambda^k = \frac{1-\lambda\times(\lambda^2)^n}{1-\lambda}$ et $\sum_{k=0}^{2n+1}\lambda^k = \frac{1-\lambda^2\times(\lambda^2)^n}{1-\lambda}$. Puisque $\lambda^2 > 1$ la suite de terme général $(\lambda^2)^n$ tend vers $+\infty$. On déduit des propriétés des limites de suites relativement aux opération algébriques que $(\sum_{k=0}^{2n}\lambda^k)_{n\in\mathbf{N}}$ est divergente vers $+\infty$ et que $(\sum_{k=0}^{2n+1}\lambda^k)_{n\in\mathbf{N}}$ est divergente vers $-\infty$.

1.20 Suite de Cauchy.

Définition 11 Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ une suite numérique. C'est une suite de Cauchy si quel que soit $\varepsilon > 0$ il existe un rang $N \in \mathbf{N}$ à partir duquel ε majore strictement les valeurs absolues $|u_p - u_q|$. Autrement dit, $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy si l'assertion suivante est vérifiée :

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbf{N}\ \forall p,q \in \mathbf{N}\ (p,q \geq N) \Rightarrow (|u_p - u_q| < \varepsilon.$$

Proposition 16 Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ une suite numérique. Si elle possède une limite finie elle est de Cauchy.

Preuve Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ une suite numérique qui tend vers $l \in \mathbf{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\frac{1}{2}\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que si $n \in \mathbf{N}$ vérifie $n \geq N$ alors $|u_n - l| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Donc si $p,q \in \mathbf{N}$ vérifient $p,q \geq N$ alors $|u_p - u_q| \leq |u_p - l| + |l - u_q| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$. La suite $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ est bien de Cauchy.

Théorème 4 (réciproque de la proposition) Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ une suite numérique. Si elle est de Cauchy alors elle est convergente

Preuve Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ une suite numérique. On suppose qu'elle est de Cauchy. Soit $\varepsilon = 1$. Il existe $N_1 \in \mathbf{N}$ tel que si $p,q \in \mathbf{N}$ vérifient $p,q \geq N_1$ alors $|u_p - u_q| < 1$. En particulier si $n \in \mathbf{N}$ et $n \geq N_1$ alors $|u_n - u_{N_1}| < 1$ et donc $|u_n| < 1 + |u_{N_1}|$. On pose $K = 1 + \sum_{k=0}^{N_1}|u_k|$ Alors $K \in \mathbf{R}$ car c'est une somme finie de $N_1 + 2$ termes. De plus si $k \in \mathbf{N}$ et $k \leq N_1$ alors $|u_k| < 1 + |u_k| \leq K$. Or, puisque si $k \in \mathbf{N}$ est tel que $k \geq N_1$ alors $|u_k| < 1 + |u_{N+1}| \leq K$ on vient de vérifier que K majore $|u_k|$ quel que soit $k \in \mathbf{N}$. La suite u est donc bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass il existe $\phi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante telle que la sous-suite $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ admette une limite $l \in \mathbf{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\frac{1}{2}\varepsilon > 0$ il existe $N_2 \in \mathbf{N}$ tel si $n \in \mathbf{N}$ vérifie $n \geq N_2$ alors $|u_{\phi(n)} - l| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Puisque u est de Cauchy et que $\frac{1}{2}\varepsilon > 0$ il existe $N_3 \in \mathbf{N}$ tel que si $p,q \in \mathbf{N}$ vérifient $p,q \geq N_3$ alors $|u_p - u_q| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Soit $q = \phi(N_2 + N_3)$. On a $q \geq N_2 + N_3 \geq N_2, N_3$ et donc $|u_q - l| = |u_{\phi(N_2+N_3)} - l| < \frac{1}{2}\varepsilon$ et $|u_p - u_q| < \frac{1}{2}\varepsilon$ pour tout $p \geq q$. Ainsi $|u_p - l| \leq |u_p - u_q| + |u_q - l| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$ si $p \geq q$. Finalement on vient d'établir que quel que soit $\varepsilon > 0$ il existe $q \in \mathbf{N}$ tel que $|u_p - l| < \varepsilon$ pour tout $p \in \mathbf{N}$ vérifiant $p \geq q$. Ceci signifie que $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ est convergente de limite l.

2 Limite et continuité d'une fonction

2.1 Rappeler la définition de la limite finie d'une fonction à valeurs réelles en un point a de R.

Définition 12 Soit $D \subset \mathbf{R}$. Soit $a \in \mathbf{R}$. On dit que a est adhérent à D s'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in D^{\mathbf{N}}$ convergente et de limite a. On dit que $+\infty$ (ou $-\infty$) est adhérent à D s'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in D^{\mathbf{N}}$ divergente vers $+\infty$ (ou $-\infty$).

Définition 13 On appelle adhérence d'un sous-ensemble D de $\mathbf{R}$ le sous-ensemble noté $\overline{D}$ formé des réels adhérents à D. Lorsque $\overline{D} = D$ on dit que D est fermé.

Exemples 18 L'ensemble des points adhérents à $]0,1[$ est le segment $[0,1]$ et l'ensemble des points adhérents à $]0,+\infty[$ est $[0,+\infty]$.

L'ensemble des points adhérents à une union finie d'intervalles et la réunion des intervalles fermés correspondants.

Puisque tout réel est limite de rationnels, l'ensemble des points adhérents à $\mathbf{Q}$ est $\mathbf{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.

L'ensemble des points adhérents à un ensemble fini est l'ensemble lui-même.

L'ensemble des points adhérents à $\mathbf{N}$ est $\mathbf{N}\cup\{+\infty\}$.

L'ensemble des points adhérents à $\mathbf{Z}$ est $\mathbf{Z}\cup\{-\infty,+\infty\}$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite qui converge vers $l \in \mathbf{R}$ alors l'ensemble des points adhérents à $\{u_n : n \in \mathbf{N}\}$ est $\{u_n : n \in \mathbf{N}\} \cup \{l\}$.

Définition 14 Soit $f : D \to \mathbf{R}$ une fonction numérique de la variable réelle ($D \subset \mathbf{R}$) et soient $a, l \in \mathbf{R}$. On suppose que a est adhérent à D. Alors f a pour limite l en a si et seulement si quel que soit l'intervalle ouvert J contenant l il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que $f(D\cap I) \subset J$, c'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall x \in D\ (|x-a| < \eta) \Rightarrow (|f(x)-l| < \varepsilon).$$

Notation Si la fonction f a pour limite l en a on dit que f tend vers l en a et on le note

$$\lim_a f = \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{\substack{x\to a \\ x\in D}} f(x) = l.$$

2.2 Donner des exemples simples, tous justifiables à l'aide de la définition.

Exemple 19 Toute fonction constante admet une limite finie en tout point de $\mathbf{R}$, sa valeur, indépendante du point.

Preuve Soit f un telle fonction. Soient $a \in \mathbf{R}$ et $\varepsilon > 0$. Alors si on prend $\eta > 0$ quelconque on a bien $|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ tel que $|x-a| < \eta$.

Exemple 20 La fonction f définie par $f(x) = x$ si $x \in \mathbf{R}$ admet une limite finie en tout point de $\mathbf{R}$, sa valeur en ce point.

Preuve Soient $a \in \mathbf{R}$ et $\varepsilon > 0$. Alors si on prend $\eta = \varepsilon$ on a bien $|f(x) - f(a)| = |x-a| < \eta = \varepsilon$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ tel que $|x-a| < \eta$.

Exemple 21 La fonction f définie par $f(x) = |x|$ si $x \in \mathbf{R}$ admet une limite finie en tout point de $\mathbf{R}^*$, sa valeur en ce point.

Preuve Soient $a \in \mathbf{R}$ et $\varepsilon > 0$. Alors si on prend $\eta = \varepsilon$ on a $|f(x) - f(a)| = ||x| - |a|| \leq |x-a| < \eta = \varepsilon$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ tel que $|x-a| < \eta$.

Exemple 22 La fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}$ si $x \in [0+\infty[$ admet une limite finie en tout point de $[0,+\infty[$, sa valeur en ce point.

Preuve Soient $a \in [0,+\infty[$ et $\varepsilon > 0$. On prend $\eta = \varepsilon^2$. Soit $x \in [0,+\infty[$ tel que $|x-a| < \eta = \varepsilon^2$. On a $|f(x) - f(a)| = |\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \leq \frac{|x-a|}{\sqrt{|x-a|}} = \sqrt{|x-a|} < \varepsilon$ car $\sqrt{x} + \sqrt{a} \geq \sqrt{|x-a|}$ et $|x-a| < \eta = \varepsilon^2$.

Exemple 23 La fonction f définie par $f(x) = x^2$ si $x \in \mathbf{R}$ admet une limite finie en tout point de $\mathbf{R}$, sa valeur en ce point.

Preuve Soient $a \in \mathbf{R}$ et $\varepsilon > 0$. Si $a = 0$ on prend $\eta = \min(1,\varepsilon)$. On a bien $\eta > 0$ et

$$|f(x) - f(0)| = x^2 \leq |x| < \eta = \min(1,\varepsilon) \leq \varepsilon$$

pour tout $x \in \mathbf{R}$ tel que $|x-0| < \eta$. Si $a \neq 0$ on prend $\eta = \min(|a|, \frac{1}{3|a|}\varepsilon)$. On a bien

$$|f(x) - f(a)| = |x+a| \times |x-a| \leq 3|a| \times |x-a| < 3|a| \times \eta \leq \varepsilon$$

pour tout $x \in \mathbf{R}$ tel que $|x-a| < \eta$.

Exemple 24 La fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x \in \mathbf{R}^*$ admet une limite finie en tout point de $\mathbf{R}^*$, sa valeur en ce point.

Preuve On prend $\eta = \min(\frac{|a|}{2}, \frac{a^2}{2}\varepsilon)$. On a donc $|x-a| < \frac{a^2}{2}\varepsilon$ et $|x| > \frac{|a|}{2}$ et par conséquent

$$|f(x) - f(a)| = |\frac{1}{x} - \frac{1}{a}| = \frac{1}{|xa|} \times |x-a| < \frac{1}{\frac{|a|}{2}|a|} \times \frac{a^2}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

pour tout $x \in \mathbf{R}$ tel que $|x-a| < \eta$.

Exemple 25 La fonction f définie par $f(x) = \sin(x)$ si $x \in \mathbf{R}$ admet une limite finie en 0, sa valeur en 0.

Preuve Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $|\sin(x)| \leq |x|$ si $x \in \mathbf{R}$, si on prend $\eta = \varepsilon$ alors

$$|f(x)| = |\sin(x)| \leq |x| < \eta = \varepsilon$$

pour tout $x \in \mathbf{R}$ tel que $|x| < \eta$.

Remarque 10 L'inégalité $|\sin(x)| \leq |x|$ est une conséquence du fait suivant. Le secteur angulaire d'ouverture θ d'un disque de rayon 1 contient un triangle rectangle de base égale à 1 et de hauteur égale à $\sin(\theta)$. Si on compare les aires on obtient $\frac{1}{2}\sin(\theta) \leq \frac{1}{2}\theta$. Mais pour faire ça en toute rigueur il faut avoir défini la mesure d'un angle, la longueur d'une courbe et l'aire d'un secteur angulaire.

Exemple 26 La fonction f définie par $f(x) = \cos(x)$ si $x \in \mathbf{R}$ admet une limite finie en 0, sa valeur en 0.

Preuve Soit $\varepsilon > 0$. Alors, puisque $\cos(x) = 1 - 2\sin^2(\frac{x}{2})$, $|\sin(x)| \leq 1$ et $|\sin(x)| \leq |x|$ si $x \in \mathbf{R}$, si on prend $\eta = \varepsilon$ on a bien $|f(x) - f(0)| = 2\sin^2(\frac{x}{2}) \leq |x| < \eta = \varepsilon$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ tel que $|x| < \eta$.

Exemple 27 Les fonctions f définie par $f(x) = \sin(x)$ et g définie par $g(x) = \cos(x)$ si $x \in \mathbf{R}$ admettent des limites finies en tout point de $\mathbf{R}$, leurs valeurs en ce point.

Preuve Soient $a \in \mathbf{R}$ et $\varepsilon > 0$. Alors, puisque

$$\cos(x) - \cos(a) = -2\sin(\frac{x+a}{2})\sin(\frac{x-a}{2}),$$
$$\sin(x) - \sin(a) = 2\cos(\frac{x+a}{2})\sin(\frac{x-a}{2}),$$

$|\sin(x)| \leq 1$, $|\cos(x)| \leq 1$ et $|\sin(x)| \leq |x|$ si $x \in \mathbf{R}$, en prenant $\eta = \varepsilon$ on obtient

$$|f(x) - f(a)| = 2|\sin(\frac{x+a}{2})| \times |\sin(\frac{x-a}{2})| \leq |x-a| < \eta = \varepsilon$$

et

$$|g(x) - g(a)| = 2|\cos(\frac{x+a}{2})| \times |\sin(\frac{x-a}{2})| \leq |x-a| < \eta = \varepsilon$$

pour tout $x \in \mathbf{R}$ tel que $|x-a| < \eta$.

Exemple 28 La fonction f définie par $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$ si $x \in \mathbf{R}^*$ admet 0 comme limite finie en 0.

Preuve Soit $\varepsilon > 0$. Alors, puisque $|\sin|$ est majorée par 1 sur $\mathbf{R}$, sen prenant $\eta = \varepsilon$ on obtient

$$|f(x)| = |x\sin(\frac{1}{x}) \leq |x| < \eta = \varepsilon$$

pour tout $x \in \mathbf{R}^*$ tel que $|x| < \eta$.

Exemple 29 La fonction f définie par $f(x) = \frac{x}{|x|}$ si $x \in \mathbf{R}^*$ n'admet pas de limite finie en 0.

Preuve Soient $l \in \mathbf{R}$ et $\varepsilon = 1$. Alors, quel que soit $\eta > 0$, en prenant $x = \frac{\eta}{2}$ si $l \leq 0$ et $x = -\frac{\eta}{2}$ si $x > 0$, il vient $|x-0| < \eta$ et $|f(x) - l| = 1 + |l| \geq 1$. Par conséquent aucun réel l n'est limite de f en 0.

Exemple 30 La fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x \in \mathbf{R}^*$ n'admet pas de limite finie en 0.

Preuve Soient $l \in \mathbf{R}$ et $\varepsilon = 1$. Alors, quel que soit $\eta > 0$, en prenant $x = \min(\frac{\eta}{2}, \frac{1}{1+|l|})$, il vient $|x-0| < \eta$ et $f(x) \geq 1 + |l|$, ceci implique $|f(x) - l| \geq ||f(x)| - |l|| \geq 1$. Par conséquent aucun réel l n'est limite de f en 0.

Exemple 31 La fonction f définie par $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ si $x \in \mathbf{R}^*$ n'admet pas de limite finie en 0.

Preuve Soient $l \in \mathbf{R}$, $\varepsilon = 1$ et $\eta > 0$. On pose $x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi(1 + \mathrm{Ent}(\frac{1}{2\pi\eta}))}$ si $l \leq 0$ et $x = -\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi(1 + \mathrm{Ent}(\frac{1}{2\pi\eta}))}$ si $l > 0$. Alors $|x-0| < \eta$, $|f(x)| = 1$ et $l \times f(x) \leq 0$. Ainsi $|f(x) - l| = 1 + |l| \geq 1$. Par conséquent aucun réel l n'est limite de f en 0.

Montrer que si la fonction f admet une limite l en a si la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers a alors la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers l.

Preuve (dans le cas où $a, l \in \mathbf{R}$) Soient $f : D \to \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}$ un réel adhérent à D et $l \in \mathbf{R}$. On suppose $\lim_a f = l$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc $\eta > 0$ tel que si $x \in D$ alors $|f(x) - l| < \varepsilon$ dès que $|x-a| < \eta$. Considérons maintenant $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ à valeurs dans D et de limite a. Il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que si $n \in \mathbf{N}$ alors $|u_n - a| < \eta$ dès que $n \geq N$. Or l'inégalité $|u_n - a| < \eta$ entraîne $|f(u_n) - a| < \varepsilon$ en raison du choix de η. On a donc établi que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier naturel N tel que pour tout entier naturel n qui lui est supérieur ou égal on a $|f(u_n) - l| < \varepsilon$. Ceci signifie que $(f(u_n))_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers l.

2.3 Que dire de la réciproque ?

Remarque 11 Avant d'énoncer une réciproque on observe que la fonction f définie par $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ si $x \in \mathbf{R}^*$ n'admet pas de limite finie en 0 alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_n = \frac{1}{2\pi(1+n)}$ si $n \in \mathbf{N}$ est à valeurs dans $\mathbf{R}^*$, tend vers 0 mais est telle que la suite image $(f(u_n))_{n\in\mathbf{N}}$ est la suite nulle, c'est donc une suite convergente.

Proposition 17 (Caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction) Soit une fonction $f : D \to \mathbf{R}$ et soit $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ adhérent à D. Si quelle que soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in D^{\mathbf{N}}$ qui tend vers a la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbf{N}}$ a une limite alors la fonction f admet une limite en a.

Preuve (dans le cas où $a \in \mathbf{R}$ et où les limites sont finies) Puisque $a \in \mathbf{R}$ est un réel adhérent à D il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in D^{\mathbf{N}}$ qui converge vers a et qui vérifie $|a_n - a| < \frac{1}{1+n}$ si $n \in \mathbf{N}$. Par hypothèse la suite $(f(a_n))_{n\in\mathbf{N}}$ a une limite finie qu'on note l : $l \in \mathbf{R}$ et $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = l$. Supposons que la fonction f n'admette pas de limite en a et montrons que cette hypothèse mène à une contradiction. Si f n'admet pas de limite en a il existe $\varepsilon > 0$ tel que quel que soit $\eta > 0$ il existe $x \in D$ tel que $|x-a| < \eta$ et $|f(x) - l| \geq \varepsilon$. En particulier si $n \in \mathbf{N}$ il existe un réel $v_n \in D$ tel que $|v_n - a| < \frac{1}{1+n}$ et $|f(v_n) - l| \geq \varepsilon$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in D^{\mathbf{N}}$ définie par $u_{2n} = a_n$ et $u_{2n+1} = v_n$ si $n \in \mathbf{N}$. Par construction $|u_{2n} - a| < \frac{1}{1+n}$ et $|u_{2n+1} - a| < \frac{1}{1+n}$ si $n \in \mathbf{N}$ et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in D^{\mathbf{N}}$ converge vers a. La suite $(f(u_n))_{n\in\mathbf{N}}$ est donc convergente. Soit L sa limite. Il existe $N_1 \in \mathbf{N}$ tel que si $n \in \mathbf{N}$ vérifie $n \geq N_1$ alors $|f(u_n) - L| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Puisque $(f(a_n))_{n\in\mathbf{N}}$ convergente vers l il existe $N_2 \in \mathbf{N}$ tel que si $n \in \mathbf{N}$ vérifie $n \geq N_2$ alors $|f(a_n) - l| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Soit $n = (N_1 + N_2)$. Puisque $2n \geq N_1$, $2n+1 \geq N_1$ et $n \geq N_2$ il vient $|f(u_{2n}) - L| < \frac{1}{2}\varepsilon$, $|f(u_{2n+1}) - L| < \frac{1}{2}\varepsilon$ et $|f(a_n) - l| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Or $a_n = u_{2n}$. Donc $|l - L| \leq |f(u_{2n}) - L| + |f(u_{2n}) - l| = |f(u_{2n}) - L| + |f(a_n) - l| < \varepsilon$ et par conséquent

$$|f(u_{2n+1}) - l| \leq |l - L| + |f(u_{2n+1}) - L| < \varepsilon.$$

Ceci est en contradiction avec l'inégalité $|f(u_{2n+1}) - l| \geq \varepsilon$ qui résulte du fait que $f(u_{2n+1}) = f(v_n)$ puisque $u_{2n+1} = v_n$.

2.4 Rappeler les définitions des limites à l'infini d'une fonction à valeurs réelles.

Définition 15 Soit $f : D \to \mathbf{R}$ une fonction numérique de la variable réelle ($D \subset \mathbf{R}$). On suppose que $+\infty$ est adhérent à D (c'est par exemple le cas lorsqu'il existe $K \in \mathbf{R}$ tel que $]K, +\infty[\subset D$). Un réel l est la limite de f en $+\infty$ si quel que soit l'intervalle ouvert qui contient l il existe réel tel que l'image par f de tout élément de D plus grand que ce nombre appartient à cet intervalle. Autrement dit, la fonction f admet l pour limite en $+\infty$ si l'assertion suivante est vraie :

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists A \in \mathbf{R}\ \forall x \in D\ (x > A) \Rightarrow (|f(x) - l| < \varepsilon).$$

Remarque 12 On définit de façon analogue la limite réelle d'une fonction en $-\infty$. La fonction f admet $l \in \mathbf{R}$ pour limite en $-\infty$ si l'assertion suivante est vraie :

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists A \in \mathbf{R}\ \forall x \in D\ (x < A) \Rightarrow (|f(x) - l| < \varepsilon).$$

Définition 16 Soit $f : D \to \mathbf{R}$ une fonction numérique de la variable réelle ($D \subset \mathbf{R}$). On suppose que $+\infty$ est adhérent à D (c'est par exemple le cas lorsqu'il existe $K \in \mathbf{R}$ tel que $]K, +\infty[\subset D$). On dit que $+\infty$ est la limite de f en $+\infty$ si quel que soit le réel considéré il existe un second réel tel que l'image par f de tout élément de D plus grand que ce second réel est supérieur au réel considéré. Autrement dit, la suite fonction f admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$ si l'assertion suivante est vraie :

$$\forall K \in \mathbf{R}\ \exists A \in \mathbf{R}\ \forall x \in D\ (x > A) \Rightarrow (f(x) > K).$$

Définition 17 On définit de façon analogue la limite $-\infty$ d'une fonction en $+\infty$. La fonction f admet $-\infty$ pour limite en $+\infty$ si l'assertion suivante est vraie :

$$\forall K \in \mathbf{R}\ \exists A \in \mathbf{R}\ \forall x \in D\ (x > A) \Rightarrow (f(x) < K).$$

Remarque 13 On définit de façon analogue la limite infinie ($+\infty$ et $-\infty$) d'une fonction en $-\infty$. La fonction f admet $+\infty$ pour limite en $-\infty$ si l'assertion suivante est vraie :

$$\forall K \in \mathbf{R}\ \exists A \in \mathbf{R}\ \forall x \in D\ (x < A) \Rightarrow (f(x) > K).$$

La fonction f admet $-\infty$ pour limite en $-\infty$ si l'assertion suivante est vraie :

$$\forall K \in \mathbf{R}\ \exists A \in \mathbf{R}\ \forall x \in D\ (x < A) \Rightarrow (f(x) < K).$$

Notation Dire que f admet $l \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ comme limite en $+\infty$ (ou $-\infty$) est noté $\lim_{+\infty} f = l$ (ou $\lim_{-\infty} f = l$).

2.5 Comparer avec les suites.

Proposition 18 Soit $f : D \to \mathbf{R}$ une fonction définie sur un domaine $D \subset \mathbf{R}$ qui contient $\mathbf{N}$. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_n = f(n)$ si $n \in \mathbf{N}$. Supposons que $\lim_{+\infty} f$ existe. On note l cette limite : $l \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Alors la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers l.

Preuve Soit $\varepsilon > 0$ (respectivement $K \in \mathbf{R}$) si $l \in \mathbf{R}$ (respectivement si $l = -\infty$, si $l = +\infty$). Il existe $A \in \mathbf{R}$ tel que si $x \in D$ vérifie $x > A$ alors $|f(x) - l| < \varepsilon$ (respectivement $f(x) < K$, $f(x) > K$). Posons $N = \mathrm{Ent}(K+1)$. Si $n \in \mathbf{N}$ est tel que $n \geq N$ alors $|u_n - l| < \varepsilon$ (respectivement $u_n < K$, $u_n > K$). Par conséquent la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend bien vers l.

Remarque 14 La réciproque n'est pas vraie. Par exemple la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_n = 0$, c'est à dire $u_n = \sin(\pi n)$, si $n \in \mathbf{N}$ est la suite nulle, elle tend donc vers 0 alors qu'elle est associée à la fonction qui à $x \in \mathbf{R}$ associe $\sin(x)$ qui n'a pas de limite en $+\infty$ (voir ci-dessous).

2.6 Donner des exemples simples, tous justifiables à l'aide de la définition.

Exemple 32 Toute fonction constante admet une limite en $+\infty$, son unique valeur.

Preuve Soit $\varepsilon > 0$ et soit $A \in \mathbf{R}$. Si $x \in \mathbf{R}$ et $x > A$ alors $f(x) = f(0)$ car f est constante et donc il vient $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$.

Exemple 33 La fonction f définie $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x \in \mathbf{R}^*$ admet 0 comme limite en $+\infty$.

Preuve Si $\varepsilon > 0$ et si x est un réel strictement supérieur à $\frac{1}{\varepsilon}$ alors $0 < \frac{1}{x} < \varepsilon$.

Exemple 34 (théorème des gendarmes ou d'encadrement revisité) Soient f, g et h définies sur un domaine D dont $+\infty$ est adhérent. On suppose que f et h tendent vers la même limite $l \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Si pour tout $x \in D$ les inégalités $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ alors g admet aussi l comme limite.

Preuve Supposons $l \in \mathbf{R}$ (respectivement $l = +\infty$, $l = -\infty$) et soit $\varepsilon > 0$ (respectivement $K \in \mathbf{R}$). Puisque f et h tendent vers l il existe $A \in \mathbf{R}$ tel que si $x \in D$ alors $|f(x) - l|, |h(x) - l| < \frac{1}{3}\varepsilon$ (respectivement $f(x), h(x) > K$, $f(x), h(x) < K$) dès que $x > A$. Si $l \in \mathbf{R}$ on a

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| \leq |f(x) - l| + |h(x) - l| < \frac{2}{3}\varepsilon$$

et donc
$$|g(x)-l| \leq |f(x)-g(x)|+|f(x)-l| < \frac{2}{3}\varepsilon+\frac{1}{3}\varepsilon=\varepsilon$$
dès que $x > A$. Ceci signifie que g admet l comme limite en $+\infty$. Si $l=+\infty$ on a $g(x) \geq f(x) > K$ dès que $x > A$ et donc g admet $+\infty$ comme limite en $+\infty$. Si $l=-\infty$ on a $g(x) \leq h(x) < K$ dès que $x > A$ et donc g admet $-\infty$ comme limite en $+\infty$.

Exemple 35 La fonction f définie par $f(x)=\sin(\pi x)$ si $x \in \mathbf{R}$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

Preuve Soient $\varepsilon=1$, $K=0$ et $l,A \in \mathbf{R}$. On pose $x=2\mathrm{Ent}(|A|+1)+\frac{1}{2}$ et $x'=2\mathrm{Ent}(|A|+1)+\frac{3}{2}$. On a $x,x' > A$ et $f(x)=1 > K=0$, $f(x')=-1 < K=0$ et $|f(x)-l|+|f(x')-l| \geq |f(x)-f(x')|=2=2\varepsilon$ et donc $|f(x)-l| \geq \varepsilon$ ou $|f(x')-l| \geq \varepsilon$. On vient de montrer qu'il existait $\varepsilon > 0$ et $K \in \mathbf{R}$ tels que quel que soit $A \in \mathbf{R}$ et quel que soit $l \in \mathbf{R}$ il existe des réels x et x' plus grands que A et tels que $f(x) > K$ (donc $-\infty$ n'est pas limite), $f(x') < K$ (donc $+\infty$ n'est pas limite) et soit $|f(x)-l| \geq \varepsilon$ soit $|f(x')-l| \geq \varepsilon$ (donc $l \in \mathbf{R}$ n'est pas limite).

Exemple 36 La suite f définie par $f(x)=x$ si $x \in \mathbf{R}$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et vers $-\infty$ en $-\infty$.

Preuve Soit $K \in \mathbf{R}$. On pose $A=K$. Si $x > A$ on a $f(x) > K$ et donc $\lim_{+\infty} f=+\infty$. Si $x < A$ on a $f(x) < K$ et donc $\lim_{-\infty} f=-\infty$.

Exemple 37 La suite f définie par $f(x)=x^2$ si $x \in \mathbf{R}$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et vers $+\infty$ en $-\infty$.

Preuve Soit $K \in \mathbf{R}$. On pose $A=1+|K|$ et $A'=-A$. Si $x > A$ ou $x < A'$ on a $f(x)=x^2 \geq 1+2|K|+K^2 > K$ et donc $\lim_{+\infty} f=\lim_{-\infty} f=+\infty$.

Exemple 38 La fonction f définie par $f(x)=x^3$ si $x \in \mathbf{R}$ est strictement croissante et tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et vers $-\infty$ en $-\infty$.

Preuve Soient $a,b \in \mathbf{R}$ tels que $a < b$. Montrons en distinguant trois cas que $f(a) < f(b)$. Si $a \leq 0 < b$ alors $f(a)=a^3 \leq 0 < b^3=f(b)$. Si $0 \leq a < b$ alors $f(b)-f(a)=b^3-a^3$ et donc
$$f(b)-f(a)=(b-a)(b^2+ba+a^2) > 0$$
car $b-a >, b^2 > 0$ et $ba, a^2 \geq 0$. Ainsi $f(a) < f(b)$. Si $a < b \leq 0$ alors $0 \leq -b < -a$ et donc
$$f(-b) < f(-a).$$
Ceci implique, puisque $-f(a)=f(-a)$ et $-f(b)=-f(-b)$, $f(a) < f(b)$. La fonction f est bien strictement croissante. Soit $K \in \mathbf{R}$. On pose $A=1+|K|$ et $A'=-A$. Si $x > A$ on a
$$f(x)=x^3 \geq 1+3|K|+3K^2+|K|^3 > K$$
et donc $\lim_{+\infty} f=+\infty$. Si $x < A'$ on a
$$f(x)=x^3 \leq -(1+3|K|+3K^2+|K|^3) < K$$
et donc $\lim_{-\infty} f=-\infty$.

Exemple 39 Soit $f : D \to \mathbf{R}$ croissante. On suppose que $+\infty$ est adhérent à D. Si f est majorée alors f admet une limite finie en $+\infty$. Si f n'est pas majorée alors f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

Preuve On suppose f majorée. L'ensemble $E=\{f(x) : x \in D\}=f(D)$ des valeurs de la fonction f est majoré, il admet donc une borne supérieure notée l qui majore toutes les valeurs de f. Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque $l-\varepsilon<l$ il existe $A\in\mathbf{R}$ tel que $f(A)>l-\varepsilon$. Puisque f est croissante et que l est un majorant de $f(D)$ pour tout $x\in D$ tel que $x>A$ il vient $l-\varepsilon<f(A)\leq f(x)\leq l$. Ceci établit que f tend $l\in\mathbf{R}$ en $+\infty$ si f majorée. On suppose f non majorée. Soit $K\in\mathbf{R}$. Il existe $A\in\mathbf{R}$ tel que $f(A)>K$. Puisque f est croissante pour tout $x\in D$ tel que $x>A$ il vient $K<f(A)\leq f(x)$. Ceci établit que f tend $+\infty$ en $+\infty$.

Remarque 15 On a des énoncés voisins de celui de l'exemple précédent quand la limite est $-\infty$ ou quand $-\infty$ est adhérent à D.

2.7 Limites et inégalités, le cas des fonctions

Proposition 19 Soient $f:D\to\mathbf{R}$ et a adhérent à D tel que f admette l comme limite finie ou infinie et soit $K\in\mathbf{R}$. Supposons $K>l$ (respectivement $K<l$). Il existe alors $\eta>0$ si $a\in\mathbf{R}$ ou $A\in\mathbf{R}$ si $a\in\{-+\infty,+\infty\}$ tel que si $x\in D$ vérifie $|x-a|<\eta$ si $a\in\mathbf{R}$, $A<x$ si $a=+\infty$ ou $A>x$ si $a=-\infty$, alors $f(x)<K$ (respectivement $f(x)>K$).

Preuve Si $l=+\infty$ ou $l=-\infty$ l'énoncé correspond à la définition de limite infinie. Supposons $l\in\mathbf{R}$ et posons $\varepsilon=|K-l|$. Puisque $\varepsilon>0$ et que f tend vers l il existe $\eta>0$ si $a\in\mathbf{R}$ ou $A\in\mathbf{R}$ si $a\in\{-+\infty,+\infty\}$ tel que si $x\in D$ vérifie $|x-a|<\eta$ si $a\in\mathbf{R}$, $A<x$ si $a=+\infty$ ou $A>x$ si $a=-\infty$, alors $l-\varepsilon<f(x)<l+\varepsilon$. Ainsi si $K>l$ (respectivement $K<l$) alors $K=l+\varepsilon$ (respectivement $K=l-\varepsilon$) et pour tout $x\in D$ qui vérifie $|x-a|<\eta$ si $a\in\mathbf{R}$, $A<x$ si $a=+\infty$ ou $A>x$ si $a=-\infty$, il vient $f(x)<K$ (respectivement $f(x)>K$).

Proposition 20 Soient $f,g:D\to\mathbf{R}$ et a adhérent à D tels que f et g admettent l et l' comme limites finies ou infinies. Si $f\leq g$ alors $l\leq l'$.

Preuve Si ce n'est pas le cas il existe $K\in\mathbf{R}$ tel que $l'<K<l$. D'après la proposition précédente appliquée aux deux fonctions f et g il existe $\eta>0$ si $a\in\mathbf{R}$ ou $A\in\mathbf{R}$ si $a\in\{-+\infty,+\infty\}$ tel que si $x\in D$ vérifie $|x-a|<\eta$ si $a\in\mathbf{R}$, $A<x$ si $a=+\infty$ ou $A>x$ si $a=-\infty$, alors $f(x)>K$ et $g(x)<K$ donc $g(x)<f(x)$, ce qui n'est pas possible. Ainsi $l\leq l'$.

2.8 Opérations algébriques sur les limites.

Proposition 21 Soient $f,g:D\to\mathbf{R}$ et a adhérent à D tels que f et g tendent vers $l\in\mathbf{R}$ et $l'\in\mathbf{R}$ en a. Alors la somme $f+g$ tend vers $l+l'$ en a, le produit $f\times g$ tend vers $l\times l'$ en a et, si f ne s'annule pas et $l\neq 0$, $\frac{1}{f}$ tend vers $\frac{1}{l}$ en a.

Preuve (dans le cas où $a\in\mathbf{R}$) Soit $\varepsilon>0$. Puisque $\frac{1}{2}\varepsilon>0$ il existe $\eta_1>0$ tel que si $x\in D$ et $|x-a|<\eta_1$ alors $|f(x)-l|<\frac{\varepsilon}{2}$, $|g(x)-l'|<\frac{\varepsilon}{2}$ et donc $|f(x)+g(x)-(l+l')|\leq|f(x)-l|+|g(x)-l'|<\varepsilon$. Ainsi la somme $f+g$ tend vers $l+l'$ en a. On pose $K=1+|l|+|l'|$. Puisque K est strictement plus grand que $|l|$ et $l'|$ et que $\frac{1}{2K}\varepsilon>0$, il existe $\eta_2>0$ tel que si $x\in D$ et $|x-a|<\eta_2$ alors $|f(x)|<K$, $|g(x)|<K$, $|f(x)-l|<\frac{\varepsilon}{2K}$, $|g(x)-l'|<\frac{\varepsilon}{2K}$ et donc

$$\begin{aligned}|f(x)\times g(x)-l\times l'|&=|(f(x)-l)\times g(x)+(g(x)-l')\times l|\\&\leq|f(x)-l|\times|g(x)|+|g(x)-l'|\times|l|\\&<\frac{\varepsilon}{2K}\times K+\frac{\varepsilon}{2K}\times K\\&<\varepsilon.\end{aligned}$$

Ainsi le produit $f\times g$ tend vers $l\times l'$ en a. Puisque $l\neq 0$ et $\varepsilon>0$ on a $\min(\frac{|l|}{2},\frac{l^2}{2}\varepsilon)>0$ et donc il existe $\eta_3>0$ tel que si $x\in D$ et $|x-a|<\eta_3$ alors $|f(x)-l|<\min(\frac{|l|}{2},\frac{l^2}{2}\varepsilon)$. Ceci implique que si $x\in D$ et

$|x-a|<\eta_3$ alors $|f(x)|>\frac{|l|}{2}$ et par conséquent $|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{l}|=\frac{1}{|lf(x)|}\times|f(x)-l|<\frac{1}{\frac{|l|}{2}|l|}\times\frac{l^2}{2}\varepsilon=\varepsilon$. Ainsi f tend vers $\frac{1}{l}$ en a.

Proposition 22 Soient $f,g:D\to\mathbf{R}$ et a adhérent à D tels que f et g tendent vers $+\infty$ en a. Alors la somme $f+g$ et le produit $f\times g$ tendent vers $+\infty$ et, si f ne s'annule pas alors $\frac{1}{f}$ tend vers 0 en a.

Preuve (dans le cas où $a\in\mathbf{R}$) Soit $K\in\mathbf{R}$ et soit $\varepsilon>0$. Il existe $\eta_1>0$ tel que si $x\in D$ et $|x-a|<\eta_1$ alors $f(x)>\frac{K}{2}$, $g(x)>\frac{K}{2}$ et donc $f+g>K$. Ainsi la somme $f+g$ tend vers $+\infty$ en a. Il existe $\eta_2>0$ tel que si $x\in D$ et $|x-a|<\eta_2$ alors $f(x)>1+|K|$, $g(x)>1+|K|$ et donc

$$f(x)\times g(x)>(1+|K|)^2=1+2|K|+K^2>K.$$

Ainsi le produit $f\times g$ tend vers $+\infty$ en a. Puisque $\frac{1}{\varepsilon}>0$ il existe $\eta_3>0$ tel que si $x\in D$ et $|x-a|<\eta_3$ alors $f(x)<\min(\frac{|l|}{2},\frac{l^2}{2}\varepsilon)$. Ceci implique que si $|x-a|<\eta_3$ alors $f(x)>\frac{1}{\varepsilon}$ et donc $0<\frac{1}{f(x)}<\varepsilon$. Ainsi $\frac{1}{f}$ tend vers 0 en a.

Proposition 23 Soient $f,g:D\to\mathbf{R}$ et a adhérent à D tels que f tend vers $l\in\mathbf{R}$ et g tend vers $+\infty$ en a. Alors la somme $f+g$ tend vers $+\infty$ en a.

Preuve (dans le cas où $a\in\mathbf{R}$) Soit $K\in\mathbf{R}$. Il existe $\eta>0$ tel que si $x\in D$ et $|x-a|<\eta$ alors $f(x)>l-1$ et $g(x)>K-l+1$ et donc $f(x)+g(x)>l-1+K-l+1=K$. Ainsi la somme $f+g$ tend vers $+\infty$.

Proposition 24 Soient $f,g:D\to\mathbf{R}$ et a adhérent à D tels que f tend vers $l>0$ et g tend vers $+\infty$ en a. Alors le produit $f\times g$ tend vers $+\infty$ en a.

Preuve (dans le cas où $a\in\mathbf{R}$) Soit $K\in\mathbf{R}$. Il existe $\eta>0$ tel que si $x\in D$ et $|x-a|<\eta$ alors $|f(x)-l|>\frac{l}{2}>0$, $g(x)>\frac{2K}{l}$ et donc $f(x)\times g(x)>\frac{l}{2}\times\frac{2K}{l}=K$. Ainsi le produit $f\times g$ tend vers $+\infty$ en a

Proposition 25 Soient $f:D\to]0,+\infty[$ et a adhérent à D tels que f tend vers 0 en a alors la suite $\frac{1}{f}$ tend vers $+\infty$ en a.

Preuve (dans le cas où $a\in\mathbf{R}$) Soit $K\in\mathbf{R}$. Puisque $\frac{1}{1+|K|}>0$ l existe $\eta>0$ tel que si $x\in D$ et $|x-a|<\eta$ alors $0<f(x)<\frac{1}{1+|K|}$ et donc $\frac{1}{f(x)}>1+|K|>K$. Ainsi $\frac{1}{f}$ tend vers $+\infty$ en a

Proposition 26 Soient $f,g:D\to\mathbf{R}$ et a adhérent à D. La fonction f tend vers $+\infty$ en a si et seulement si $-f$ tend vers $-\infty$ en a.

Preuve (dans le cas où $a\in\mathbf{R}$) Supposons que f tende vers $+\infty$ en a et soit $K\in\mathbf{R}$. Il existe $\eta>0$ tel que si $x\in D$ et $|x-a|<\eta$ alors $f(x)>-K$ et donc $-f(x)<K$. La fonction $-f$ tend donc vers $-\infty$ en a. Réciproquement supposons que $-f$ tend vers $-\infty$ en a et soit $K\in\mathbf{R}$. $\eta>0$ tel que si $x\in D$ et $|x-a|<\eta$ alors $f(x)<-K$ et donc $f(x)>K$. La fonction f tend donc vers $+\infty$ en $-a$.

Remarque 16 Si on combine par somme, produit ou quotient les fonctions x, $-x$, x^2, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\sin(x)+x$, $-x+\frac{x}{2}\sin(x)$ on constate que les opérations sur les limites non traitées par les propositions précédentes n'admettent pas de traitement général. On parle de formes indéterminées.

Proposition 27 Soient $f:D\to\mathbf{R}$, $g:f(D)\to\mathbf{R}$, a adhérent à D et b adhérent à $f(D)$. On suppose que f tend vers b en a et que g tend vers $l\in\mathbf{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ en b. Alors $g\circ f$ tend vers l en a.

Preuve (dans le cas où $a\in\mathbf{R}$ et $b\in\mathbf{R}$) Soit $\varepsilon>0$. Il existe $\eta_1>0$ tel que si $y\in f(D)$ vérifie $|y-b|<\eta_1$ alors $|g(y)-l|<\varepsilon$. Puisque $\eta_1>0$ il existe $\eta>0$ tel que si $x\in D$ vérifie $|x-a|<\eta$

alors $|f(x)-b|<\eta_1$ et donc $[g(f(x))-l|<\varepsilon$ d'après ce qui précède. Ceci établit que $g\circ f$ tend vers l en a.

2.9 Rappeler les définitions de la continuité et de la continuité uniforme d'une fonction à valeurs réelles sur un domaine D.

Définition 18 Soit $f : D \to \mathbf{R}$. Si $a \in D$ on dit que f est continue en a si f admet une limite en a (et alors la limite et la valeur de la fonction en a sont égale) :

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\eta>0\ \forall x\in D\ (|x-a|<\eta)\Rightarrow(|f(x)-f(a)|<\varepsilon).$$

On dit que f est continue si f est continue en tout $a\in D$:

$$\forall a\in D\ \forall\varepsilon>0\ \exists\eta>0\ \forall x\in D\ (|x-a|<\eta)\Rightarrow(|f(x)-f(a)|<\varepsilon).$$

Définition 19 Soit $f : D \to \mathbf{R}$. On dit que f est uniformément continue sur D si l'assertion suivante est vérifiée :

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\eta>0\ \forall a\in D\ \forall x\in D\ (|x-a|<\eta)\Rightarrow(|f(x)-f(a)|<\varepsilon).$$

2.10 Comparer.

La notion de continuité uniforme est plus contraignante que celle de continuité car elle contient l'existence d'un η qui doit convenir pour tous les a du domaine D.

2.11 Donner des exemples.

Exemple 40 Toute fonction constante est uniformément continue.

Preuve Soit $f : D\to\mathbf{R}$ une fonction constante égale à $\lambda\in\mathbf{R}$. Soit $\varepsilon>0$. On pose $\eta=1$. Alors, quels que soient $a\in D$ et $x\in D$, $|f(x)-f(a)|=0<\varepsilon$ dès que $|x-a|<\eta$.

Exemple 41 La fonction f définie par $f(x)=x$ si $x\in\mathbf{R}$ est uniformément continue.

Preuve Soit $\varepsilon>0$. On pose $\eta=\varepsilon$. Alors, quels que soient $a\in\mathbf{R}$ et $x\in\mathbf{R}$ tels que $|x-a|<\eta$, on a $|f(x)-f(a)|=|x-a|<\eta=\varepsilon$.

Exemple 42 La fonction f définie par $f(x)=\sin(x)$ si $x\in\mathbf{R}$ est uniformément continue.

Preuve Soit $\varepsilon>0$. Alors, puisque $|\cos(\frac{x+a}{2})|\leq 1$, $|\sin(\frac{x-a}{2}|\leq|\frac{x-a}{2}|$ et

$$\sin(x)-\sin(a)=2\cos(\frac{x+a}{2})\sin(\frac{x-a}{2})$$

si $a\in\mathbf{R}$ et $x\in\mathbf{R}$, en prenant $\eta=\varepsilon$ on obtient

$$|f(x)-f(a)|=2|\sin(\frac{x+a}{2})|\times|\sin(\frac{x-a}{2})|\leq|x-a|<\eta=\varepsilon$$

quels que soient $a\in\mathbf{R}$ et $x\in\mathbf{R}$ tels que $|x-a|<\eta=\varepsilon$.

Exemple 43 La fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x}$ si $x\geq 0$ est uniformément continue.

Preuve Il suffit de reprendre la preuve de l'existence de limite en tout $a \in [0, +\infty[$. Soit $\varepsilon > 0$. On prend $\eta = \varepsilon^2$. Soient alors $a \in [0, +\infty[$ et $x \in [0, +\infty[$ tels que $|x-a| < \eta = \varepsilon^2$. On a

$$|f(x) - f(a)| = |\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \leq \frac{|x-a|}{\sqrt{|x-a|}} = \sqrt{|x-a|} < \varepsilon$$

car $\sqrt{x} + \sqrt{a} \geq \sqrt{|x-a|}$ et $|x-a| < \eta = \varepsilon^2$.

Exemple 44 Soit $A > 0$. La fonction f définie par $f(x) = x^2$ si $x \in [-A, A]$ est uniformément continue.

Preuve Si $\varepsilon > 0$ on pose $\eta = \frac{1}{2A}\varepsilon$. Si $a, x \in [-A, A]$ tels que $|x-a| < \eta = \frac{1}{2A}\varepsilon$ alors

$$|f(x) - f(a)| = |x^2 - a^2| = |x+a| \times |x-a| < 2A \times \frac{1}{2A}\varepsilon = \varepsilon.$$

Exemple 45 Soit $A > 0$. La fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x \in [A, +\infty[$ est uniformément continue.

Preuve Si $\varepsilon > 0$ on pose $\eta = A^2\varepsilon$. Si $a, x \geq A$ tels que $|x-a| < \eta = A^2\varepsilon$ alors

$$|f(x) - f(a)| = \frac{1}{|xa|}|x-a| \leq \frac{1}{A^2}A^2\varepsilon = \varepsilon.$$

Exemple 46 La fonction f définie par $f(x) = x^2$ si $x \in \mathbf{R}$ n'est pas uniformément continue.

Preuve Si $\varepsilon = 1$ et $\eta > 0$ et si on pose $a = \frac{1}{\eta}$ et $x = \frac{1}{\eta} + \frac{\eta}{2}$ alors on a $|x-a| = \frac{\eta}{2} < \eta$ et

$$|f(x) - f(a)| = |f(\frac{1}{\eta} + \frac{\eta}{2}) - f(\frac{1}{\eta})| = |\frac{2}{\eta} + \frac{\eta}{2}| \times \frac{\eta}{2} > 1 = \varepsilon.$$

Exemple 47 La fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x \in \mathbf{R}^*$ n'est pas uniformément continue.

Preuve Si $\varepsilon = 1$ et $\eta > 0$ et si on pose $\beta = \min(1, \eta)$, $a = \beta$ et $x = \frac{\beta}{2}$ alors on a $|x-a| = \frac{\beta}{2} < \beta \leq \eta$ et $|f(x) - f(a)| = |f(\frac{\beta}{2}) - f(\beta)| = |\frac{2}{\beta} - \frac{1}{\beta}| = \frac{1}{\beta} \geq 1 = \varepsilon$.

Exemple 48 La fonction f définie par $f(x) = x\sin(x)$ si $x \in \mathbf{R}^*$ n'est pas uniformément continue bien qu'elle soit le produit de deux fonctions uniformément continues dont une est bornée.

Preuve Si $\theta \in]0\frac{\pi}{2}[$ alors le secteur angulaire d'ouverture θ d'un disque de rayon 1 est contenu dans un triangle rectangle de base égale à 1 et de hauteur égale à $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$. Si on compare les aires on obtient $\frac{1}{2}\theta \leq \frac{1}{2}\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$. Or $\lim_0 \cos(\theta) = 1$. Il existe donc $\eta_0 > 0$ tel que si $\theta \in]0, \eta_0[$ alors $\cos(\theta) > \frac{1}{2}$ et donc $\frac{1}{2}\theta \leq \frac{1}{2}\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \leq \frac{1}{2}\frac{\sin(\theta)}{\frac{1}{2}} = \sin(\theta)$. Ainsi $\frac{1}{2}\theta \leq \sin(\theta)$ si $\theta \in]0, \eta_0[$. Considérons maintenant $\varepsilon = 1$ et $\eta > 0$. Soient $n = \mathrm{Ent}(\frac{1}{\eta+\eta_0}) + 1$, $\alpha = 2n\pi$ et $\beta = \alpha + \frac{1}{n}$. Alors $|\beta - \alpha| = \frac{1}{n} < \eta$ et puisque $\frac{1}{n} < \eta_0$ on a aussi $|f(\beta) - f(\alpha)| = (2n\pi + \frac{1}{n})\sin(\frac{1}{n}) \geq (2n\pi + \frac{1}{n})\frac{1}{2n} \geq \pi > 1 = \varepsilon$.

2.12 Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires. En donner une démonstration.

Théorème 5 (des valeurs intermédiaires) Une fonction continue sur un segment atteint toute nombre compris entre les valeurs que cette fonction prend aux extrémités de ce segment. Autrement dit, si

$f : [a,b] \to \mathbf{R}$ continue et si λ est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \lambda$.

Preuve Quitte à remplacer f par $-f$ et λ par $-\lambda$ on peut supposer $f(a) \leq \lambda \leq f(b)$. Si $\lambda = f(a)$ alors $c = a$ convient et si $\lambda = f(b)$ alors $c = b$ convient. On suppose dorénavant $f(a) < \lambda < f(b)$ et on considère le sous-ensemble E de $[a,b]$ défini par $E = \{x \in [a,b]; f(x) \leq \lambda\}$. Le sous-ensemble E est non vide car il contient a et puisqu'il est inclus dans $[a,b]$ donc borné il est majoré. Il possède donc une borne supérieure qu'on note c : pour tout $n \in \mathbf{N}$ on peut choisir $u_n \in E$ tel que $c - \frac{1}{1+n} < u_n \leq c$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ainsi construite tend vers c. Puisque $f(u_n) \leq \lambda$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et que la fonction f est continue, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $f(c)$ et $f(c) \leq \lambda$. Puisque $f(c) \leq \lambda < f(b)$ et que c est la borne supérieure de E, $c < b$ et $f(x) > \lambda$ si $x \in]c,b[$. En particulier la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $v_n = c + \frac{b-c}{1+n}$ si $n \in \mathbf{N}$ est à valeurs dans $]c,b[$, converge vers c et vérifie $f(v_n) > \lambda$ si $n \in \mathbf{N}$. Par passage à la limite, puisque f est continue, on obtient $f(c) \geq \lambda$. Ainsi, $f(c) \leq \lambda$ et $f(c) \geq \lambda$. Par conséquent $f(c) = \lambda$.

2.13 Montrer qu'une fonction à valeurs réelles continue sur un segment $[a,b]$ de R est bornée et atteint ses bornes.

Preuve (utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass) Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ continue. On va montrer que f est majorée et qu'elle atteint sa borne supérieure. En appliquant ce résultat à $-f$ on obtient que f est minorée et qu'elle atteint sa borne inférieure. Soit M la borne supérieure de f sur $[a,b]$: $M \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ il existe $x_n \in [a,b]$ tel que $f(x_n) > M - \frac{1}{1+n}$ si $M \in \mathbf{R}$ et $f(x_n) > n$ si $M = +\infty$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est à valeurs dans $[a,b]$ donc bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe $c \in [a,b]$ et $\phi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante telle que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} = (x_{\phi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers c. Puisque ϕ est strictement croissante $\phi(n) \geq n$ si $n \in \mathbf{N}$ et donc $f(u_n) = f(x_{\phi(n)}) > M - \frac{1}{1+n}$ si $M \in \mathbf{R}$ et $f(x_{\phi(n)}) > n$ si $M = +\infty$. Ainsi la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers M. Or f est continue et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} = (x_{\phi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers c. Par conséquent la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers M et $f(c)$ et $M = f(c)$. Finalement f est majorée par $f(c)$.

Preuve (par dichotomie) Elle va utiliser la propriété suivante de la borne supérieure (finie ou infinie) d'un sous-ensemble E de $\mathbf{R}$: si $E = E_1 \cup E_2$ alors la borne supérieure de E est égale au maximum entre les bornes supérieures de E_1 et de E_2. Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ continue. On va montrer que f est majorée et qu'elle atteint sa borne supérieure M (et donc que celle-ci est finie) en construisant deux suites adjacentes définies de la façon suivante. Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in [a,b]^{\mathbf{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbf{N}} \in [a,b]^{\mathbf{N}}$ définies par récurrence de la façon suivante. On pose $u_0 = a$ et $v_0 = b$. Puisque $[a,b] = [u_0, v_0]$ la borne supérieure M de $f([a,b])$ est égale à la borne supérieure de $f([u_0, v_0])$. Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons que u_n et v_n sont définis et que la borne supérieure M de $f([a,b])$ est égale à la borne supérieure de $f([u_n, v_n])$. Si cette borne supérieure M est aussi égale à la borne supérieure de $f([u_n, \frac{1}{2}(u_n+v_n)])$ on pose $u_{n+1} = u_n$ et $v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n+v_n)$. Sinon M est égale à la borne supérieure de $f([\frac{1}{2}(u_n+v_n), v_n])$ et on pose $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n+v_n)$ et $v_{n+1} = v_n$. Alors u est croissante, v décroissante et $v_n - u_n = \frac{1}{2^n}(b-a)$. Par conséquent $v - u$ est convergente vers 0 et u et v sont adjacentes donc convergentes vers la même limite c et pour tout $n \in \mathbf{N}$ $u_n \leq c \leq v_n$. Assurons nous que $f(c) = M$ est la borne supérieure de f. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que si $x \in [a,b]$ vérifie $|x - c[< \eta$ alors $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. Puisque u et v convergent vers c il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $|u_n - c| < \eta$ et $|v_n - c| < \eta$ et donc $c \in [u_n, v_n]$ et $f([u_n, v_n]) \subset]f(c) - \varepsilon, f(c) + \varepsilon[$. Or la borne supérieure M de $f([a,b])$ est la borne supérieure de $f([u_n, v_n])$ par construction des suites u et v. Aussi $f(c) - \varepsilon \leq M \leq f(c) + \varepsilon$. Comme cet encadrement vaut quel que soit $\varepsilon > 0$ il vient $f(c) = M$.

Preuve (utilisant l'existence de bornes supérieures) On aura encore recours au fait selon lequel la borne supérieure (finie ou infinie) d'un sous-ensemble E de $\mathbf{R}$ réunion de deux sous-ensembles E_1 et E_2 est le maximum entre les bornes supérieures de E_1 et de E_2. Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ continue. Soit

$E = \{x \in [a,b] : \mathrm{Sup}(f([x,b])) = \mathrm{Sup}(f([a,b]))\}$. Le réel a appartient à E, par conséquent E est non vide et comme il est borné car inclus dans $[a,b]$ il admet une borne supérieure qu'on note c et qui appartient à $[a,b]$. Assurons nous que $f(c) = M$ est la borne supérieure de f. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que si $x \in [a,b]$ vérifie $|x-c[< \eta$ alors $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ et donc $f(x) < f(c) + \varepsilon$. Ceci implique que $\mathrm{Sup}(f(]c-\eta, c+\eta[)) \leq f(c) + \varepsilon$. Puisque c est la borne supérieure de E il existe $x \in E$ tel que $c - \eta < x \leq c$ et donc $\mathrm{Sup}(f([x,b])) = \mathrm{Sup}(f([a,b]))$ mais $c + \eta \notin E$ donc

$$\mathrm{Sup}(f([c+\eta, b])) < \mathrm{Sup}(f([a,b])).$$

Ainsi $\mathrm{Sup}(f([a,b])) = \mathrm{Sup}(f([x, c+\eta[))$. Or $\mathrm{Sup}(f([x, c+\eta[) \leq f(]c-\eta, c+\eta[)$. Par conséquent $\mathrm{Sup}(f([a,b])) = \mathrm{Sup}(f(]c-\eta, c+\eta[))$ et puisque $\mathrm{Sup}(f(]c-\eta, c+\eta[)) \leq f(c) + \varepsilon$ on a

$$f(c) \leq \mathrm{Sup}(f([a,b])) \leq f(c) + \varepsilon.$$

Puisque c'est vrai pour tout $\varepsilon > 0$ ça signifie que $\mathrm{Sup}(f([a,b])) = f(c)$.

2.14 Donner la définition d'une fonction convexe sur un intervalle I.

Définition 20 Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et soit $f : I \to \mathbf{R}$. On dit que f est convexe si pour tout $(a,b) \in I^2$ et pour tout $t \in [0,1]$ on a

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b).$$

On dit que que est strictement convexe si pour tout $(a,b) \in I^2$ avec $a \neq b$ et pour tout $t \in]0,1[$ on a

$$f(ta + (1-t)b) < tf(a) + (1-t)f(b).$$

Proposition 28 (définition équivalente) Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et soit $f : I \to \mathbf{R}$. La fonction f est convexe si et seulement si pour tout $(a,b) \in I^2$ et pour tout $x \in [a,b]$ on a

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) = f(b) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b).$$

La fonction f est strictement convexe si et seulement si pour tout $(a,b) \in I^2$ et pour tout $x \in [a,b]$ on a

$$f(x) < f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) = f(b) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b).$$

Preuve Pour vérifier cette proposition il suffit de remarquer que l'application affine qui à $t \in \mathbf{R}$ associe $ta + (1-t)b$ est une bijection de $[0,1]$ dans $[a,b]$ et que si $t \in [0,1]$ et $x \in [a,b]$ vérifient $x = ta + (1-t)b$ alors

$$tf(a) + (1-t)f(b) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) = f(b) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b).$$

Définition 21 Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et soit $f : I \to \mathbf{R}$. On dit que que est concave (respectivement strictement concave) si $-f$ est convexe (respectivement strictement convexe). Ainsi f est concave si pour tout $(a,b) \in I^2$ et pour tout $t \in [0,1]$ on a

$$f(ta + (1-t)b) \geq tf(a) + (1-t)f(b)$$

et f est strictement concave si pour tout $(a,b) \in I^2$ et pour tout $t \in]0,1[$ on a

$$f(ta + (1-t)b) > tf(a) + (1-t)f(b).$$

2.15 Donner des exemples dont au moins un concernera une fonction non dérivable sur I.

Exemple 49 Les fonctions affines sur un intervalle I non réduit à un point sont les fonctions qui sont à la fois convexes et concaves : une fonction $f : I \to \mathbf{R}$ est affine si et seulement si quels que soient $(a,b) \in I^2$ et $t \in [0,1]$ l'égalité $f(ta+(1-t)b) = tf(a)+(1-t)f(b)$ est vérifiée.

Preuve Soit f affine sur I. Alors il existe $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ tels que $f(x) = \alpha x + \beta$ si $x \in I$. Soient a et b dans I et $t \in [0,1]$. On a

$$\begin{aligned} f(ta+(1-t)b) &= \alpha(ta+(1-t)b)+\beta \\ &= t(\alpha at+\beta)+(1-t(\alpha b+\beta) \\ &= f(a)+(1-t)f(b) \end{aligned}$$

Réciproquement soit $f : I \to \mathbf{R}$. On suppose que $f(ta+(1-t)b) = tf(a)+(1-t)f(b)$ si $a,b \in I$ et $t \in [0,1]$. Considérons trois réels $x < y < z$ dans I Alors $y = t(x)+(1-t)z$ avec $t = \frac{z-y}{z-x} \in]0,1[$. On a donc $f(y) = f(tx+(1-t)z) = tf(x)+(1-t)f(z)$. Il vient $(f(z)-f(y)) = t(f(z)-f(x))$ et $(f(x)-f(y)) = (1-t)(f(x)-f(z))$ et donc $t = \frac{f(z)-f(y)}{f(z)-f(x)}$ et $1-t = \frac{f(x)-f(y)}{f(x)-f(z)}$. Or $t = \frac{z-y}{z-x}$ et $1-t = \frac{x-y}{x-z}$. Par conséquent $\frac{f(z)-f(y)}{z-y} = \frac{f(z)-f(x)}{z-x} = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$. Le taux d'accroissement de f est donc une constante sur I qu'on note α. Fixons $a \in I$. Alors $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \alpha$ et donc $f(x) = \alpha \times (x-a)+f(a)$ si $x \in I$. La fonction f est bien affine.

Exemple 50 La fonction f définie par $f(x) = x^2$ si $x \in \mathbf{R}$ est strictement convexe.

Preuve Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ avec $a \neq b$ et $t \in]0,1[$. On a

$$f(ta+(1-t)b) = (ta+(1-t)b)^2 = t^2a^2+2t(1-t)ab+(1-t)^2b^2$$

et

$$tf(a)+(1-t)f(b) = ta^2+(t-t)b^2.$$

Par conséquent

$$tf(a)+(1-t)f(b)-f(ta+(1-t)b) = t(1-t)(a^2-2ab+b^2) = t(1-t)(a-b)^2.$$

Cette différence est strictement positive car $0 < t < 1$ et $a \neq b$. Ainsi on a bien

$$f(ta+(1-t)b) < tf(a)+(1-t)f(b)$$

dès que $a \neq b$ et $t \in]0,1[$, ce qui établit la stricte convexité de f.

Exemple 51 La fonction f définie par $f(x) = |x|$ si $x \in \mathbf{R}$ est convexe.

Preuve Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ et $t \in [0,1]$. On a $f(ta+(1-t)b) = |ta+(1-t)b| \leq |ta|+|(1-t)b|$. Or $|ta| = t|a|$ car $t \geq 0$ et $|(1-t)b| = (1-t)|b|$ car $t \leq 1$ et donc

$$|ta|+|(1-t)b| = t|a|+(1-t)|b| = tf(a)+(1-t)f(b).$$

Ainsi on a établi

$$f(ta+(1-t)b) \leq tf(a)+(1-t)f(b)$$

dès que $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ et $t \in [0,1]$. Ceci prouve que la valeur absolue est bien convexe.

Exemple 52 La fonction f définie par $f(x) = \sin(x)$ n'est ni convexe ni concave.

Preuve On a $1 = f(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{1}{2}(0+\pi)) > 0 = \frac{1}{2}(f(0)+f(\pi))$ et donc f n'est pas convexe. De plus on a on a $-1 = f(\frac{3\pi}{2}) = f(\frac{1}{2}(\pi+2\pi)) < 0 = \frac{1}{2}(f(\pi)+f(2\pi))$ et donc f n'est pas concave.

2.16 Convexité et variations du taux d'accroissement

Proposition 29 Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction numérique définie sur un intervalle I. La fonction f est convexe si et seulement si pour tout triplet $(a,b,c) \in I^3$ tel que $a < b < c$ les taux d'accroissements $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, $\frac{f(a)-f(c)}{a-c}$ et $\frac{f(c)-f(b)}{c-b}$ vérifient

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(a)-f(c)}{a-c} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}.$$

Preuve Supposons f convexe. Considérons alors trois réels $a < b < c$ dans I Alors $b = t(a)+(1-t)c$ avec $t = \frac{c-b}{c-a} \in]0,1[$. La convexité se traduit par $f(b) = f(ta+(1-t)b) \leq tf(a)+(1-t)f(c)$ et donc $t(f(c)-f(a)) \leq f(c)-f(b)$ et $f(b)-f(a) \leq (1-t)(f(c)-f(a))$, c'est à dire, puisque $t = \frac{c-b}{c-a}$, $\frac{c-b}{c-a}(f(c)-f(a)) \leq f(c)-f(b)$ et $f(b)-f(a) \leq \frac{b-a}{c-a}(f(c)-f(a))$. En divisant la première inégalité par $c-b$ et la seconde par $b-a$ on obtient, puisque $c-b > 0$ et $b-a > 0$, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(a)-f(c)}{a-c}$ et $\frac{f(a)-f(c)}{a-c} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$, c'est à dire

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(a)-f(c)}{a-c} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}.$$

Réciproquement on suppose que pour tout triplet $(a,b,c) \in I^3$ tel que $a < b < c$ on a cette double inégalité. Soient $x < y \in I$ et $t \in]0,1[$. On applique les inégalités $a = x, b = tx+(1-t)y$ et $c = y$. Il vient $\frac{f(tx+(a-t)y)-f(x)}{(1-t)(y-x)} \leq \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$. En multipliant les deux termes de l'inégalité par $(1-t)(y-x)$ qui est strictement positif on obtient $f(tx+(a-t)y)-f(x) \leq (1-t)(f(y)-f(x))$ qui donne finalement $f(tx+(a-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y)$. Comme ceci est vrai pour tout $(x,y) \in I^2$ tels que $x < y$ et pour tout $t \in]0,1[$, la convexité de f est établit.

Remarque 17 En remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes et le terme convexe par strictement convexe dans cette preuve on obtient la démonstration de l'énoncé suivant : une fonction $f : I \to \mathbf{R}$ définie sur un intervalle I est strictement convexe si et seulement si pour tout $(a,b,c) \in I^3$ tel que $a < b < c$ les taux d'accroissements vérifient

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} < \frac{f(a)-f(c)}{a-c} < \frac{f(c)-f(b)}{c-b}.$$

Lemme 1 Soient $u, v \in \mathbf{R}_+^*$ et $U, V \in \mathbf{R}$. Alors on a les équivalences suivantes :

$$\frac{U}{u} \leq \frac{U+V}{u+v} \Longleftrightarrow \frac{U}{u} \leq \frac{V}{v} \Longleftrightarrow \frac{U+V}{u+v} \leq \frac{V}{v}.$$

Preuve Puisque $0 < u, v$ on a les équivalences suivantes

$$\frac{U}{u} \leq \frac{U+V}{u+v} \Longleftrightarrow 0 \leq \frac{U+V}{u+v} - \frac{U}{u} = \frac{uV-vU}{u(u+v)} \Longleftrightarrow 0 \leq uV-vU \Longleftrightarrow \frac{U}{u} \leq \frac{V}{v}$$

et

$$\frac{U+V}{u+v} \leq \frac{V}{v} \Longleftrightarrow 0 \leq \frac{V}{v} - \frac{U+V}{u+v} = \frac{uV-vU}{v(u+v)} \Longleftrightarrow 0 \leq uV-vU \Longleftrightarrow \frac{U}{u} \leq \frac{V}{v}$$

et donc
$$\frac{U}{u} \leq \frac{U+V}{u+v} \Longleftrightarrow 0\frac{U}{u} \leq \frac{V}{v} \Longleftrightarrow \frac{U+V}{u+v} \leq \frac{V}{v}.$$

Remarque 18 Le lemme reste vrai avec des inégalités strictes.

Corollaire 1 Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction numérique définie sur un intervalle I. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i/ La fonction f est convexe ;

ii/ $\forall (a,b,c) \in I^3,\ a < b < c \Longrightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$;

iii/ $\forall (a,b,c) \in I^3,\ a < b < c \Longrightarrow \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$;

iv/ $\forall (a,b,c) \in I^3,\ a < b < c \Longrightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$.

Preuve En posant $u = b-a$, $v = c-b$, $U = f(b)-f(a)$ et $V = f(c)-f(b)$ on déduit ce corollaire de la proposition précédente et du lemme qui suit.

Corollaire 2 Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction numérique définie sur un intervalle I. La fonction f est convexe si et seulement si pour tout triplet $(a,b,c) \in I^3$ tel que $a < b < c$ on a
$$f(a) \geq f(b) + \frac{f(c)-f(b)}{c-b}(a-b) \text{ et } f(c) \geq f(b) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-b).$$

Preuve Il suffit d'appliquer le corollaire précédent après avoir remarquer que, puisque $a < b < c$, l'inégalité $f(a) \geq f(b) + \frac{f(c)-f(b)}{c-b}(a-b)$ est équivalente à l'inégalité $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$ et l'inégalité $f(c) \geq f(b) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-b)$ est aussi est équivalente à l'inégalité $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$.

Remarque 19 Les deux corollaires admettent des variantes dans le cas strictement convexe en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.

2.17 Convexité et continuité

Proposition 30 Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction numérique définie sur un intervalle I ouvert non vide. Si la fonction f est convexe alors elle est continue.

Preuve Soit I un intervalle ouvert non vide, $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction convexe. Soit $b \in I$.

Puisque I est ouvert il existe $a, c \in I$ tels que $a < b < c$.

On introduit les deux fonctions affines g et h définies par
$$g(x) = f(b) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b) \text{ et } h(x) = f(b) + \frac{f(c)-f(b)}{c-b}(x-b) \quad x \in \mathbf{R}.$$

Puisque f est convexe, si $x \in [a,b]$ on a $f(x) \leq g(x)$ et si $x \in [b,c]$ on a $f(x) \leq h(x)$.

De plus d'après le corollaire précédent si $x \in [a,b]$ on a $f(x) \geq h(x)$ et si $x \in [b,c]$ on a $f(x) \geq g(x)$.

Par conséquent si $x \in [a,b]$ on a $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$. Or Les fonctions g et h sont affines donc continues. De plus elles coïncident en b avec f. On a donc $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} g(x) = f(b)$. Ainsi d'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x)$ existe et vaut $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} g(x) = f(b)$. La fonction f est donc continue à gauche en b.

De même si $x \in [b,c]$ on a $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$. Or Les fonctions g et h sont affines donc continues. De plus elles coïncident en b avec f. On a donc $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x>b}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x\to b\\ x>b}} g(x) = f(b)$. Ainsi d'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x>b}} f(x)$ existe et vaut $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x>b}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x\to b\\ x>b}} g(x) = f(b)$. La fonction f est donc continue à droite en b.

Puisque f est continue à gauche et à droite en b elle est continue en b.

Remarque 20 Il est important que l'intervalle I soit ouvert. En effet la fonction f définie sur $\mathbf{R}_+$ par $f(0) = 1$ et $f(x) = 0$ si $x > 0$ est convexe sans être continue en 0.

2.18 Continuité uniforme d'une fonction continue sur un segment.

Théorème 6 Si $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ est continue elle est uniformément continue.

Preuve Supposons que f ne soit pas uniformément continue et montrons que cette hypothèse est fausse en montrant qu'elle aboutit à une contradiction. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$ il existe $x, y \in [a,b]$ tels que $|x-y| < \eta$ et $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. Choisissons donc pour tout $n \in \mathbf{N}$ des réels $x_n, y_n \in [a,b]$ tels que $|x_n - y_n| < \frac{1}{1+n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe $c \in [a,b]$ et $\phi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante telle que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} = (x_{\phi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers c. Puisque ϕ est strictement croissante $\phi(n) \geq n$ si $n \in \mathbf{N}$ et donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}} = (y_{\phi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ vérifie $|u_n - v_n| < \frac{1}{1+n}$ si $n \in \mathbf{N}$ et donc converge aussi vers c. Par conséquent, puisque f est continue les suites $(f(u_n))_{n\in\mathbf{N}}$ et $(f(v_n))_{n\in\mathbf{N}}$ tendent vers $f(c)$. Or $|f(u_n) - f(v_n)| \geq \varepsilon > 0$ si $n \in \mathbf{N}$ donc les $(f(u_n))_{n\in\mathbf{N}}$ et $(f(v_n))_{n\in\mathbf{N}}$ ne peuvent pas avoir la même limite. C'est la contradiction recherchée.

2.19 Limite d'une fonction uniformément continue sur un intervalle ouvert borné.

Théorème 7 Si $a < b$ et $f :]a,b[\to \mathbf{R}$ est uniformément continue alors elle possède une limite finie en a et une limite finie en b.

Preuve On prouve l'existence de la limite en a. L'existence de la limite en b peut être établie de façon analogue. Puisque f uniformément continue il existe $\eta_1 > 0$ tel que si $x, y \in]a,b[$ alors on a $|f(x) - f(y)| < 1$ dès que $|x-y| < \eta_1$. On pose $\delta = \min(\eta_1, \frac{1}{2}(b-a))$ puisque $0 < \delta \leq \eta_1$ et $0 < \delta \leq \frac{1}{2}(b-a)$ l'intervalle $]a, a+\delta]$ est dans $]a,b[$ et si $x \in]a, a+\delta]$ alors $|f(x) - f(a+\delta)| < 1$. La restriction de f à $]a, a+\delta]$ est bornée. La suite $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_n = f(a + \frac{1}{1+n}\delta)$ est donc bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe $\phi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante telle que $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ admette une limite réelle l. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\frac{1}{2}\varepsilon > 0$, que $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers l, que f est uniformément continue, il existe $N \in \mathbf{N}$ et η tels que si $n \in \mathbf{N}$ et $x, y \in [a,b]$ alors $|u_{\phi(n)} - l_a| < \frac{1}{2}\varepsilon$ si $n \geq N$ et $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ dès que $|x-y| < \eta$. Soit $n = \max(N, \mathrm{Ent}(1 + \frac{\eta}{\delta}))$. Puisque $n \geq N$ on a $|u_{\phi(n)} - l_a| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Puisque $n \geq \frac{\eta}{\delta}$ et que $\phi(n) \geq n$ on a $|a + \frac{1}{1+\phi(n)}\delta - a| < \eta$. Soit $x \in]a,b[$ tel que $|x-a| < \eta$. On a $|x - (a + \frac{1}{1+\phi(n)}\delta)| < \eta$, ceci implique que

$$|f(x) - u_{\phi(n)}| = |f(x) - f(a + \frac{1}{1+\phi(n)}\delta)| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Finalement on a $|f(x) - l| \leq |f(x) - u_{\phi(n)}| + |u_{\phi(n)} - l| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$. On vient de prouver que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que si $x \in D$ et $|x-a| < \eta$ alors $|f(x) - l|$. La fonction f admet une limite finie en a.

2.20 Opérations algébriques sur les fonctions continues.

Proposition 31 Soient $f,g : D \to \mathbf{R}$ et $a \in D$ et $\lambda \in \mathbf{R}$ Si f et g sont continues en a (respectivement continues sur D) alors λf, $f+g$ et fg sont continues en a (respectivement continues sur D). Si de plus f ne s'annule pas alors $\frac{1}{f}$ est continue en a (respectivement continue).

Ces propriétés sont des conséquences des propriétés similaires vérifiées par les limites.

Proposition 32 Si $f,g : D \to \mathbf{R}$ sont uniformément continues et bornées alors fg est uniformément continue.

Preuve Soit $\varepsilon > 0$. Soit $K > 0$ qui majore $|f|$ et $|g|$. Puisque $\frac{1}{2K}\varepsilon > 0$, il existe $\eta_{>}0$ tel que si $a,x \in D$ et $|x-a| < \eta$ alors $|f(a)|,|f(x)| < K$, $|g(a)|,|g(x)| < K$, $|f(x)-f(a)| < \frac{\varepsilon}{2K}$, $|g(x)-g(a)| < \frac{\varepsilon}{2K}$. Ceci implique

$$\begin{aligned}
|f(x)\times g(x) - f(a)\times g(a)| &= |(f(x)-f(a))\times g(x) + (g(x)-g(a))\times f(a)| \\
&\leq |f(x)-f(a)|\times|g(x)| + |g(x)-g(a)|\times|f(a)| \\
&< \frac{\varepsilon}{2K}\times K + \frac{\varepsilon}{2K}\times K \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ainsi fg est uniformément continue.

Remarque 21 Il est important de supposer f et g bornées comme le montre l'exemple de la fonction h définie par $h(x) = x\sin(x)$ si $x \in \mathbf{R}$. C'est le produit de deux fonctions uniformément continues, x et sin mais elle n'est pas uniformément continue (voir l'un des exemples qui illustrent la continuité uniforme).

2.21 Injectivité et monotonicité stricte, continuité de la réciproque d'une bijection continue.

Proposition 33 Soit I un intervalle ouvert (i.e. qui ne contient ni sa borne supérieure ni sa borne inférieure), $J \subset \mathbf{R}$ et $f : I \to J$ une bijection continue. Alors J est un intervalle ouvert, f est strictement monotone et sa réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue.

Preuve Le cas où I est réduit à un élément est immédiat. On suppose que I n'est pas un singleton. On montre d'abord que f est monotone. On raisonne par l'absurde. Si f n'est pas monotone il existe $a < b$ et $c < d$ tels que $f(b)-f(a) > 0$ et $f(d)-f(c) < 0$. Soit $g : [0,1] \to \mathbf{R}$ définie par $g(t) = f(td+(1-t)b) - f(tc+(1-t)a)$. La fonction g est continue car obtenue par composition et opérations algébriques à partir de fonctions continues. On a $g(0) = f(b)-f(a) > 0$ et $g(1) = f(d)-f(c) < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires. Il existe $t \in]0,1[$ tel que

$$g(t) = f(td+(1-t)b) - f(tc+(1-t)a) = 0$$

donc $f(td+(1-t)b) = f(tc+(1-t)a)$. Or, puisque $a < b$, $c < d$ et $0 < t, 1-t < 1$ on a

$$td+(1-t)b > tc+(1-t)a.$$

Ainsi f n'est pas injective. C'est la contradiction recherchée. La fonction f est donc bien monotone. Montrons que $J = f(I)$ est un intervalle. Puisque f est une bijection $f(I) = J$. Soient $\alpha,\beta \in J$. il existe $a,b \in I$ tels que $f(a) = \alpha$ et $f(b) = \beta$. Puisque f est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, tout $\lambda \in [\alpha, \beta]$ admet un antécédent par f et donc appartient à $f(I) = J$. Ainsi $[\alpha, \beta]$ est inclus dans $f(I) = J$ dès que $\alpha, \beta \in J$. Ceci prouve que J est un intervalle. Il reste à prouver que la réciproque f^{-1} de la bijection f est continue. Soit $b \in J$ et soit $a \in I$ tel que $f(a) = b$, c'est à dire tel que $f^{-1}(b) = a$. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque a appartient à l'intervalle I il existe $\delta \in]0, \varepsilon]$ tel que $I_a = [a - \delta, a + \delta] \cap I$ est un intervalle qui est soit égal à $[a - \delta, a + \delta]$ (si a n'est pas une borne de I), soit égal à $[a - \delta, a]$ (si a est la borne supérieure de I), soit égal à $[a, a + \delta]$ (si a est la borne inférieure de I). Puisque f est strictement monotone et continue il existe $\eta > 0$ tel que soit

$$f(a - \delta) < b - \eta < b = f(a) < b + \eta < f(a + \delta)$$

(si a n'est pas une borne de I), soit

$$f(a - \delta) < b - \eta < b$$

(si a est la borne supérieure de I), soit

$$b = f(a) < b + \eta < f(a + \delta)$$

(si a est la borne inférieure de I). Alors pour tout $y \in J$ tel que $y \in]b - \eta, b + \eta[$, c'est à dire tel $|y - b| < \eta$ on a soit $f(a - \delta) < y < f(a + \delta)$ (si a n'est pas une borne de I), soit $f(a - \delta) < y \leq f(a) = b$ (si a est la borne supérieure de I), soit $b = f(a) \leq y < f(a + \delta)$ (si a est la borne inférieure de I). Ainsi, puisque f^{-1} est strictement monotone comme f l'est, on a soit $a - \varepsilon \leq a - \delta < f^{-1}(y) < a + \delta \leq a + \varepsilon$ (si a n'est pas une borne de I), soit $a - \varepsilon \leq a - \delta < f^{-1}(y) \leq a$ (si a est la borne supérieure de I), soit $a \leq f^{-1}(y) < a + \delta \leq a + \varepsilon$ (si a est la borne inférieure de I). Ceci prouve que f^{-1} est continue en a (dans les trois cas).

3 Dérivabilité

3.1 Rappeler la définition de la dérivabilité d'une fonction à valeurs réelles en un point a de R.

Définition 22 Soit $f : D \to \mathbf{R}$ et soit $a \in D$. On suppose a adhérent à $D \setminus \{a\}$. On dit que f est dérivable en a si la fonction qui à $x \in D \setminus \{a\}$ associe $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie en a. Si f est dérivable en a alors la limite $\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ s'appelle nombre dérivé de f en a (ou par abus de langage dérivée de f en a) et elle est notée $f'(a)$.

Définition 23 Soit $f : D \to \mathbf{R}$. La fonction f est dite dérivable si elle est dérivable en tout point de D. Si c'est le cas on appelle dérivée de f la fonction noté f' qui à tout $a \in D$ associe $f'(a)$ le nombre dérivé de f en a.

Proposition 34 Soit $f : D \to \mathbf{R}$ et soit $a \in D$. Si f est dérivable en a alors elle est continue en a.

Preuve On suppose f dérivable en a et on note $f'(a)$ son nombre dérivé en a. Puisque $\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ et que $\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}}(x-a) = 0$ on déduit que $f(x) - f(a)$ qui est égal à $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \times (x-a)$ a pour limite en a le produit des limites, c'est à dire 0 :

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x) - f(a) = \lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \times (x-a) = \lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \times \lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} (x-a) = f'(a) \times 0 = 0.$$

Ainsi la limite de f en a existe et vaut $f(a)$: f est continue en a.

Corollaire 3 Si $f : D \to \mathbf{R}$ est dérivable elle est continue (étant dérivable en chaque $a \in D$ elle est continue en tout $a \in D$).

3.2 Donner des exemples simples, tous justifiables à l'aide de la définition.

Exemple 53 Toute fonction constante est dérivable et sa dérivée est la fonction nulle.

Preuve Soit f un telle fonction. Soient $a, x \in \mathbf{R}$ avec $a \neq x$. On a $f(x) - f(a) = 0$ donc $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0$ et donc $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} 0 = 0$. La fonction f est dérivable en a et $f'(a) = 0$.

Exemple 54 La fonction f définie par $f(x) = x$ si $x \in \mathbf{R}$ est dérivable et sa dérivée est la fonction constante égale à 1.

Preuve Soit f un telle fonction. Soient $a, x \in \mathbf{R}$ avec $a \neq x$. On a $f(x) - f(a) = x - a$ donc $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 1$ et donc $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} 1 = 1$. La fonction f est dérivable en a et $f'(a) = 1$.

Exemple 55 La fonction f définie par $f(x) = |x|$ si $x \in \mathbf{R}$ est dérivable en $a \in \mathbf{R}^*$ et alors $f'(a) = \frac{a}{|a|}$ mais elle n'est pas dérivable en 0.

Preuve Soit f un telle fonction. Soient $a, x \in \mathbf{R}$ avec $a \neq x$. Si $a, x > 0$ alors $f(x) - f(a) = x - a$ donc $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 1 = \frac{a}{|a|}$ et donc $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} 1 = 1 = \frac{a}{|a|}$. De même, si $a, x < 0$, alors $f(x) - f(a) = -(x-a)$ donc $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -1 = \frac{a}{|a|}$ et donc $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} -1 = -1 = \frac{a}{|a|}$.

En revanche lorsque $x' > 0 > x''$ on a $f(x') - f(0) = x'$ mais $f(x'') - f(0) = -x''$. Par conséquent $\frac{f(x')-f(0)}{x'-0} = 1$ mais $\frac{f(x'')-f(0)}{x''-0} = -1$ et donc $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ ne peut avoir de limite en 0.

Exemple 56 La fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}$ si $x \in [0+\infty[$ est dérivable en $a \in]0,+\infty[$ et sa dérivée vérifie $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$ mais f n'est pas dérivable en 0.

Preuve Soient $a,x \in [0,+\infty[$ avec $a \neq x$. Alors, puisque $x - a = (\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})$ il vient $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$. Puisque $\lim_a \sqrt{x} = \sqrt{a}$, on déduit des propriétés des limites relativement aux opérations algébriques que si $a \neq 0$ alors $\lim_a \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_a \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$, et donc f est dérivable en a et $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$. En revanche $\lim_0 \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_0 \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ et donc la fonction f n'est pas dérivable en 0.

Exemple 57 La fonction f définie par $f(x) = x^2$ si $x \in \mathbf{R}$ est dérivable en $a \in \mathbf{R}$ et $f'(a) = 2a$.

Preuve Soient $a,x \in \mathbf{R}$ avec $a \neq x$. On a $f(x) - f(a) = x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$ donc $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = x+a$ et par passage à la limite $\lim_a \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_a x + a = 2a$.

Exemple 58 La fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x \in \mathbf{R}^*$ est dérivable en $a \in \mathbf{R}^*$ et $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$.

Preuve Soient $a,x \in \mathbf{R}^*$ avec $a \neq x$. On a $f(x) - f(a) = \frac{1}{x} - \frac{1}{a} = -\frac{x-a}{xa}$ donc $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\frac{1}{xa}$ et par passage à la limite $\lim_a \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_a -\frac{1}{xa} = -\frac{1}{a^2}$.

Exemple 59 La fonction f définie par $f(x) = \sin(x)$ si $x \in \mathbf{R}$ est dérivable en a et $\sin'(0) = 1$.

Preuve Si $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ alors le secteur angulaire d'ouverture θ d'un disque de rayon 1 contient un triangle rectangle de base égale à $\cos(\theta)$ et de hauteur égale à $\sin(\theta)$ et il est contenu dans un triangle rectangle de base égale à 1 et de hauteur égale à $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$. Si on compare les aires on obtient $\frac{1}{2}\cos(\theta)\sin(\theta) \leq \frac{1}{2}\theta \leq \frac{1}{2}\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$ qui donne $\cos(\theta) \leq \frac{\sin(\theta)}{\theta} \leq \frac{1}{\cos(\theta)}$. Or $\lim_0 \cos(\theta) = 1$. Donc $\lim_0 \frac{1}{\cos(\theta)} = 0$ et par encadrement $\lim_{\theta>0\to 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1$. Or si $x' < 0$ on a $\frac{\sin(x'}{x'} = \frac{\sin(-x')}{-x'}$. Par conséquent on a $\lim_{x'<0\to 0} \frac{\sin(x')}{x'} = \lim_{x>0\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ et donc $\frac{\sin(x)}{x}$ a une limite en 0 qui vaut 1. La fonction sin est bien dérivable en 0 et $\sin'(0) = 1$.

Exemple 60 Les fonctions f définie par $f(x) = \sin(x)$ et g définie par $g(x) = \cos(x)$ si $x \in \mathbf{R}$ sont dérivables et $\sin'(a) = \cos(a)$, $\cos'(a) = -\sin(a)$ si $a \in \mathbf{R}$.

Preuve Soient $a,x \in \mathbf{R}^*$ avec $a \neq x$. On a

$$\sin(x) - \sin(a) = 2\cos(\frac{x+a}{2})\sin(\frac{x-a}{2})$$

et

$$\cos(x) - \cos(a) = -2\sin(\frac{x+a}{2})\sin(\frac{x-a}{2}).$$

On en déduit

$$\frac{\sin(x) - \sin(a)}{x-a} = \cos(\frac{x+a}{2})\frac{\sin(\frac{x-a}{2})}{\frac{x-a}{2}} \quad \text{et} \quad \frac{\cos(x) - \cos(a)}{x-a} = -\sin(\frac{x+a}{2})\frac{\sin(\frac{x-a}{2})}{\frac{x-a}{2}}.$$

Puisque sin et cos sont continues et que $\lim_0 \frac{\sin(t)}{t} = 1$, en raison des propriétés vérifiées par les limites relativement à la composition et aux opérations algébriques il vient

$$\lim_a \frac{\cos(x)-\cos(a)}{x-a} = -\lim_a \sin(\frac{x+a}{2}) \lim_a \frac{\sin(\frac{x-a}{2})}{\frac{x-a}{2}} = -\sin(a)$$

et

$$\lim_a \frac{\sin(x)-\sin(a)}{x-a} = \lim_a \cos(\frac{x+a}{2}) \lim_a \frac{\sin(\frac{x-a}{2})}{\frac{x-a}{2}} = \cos(a).$$

Les fonctions sin et cos sont donc bien dérivables et $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$.

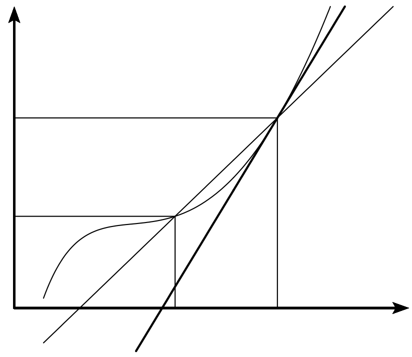
3.3 Donner une autre définition, équivalente à la première. Interpréter graphiquement.

Définition 24 Soit $f : D \to \mathbf{R}$ et soient $a, b \in D$ tels que $a \neq b$. On appelle sécante au graphe de f qui passe par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ la droite qui passe par ces deux points. C'est la droite d'équation $y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. Le segment qui relie $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ est la corde entre ces deux points.

Définition 25 Soit $f : D \to \mathbf{R}$ et soit $a \in D$. On suppose a adhérent à $D \setminus \{a\}$. On dit que f est dérivable en a s'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ et $\varepsilon : D \to \mathbf{R}$ tels que ε tend vers 0 en a et $f(x) = f(a) + \lambda \times (x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$. Si f est dérivable en a alors le nombre λ s'appelle nombre dérivé de f en a (ou par abus de langage dérivée de f en a) et il est noté $f'(a)$. La droite d'équation $y = f(a) + f'(a) \times (x-a)$ s'appelle droite tangente en $(a, f(a))$ au graphe de f.

Remarque 22 Soit $f : D \to \mathbf{R}$ et soit $a \in D$. On suppose a adhérent à $D \setminus \{a\}$. Si f $\lim_{\substack{x\to a \\ x\neq a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et appartient à $\mathbf{R}$, c'est à dire si f est dérivable en a selon la première définition, on note λ cette limite. On pose $\varepsilon(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \lambda$ si $x \in D \setminus \{a\}$ et on pose $\varepsilon(a) = 0$. Par construction $\lim_a \varepsilon = 0$ et $f(x) = f(a) + \lambda \times (x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$ si $x \in D$ et donc f est dérivable en a selon la seconde définition. Inversement s'il existe $\varepsilon : D \to \mathbf{R}$ et $\lambda \in_r r$ tels que $\lim_a \varepsilon = 0$ et $f(x) = f(a) + \lambda \times (x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$ si $x \in D$ alors $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lambda + \varepsilon(x)$ et $\lim_{\substack{x\to a \\ x\neq a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lambda$. La fonction f est donc dérivable en a selon la première définition et $f'(a) = \lambda$. Les deux définitions sont donc bien équivalentes.

Remarque 23 (interprétation graphique) La droite tangente en $(a, f(a))$ au graphe de f est en un certain sens la limite des sécantes qui passent par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ lorsque b tend vers a. C'est aussi, parmi les droites qui passent par $(a, f(a))$ celle qui s'approche le plus du graphe de f. En effet, considérons $f : D \to \mathbf{R}$ dérivable en $a \in D$ et soit $f'(a)$ son nombre dérivé en a. Il existe $\varepsilon : D \to \mathbf{R}$ tel que ε tend vers 0 en a et $f(x) = f(a) + f'(a) \times (x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$. La tangente en $(a, f(a))$ au graphe de f passe par $(a, f(a))$ et c'est le graphe de la fonction affine définie par $t(x) = f(a) + f'(a) \times (x-a)$ si $x \in \mathbf{R}$. C'est, parmi toutes les droites qui passent par $(a, f(a))$, la plus proche au sens suivant. Soit D une autre droite qui passe par $(a, f(a))$. Alors D est le graphe d'une fonction qui à $x \in \mathbf{R}$ associe $s(x) = f(a) + l \times (x-a)$ ou $l \in \mathbf{R}$ est un réel différent de $f'(a)$. Pour tout x proche de a on a $|s(x) - f(x)| > |t(x) - f(x)|$ et $\lim_{\substack{x\to a \\ x\neq a}} \frac{|t(x)-f(x)|}{|s(x)-f(x)|}$. En effet d'une part $l - f'(a) \neq 0$ et $\lim_a \varepsilon = 0$, et d'autre part $|t(x) - f(x)| = |(x-a)\varepsilon(x)|$ et $|s(x) - f(x)| = |(x-a)(l - f'(a) - \varepsilon(x))|$.



Tangente et sécante au graphe d'une fonction s'intersectant au point de tangence

3.4 Opérations algébriques sur les dérivées.

Proposition 35 Soient $f, g : D \to \mathbf{R}$ dérivables en un point $a \in D$. Alors $f+g$ et fg sont dérivables en a, $(f+g)'(a) = (f'+g')(a)$ et $(fg)'(a) = (f'g+fg')(a)$.

Preuve Il existe $f'(a), g'(a) \in \mathbf{R}$ et $\varepsilon_1, \varepsilon_2 : D \to_r r$ tels que si $x \in D$ alors

$$f(x) = f(a) + f'(a) \times (x-a) + (x-a)\varepsilon_1(x),\ \lim_a \varepsilon_1(x) = 0$$

et

$$g(x) = g(a) + g'(a) \times (x-a) + (x-a)\varepsilon_2(x),\ \lim_a \varepsilon_2(x) = 0.$$

Ainsi

$$(f+g)(x) = (f(a)+g(a)) + (f'(a)+g'(a)) \times (x-a) + (x-a)\varepsilon_3(x)$$

si $x \in D$ et où $\varepsilon_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Puisque $\lim_a \varepsilon_1(x) = 0$ et $\lim_a \varepsilon_2(x) = 0$ il vient $\lim_a \varepsilon_3(x) = 0$. Ceci établit que $f+g$ est dérivable en a et que $(f+g)'(a) = f'(a)+g'(a) = (f'+g')(a)$. De même

$$(fg)(x) = (f(a)g(a)) + (f'(a)g(a) + f(a)g'(a)) \times (x-a) + (x-a)\varepsilon_4(x)$$

si $x \in D$ et où $\varepsilon_4(x) = \varepsilon_1(x)(g(a)+g'(a)(x-a)) + \varepsilon_2(x)(f(a)+f'(a)(x-a)) + \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)(x-a)$. Puisque $\lim_a \varepsilon_1(x) = 0$ et $\lim_a \varepsilon_2(x) = 0$ il vient $\lim_a \varepsilon_4(x) = 0$. Ceci établit que fg est dérivable en a et que $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a) = (f'g+fg')(a)$.

Proposition 36 Si $f : D \to \mathbf{R}^*$ est dérivable en a alors $\frac{1}{f}$ est dérivable en a et $(\frac{1}{f})'(a) = -(\frac{f'}{f^2})(a)$.

Preuve Si $x \in D$ alors $\frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)}}{x-a} = \frac{1}{f(a)f(x)} \frac{f(a)-f(x)}{x-a}$. Or $\lim_a \frac{f(a)-f(x)}{x-a} = -f'(a)$ et $\lim_a \frac{1}{f(a)f(x)} = \frac{1}{f^2(a)}$. Par conséquent $\lim_a \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)}}{x-a} = -\frac{f'(a)}{f^2(a)}$. La fonction $\frac{1}{f}$ est bien dérivable en a et $(\frac{1}{f})'(a) = -\frac{f'(a)}{f^2(a)}$, c'est à dire $(\frac{1}{f})'(a) = -(\frac{f'}{f^2})(a)$.

3.5 Dérivée de fonctions composées.

Proposition 37 Soient $f : D \to E$ et $g : E \to \mathbf{R}$. Soit $a \in D$. On suppose que f est dérivable en a et g en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = ((g' \circ f) \times f')(a)$.

Preuve Il existe $f'(a), g'(f(a)) \in \mathbf{R}$, $\varepsilon_1 : D \to_r r$ et $\varepsilon_2 : E \to_r r$ tels que si $x \in D$ et $y \in E$ alors

$$f(x) = f(a) + f'(a) \times (x-a) + (x-a)\varepsilon_1(x)\ \lim_a \varepsilon_1(x) = 0$$

et

$$g(y)=g(f(a))+g'(f(a))\times(y-f(a))+(y-f(a))\varepsilon_2(y),\ \lim_{f(a)}\varepsilon_2(y)=0.$$

Ainsi si $x\in D$

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x) &= g(f(x))\\ &= g(f(a))+g'(f(a))\times(f(x)-f(a))+(f(x)-f(a))\varepsilon_2(f(x))\\ &= g(f(a))+g'(f(a))\times(f'(a)\times(x-a)+(x-a)\varepsilon_1(x))\\ &\quad +(f'(a)\times(x-a)+(x-a)\varepsilon_1(x))\varepsilon_2(f(x))\\ &= g(f(a))+(g'(f(a))\times f'(a))\times(x-a)\\ &\quad +(x-a)(\varepsilon_1(x)+(f'(a)+\varepsilon_1(x))\varepsilon_2(f(x))).\end{aligned}$$

Posons $\varepsilon(x)=\varepsilon_1(x)+(f'(a)+\varepsilon_1(x))\varepsilon_2(f(x))$ si $x\in D$. Puisque $\lim_a\varepsilon_1(x)=0$, $\lim_{f(a)}\varepsilon_2(y)=0$ et $\lim_a f(x)=f(a)$ il vient $\lim_a\varepsilon(x)=0$. Ainsi

$$(g\circ f)(x)=(g\circ f)(a)+(g'(f(a))\times f'(a))\times(x-a)+(x-a)\varepsilon(x)$$

avec $\lim_a\varepsilon(x)=0$. Ceci établit que $g\circ f$ est dérivable en a et que $(g\circ f)'(a)=g'(f(a))\times f'(a)$, c'est à dire $(g\circ f)'(a)=((g'\circ f)\times f')(a)$.

Proposition 38 Si $f:D\to\mathbf{R}^*$ est dérivable en a alors $\frac{1}{f}$ est dérivable en a et $(\frac{1}{f})'(a)=-(\frac{f'}{f^2})(a)$.

Preuve Il suffit d'appliquer la proposition précédente à f et g définie par $g(y)=\frac{1}{y}$ si $y\in\mathbf{R}^*$.

Proposition 39 Soit $f:I\to J$ une bijection continue d'un intervalle I dans un intervalle J. On suppose que f est dérivable et que sa dérivée ne s'annule jamais. Alors $f^{-1}:J\to I$ est dérivable et $(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}$ si $x\in I$, $y\in J$ et $y=f(x)$.

Preuve Soient $b\in J$ et $y\in J$ différent de b. Puisque d'une part $\lim_b f^{-1}(y)=f^{-1}(b)$ et d'autre part $\lim_{f^{-1}(b)}\frac{f(x)-f(f^{-1}(b))}{x-f^{-1}(b)}=f'(f^{-1}(b))$, par composition du taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(f^{-1}(b))}{x-f^{-1}(b)}$ de f entre x et $f^{-1}(b)$ par f^{-1}, il vient $\lim_b\frac{f(f^{-1}(y))-f(f^{-1}(b))}{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}=f'(f^{-1}(b))$. Puisque $f(f^{-1}(b))\neq 0$, par passage à l'inverse on obtient $\lim_b\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}{y-b}=\lim_b\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}{f(f^{-1}(y))-f(f^{-1}(b))}=\frac{1}{f'(f^{-1}(b))}=\frac{1}{f'(a)}$ avec $b=f(a)$. Ça signifie que f^{-1} est dérivable en b et que $(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(a)}$ avec $b=f(a)$.

3.6 Rappeler la formule de Leibniz de dérivation à l'ordre n d'un produit de fonctions. Démontrer cette formule en utilisant un raisonnement par récurrence.

Définition 26 Soient $n\in\mathbf{N}$, $D\subset\mathbf{R}$ et f, $f^{(0)}$, $f^{(1)}$,...,$f^{(n)}$ des fonctions définies sur D. On dit f est n fois dérivable et que si $k\in\{1,\ldots,n\}$ $f^{(k]}$ est la dérivée d'ordre k de f si $f^{(0)}=f$, $f^{(1)}=f'$ et si pour tout $k\in\{1,\ldots,n-1\}$ la fonction $f^{(k]}$ est dérivable et sa dérivée est $f^{(k+1)}$.

Remarque 24 Si f est n fois dérivable alors le n-uplet $(f^{(1)},\ldots,f^{(n)})$ est unique et si $k\in\{1,\ldots,n-1\}$ la fonction $f^{(k]}$ est $(n-k)$ fois dérivable et pour tout $l\in\{1,\ldots,n-k\}$ $(f^{(k)})^{(l)}=f^{(k+l)}$.

Remarque 25 Si f est n fois dérivable et $n>0$ alors $f=f^{(0)},\ldots,f^{(n-1)}$ sont continues.

Définition 27 Une fonction f est dite C^∞ si elle de classe C^n pour tout $n\in\mathbf{N}$.

Définition 28 Soient $n \in \mathbf{N}$, $f : D \to \mathbf{R}$ et $a \in D$. On dit que f est n fois dérivable en a si $n = 0$ et on pose $f^{(0)}(a) = f(a)$ ou si elle est $n-1$ fois dérivable et si sa dérivée d'ordre n est dérivable en a : on pose alors $f^{(n)}(a) = (f^{(n-1)})'(a)$.

Définition 29 (coefficient binomial) Si $n \in \mathbf{N}$ et $k \in \{0,...,n\}$ on appelle pose $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Les nombres $\binom{n}{k}$ s'appellent coefficients binomiaux.

Proposition 40 (formule de Pascal) Si $n \in \mathbf{N}$ et $k \in \{1,...,n+1\}$ alors $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.

Preuve Soient $n \in \mathbf{N}$ et $k \in \{1,...,n+1\}$. Alors

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-(k-1))!}(k+(n-(k-1))) \\
&= \frac{n!}{k!((n+1)-k)!}(n+1) \\
&= \frac{(n+1)!}{k!((n+1)-k)!} \\
&= \binom{n+1}{k}
\end{aligned}$$

donc on a bien $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.

Remarques 26 Ces coefficients binomiaux apparaissent en combinatoire. On peut montrer que $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties à k éléments dans un ensemble fini à n éléments. Il apparaissent aussi en algèbre dans le calcul des puissances entières d'une somme. On peut montrer que si $a,b \in \mathbf{R}$ et si $n \in \mathbf{N}$ alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Proposition 41 (Formule de Leibniz) Soient $n \in \mathbf{N}$, $f,g : D \to \mathbf{R}$ et $a \in D$. Si f et g sont n fois dérivables en a alors

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (f^{(k)} g^{(n-k)})(a).$$

Preuve Le résultat est vrai si $n = 0$ car on a bien $(fg)^{(0)}(a) = \binom{0}{0}(f^{(0)}g^{(0)})(a) = f(a)g(a)$. Il reste donc à prouver l'hérédité de la propriété. Soit $n \in \mathbf{N}$ telle que la propriété énoncée dans la proposition est vraie au rang n et soient $f,g : D \to \mathbf{R}$ et $a \in D$ tels que les fonctions f et g soient $n+1$ fois dérivables en a. Elles sont donc n fois dérivables et par hypothèse de récurrence

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (f^{(k)} g^{(n-k)})(x)$$

pour tout $x \in D$. Les fonctions $f^{(k)}$ et $g^{(n-k)}$ avec $k \in \{0,...,n\}$ de cette somme sont toutes dérivables en a. C'est donc le cas de $(fg)^{(n)}$ qu'on obtient à partir de ces fonctions par sommes et produits. Puisque $(fg)^{(n+1)}(a) = ((fg)^{(n)})'(a)$, en utilisant les propriétés des dérivées par rapport aux opérations algébriques on obtient

$$\begin{aligned}(fg)^{(n+1)}(a) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(f^{(k)}g^{(n-k)})'(a)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(f^{(k+1)}g^{(n-k)}+f^{(k)}g^{(n+1-k)})(a)\end{aligned}$$

Or d'une part

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(f^{(k+1)}g^{(n-k)}+f^{(k)}g^{(n+1-k)})(a) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(f^{(k+1)}g^{(n-k)})(a)+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(f^{(k)}g^{(n+1-k)})(a)$$

et d'autre part

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(f^{(k+1)}g^{(n-k)})(a) = \binom{n+1}{n+1}(f^{(n+1)}g^{(0)})(a)+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}(f^{(k)}g^{(n+1-k)})(a)$$

et

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(f^{(k)}g^{(n+1-k)})(a) = \binom{n+1}{0}(f^{(0)}g^{(n+1)})(a)+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(f^{(k)}g^{(n+1-k)})(a).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}(fg)^{(n+1)}(a &= \binom{n+1}{0}(f^{(0)}g^{(n+1)})(a)+\binom{n+1}{n+1}(f^{(n+1)}g^{(0)})(a)\\ &\quad+\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)(f^{(k)}g^{(n+1-k)})(a).\end{aligned}$$

Or d'après la formule de Pascal $\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$ si $k\in\{1,\ldots,n+1\}$ par conséquent

$$\begin{aligned}(fg)^{(n+1)}(a) &= \binom{n+1}{0}(f^{(0)}g^{(n+1)})(a)+\binom{n+1}{(n+1}(f^{(n+1)}g^{(0)})(a)\\ &\quad+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}(f^{(k)}g^{(n+1-k)})(a)\\ &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(f^{(k)}g^{(n+1-k)})(a).\end{aligned}$$

3.7 Rappeler ce qu'est une fonction de classe C^k sur un intervalle.

Définition 30 Une fonction f définie sur un intervalle I est dite de classe C^k si elle est k fois dérivable et si $f^{(j)}$ pour $j\in\{0,\ldots,k\}$ est continue.

Exemple 61 Soit $k\in\mathbf{N}$. Si $n\in\mathbf{N}$ alors la fonction f définie par $f(x)=x^n$ si $x\in\mathbf{R}$ est de classe C^k et sa dérivée $f^{(k)}$ vérifie $f^{(k)}(x)=n\cdots(n-k+1)x^{n-k}$ si $x\in\mathbf{R}$. En particulier si $k>n$ alors $f^{(k)}$ est la fonction nulle.

Exemple 62 Soit $k\in\mathbf{N}$. Si $n\in\mathbf{N}$ alors la fonction f définie par $f(x)=x^{-n}\frac{1}{x^n}$ si $x\in\mathbf{R}^*$ est de classe C^k et sa dérivée $f^{(k)}$ vérifie $f^{(k)}(x)=(-1)^k n\cdots(n+k-1)x^{-(n+k)}$ si $x\in\mathbf{R}^*$.

Exemple 63 Soit $k\in\mathbf{N}$. Les fonctions sin et cos sont de classes C^{2k} et C^{2k+1} et $\sin^{(2k)}=(-1)^k\sin$, $\cos^{(2k)}=(-1)^k\cos$, $\sin^{(2k+1)}=(-1)^k\cos$, $\cos^{(2k)}=(-1)^{k+1}\sin$.

Preuve (piste pour vérifier les trois exemples) On établit ces propriétés par récurrence sur k en utilisant les propriétés de la dérivation relatives aux opérations algébriques, en particulier $(fg)' = f'g + fg'$, et les résultats suivants qui ont déjà été démontrés : $x' = 1$, $1' = 0$, $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$, $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$.

3.8 Donner un exemple de fonction dérivable sur un intervalle mais qui n'est pas de classe C^1.

Exemple 64 La fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ si $x > 0$ est une fonction dérivable qui 'est pas C^1.

Preuve Si $a < 0$ alors $f'(a) = 0$. Si $x \in \mathbf{R}^*$ alors $|f(x) - f(0)| \leq x^2$. Par conséquent $|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}| \leq |x|$ si $x \in \mathbf{R}^*$ et donc $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$. Ceci signifie que f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. Si $a > 0$ alors $f'(a) = 2a\sin(\frac{1}{a}) - \cos(\frac{1}{a})$. Les suites $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} = (\frac{1}{2\pi n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbf{N}} = (\frac{1}{\pi+2\pi n})_{n\in\mathbf{N}}$ tendent vers 0 mais les suites des valeurs des dérivées $(f'(u_n))_{n\in_n n}$ et $(f'(v_n))_{n\in\mathbf{N}}$ sont les suites constantes égales à 1 et -1. Elles ne tendent pas vers $f'(0)$. Par conséquent la fonction f' n'est pas continue en 0 et f n'est pas C^1.

3.9 Énoncer le théorème de Rolle *(CAPES 2016 - première composition)*. En proposer une démonstration.

Théorème 8 (théorème de Rolle) Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ telle que $f(a) = f(b)$. Si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Preuve Si f est constante tout $c \in]a,b[$ vérifie $f'(c) = 0$. Supposons f non constante. Puisque f est continue sur $[a,b]$ il existe $c_1, c_2 \in [a,b]$ tels que $f([a,b]) = [f(c_1), f(c_2)]$. Puisque f est supposée non constante $f(c_1)$ ou $f(c_2)$ est différent de $f(a) = f(b)$. Raisonnons dans le où le maximum $f(c_2)$ est différent de $f(a) = f(b)$. Puisque $c_2 \in]a,b[$ les intervalles $[a, c_2[$ et $]c_2, b]$ sont non vides. On considère $x \in [a, c_2[$. D'une part $x - c_2 < 0$ car $x \in [a, c_2[$ et d'autre part $f(x) - f(c_2) \leq 0$ car f atteint son maximum en c_2. Donc $\frac{f(x)-f(c_2)}{x-c_2} \geq 0$ si $x \in [a, c_2[$ et par passage à la limite

$$f'(c_2) = \lim_{\substack{x\to c_2\\ x<c_2}} \frac{f(x) - f(c_2)}{x - c_2} \geq 0.$$

Soit $x \in]c_2, b]$. D'une part $x - c_2 > 0$ car $x \in]c_2, b]$ et d'autre part $f(x) - f(c_2) \leq 0$ car f atteint son maximum en c_2. Donc $\frac{f(x)-f(c_2)}{x-c_2} \leq 0$ si $x \in]c_2, b]$ et par passage à la limite

$$f'(c_2) = \lim_{\substack{x\to c_2\\ x>c_2}} \frac{f(x) - f(c_2)}{x - c_2} \leq 0.$$

Finalement $0 \leq f'(c_2) \leq 0$ et donc $f'(c_2) = 0$. Si $f(c_2) = f(a) = f(b)$ alors $f(c_1) < f(a) = f(b)$ et le même raisonnement fait avec $-f$ permet de conclure que $(-f)'(c_1) = 0$ et puisque $(-f)' = -f'$ il vient $f'(c_1) = 0$.

3.10 Donner des exemples simples montrant l'importance des hypothèses de ce théorème.

Exemple 65 (utilité de la continuité aux extrémités) La fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = x$ si $x \in]0,1]$ et par $f(0) = f(1) = 1$ est dérivable sur $]-1,[$ mais non continue en 0. Elle vérifie bien $f(0) = f(1)$ mais sa dérivée n'est jamais nulle.

Exemple 66 (utilité de l'hypothèse $f(a) = f(b)$) La fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = x$ est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$. Elle ne vérifie pas $f(0) = f(1)$ et sa dérivée n'est jamais nulle.

Exemple 67 (utilité d'être dérivable en tout point de $]a,b[$) La fonction f définie sur $[0,1]$ par l'égalité $f(x) = |2x-1|$ est continue sur $[0,1]$ et $f(0) = f(1)$. Elle est dérivable sauf en $\frac{1}{2}$ où elle atteint son minimum et si $x \in [0,1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$ alors $|f'(x)| = 1$.

3.11 *(CAPES 2016 - première composition)* On suppose que $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ est n fois dérivable sur $[a,b]$ et s'annule en au moins $n+1$ points distincts de $[a,b]$. Montrer que la fonction dérivée n-ème $g^{(n)}$ s'annule en au moins un point de $[a,b]$.

Solution On va montrer par récurrence sur n la propriété $\mathcal{P}_n$ suivante : si $a < b \in \mathbf{R}$ et $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ est une fonction n fois dérivable sur $[a,b]$ alors, s'il existe $n+1$ réels dans $[a,b]$, $a \leq a_0 < \ldots < a_n \leq b$ tels que $g(a_0) = \ldots = g(a_n) = 0$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $g^{(n)}(c) = 0$. La propriété $\mathcal{P}_0$ résulte du théorème de Rolle qui assure l'existence d'un tel c dans $]a_0,a_1[$. Il reste à prouver l'hérédité de $\mathcal{P}_n$. Soit $n \in \mathbf{N}$. On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie. On considère $a < b \in \mathbf{R}$, $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ est $n+1$ fois dérivable sur $[a,b]$ et $n+2$ réels dans $[a,b]$, $a \leq a_0 < \ldots < a_{n+1} \leq b$ tels que $g(a_0) = \ldots = g(a_{n+1}) = 0$. Puisque g restreinte à chaque $[a_i,a_{i+1}]$ lorsque $i = 0,\ldots,n$ est continue, est dérivable sur $]a_i,a_{i+1}[$ et s'annule en a_i et en a_{i+1}, d'après le théorème de Rolle, il existe $b_i \in]a_i,a_{i+1}[$ tel que $g'(b_i) = 0$. Par construction

$$a \leq a_0 < b_0 < a_1 < b_1 < a_2 \ldots < a_n < b_n < a_{n+1} \leq b.$$

La fonction $g' : [a,b] \to \mathbf{R}$ est donc n fois dérivable sur $[a,b]$ et il existe $n+1$ réels dans $[a,b]$,

$$a \leq b_0 < \ldots < b_n \leq b,$$

tels que $g'(b_0) = \ldots = g'(b_n) = 0$. D'après $\mathcal{P}_n$ il existe $c \in [a,b]$ tel que $(g')^{(n)}(c) = 0$. Or on a l'égalité $(g')^{(n)} = g^{(n+1)}$. On a donc trouvé $c \in [a,b]$ tel que $g^{(n+1)}(c) = 0$. Ceci prouve que si $\mathcal{P}_n$ est vraie alors $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi. L'hérédité est établie.

3.12 Rappeler le théorème des accroissements finis. En donner une démonstration.

Théorème 9 Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$. Si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Preuve Soit $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ définie par $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ si $x \in [a,b]$. Comme f la fonction g est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. De plus $g(a) = g(b) = f(a)$. Les hypothèses du théorème de Rolle sont vérifiées par g. Il existe donc $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$. Or pour tout réel $x \in]a,b[$ $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. On a donc $0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ qui s'écrit aussi $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Corollaire 4 (inégalité des accroissements finis) Soit I un intervalle non vide de $\mathbf{R}$ et $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue et dérivable. S'il existe M qui majore $|f'|$ sur I alors pour tout $(a,b) \in I^2$ l'inégalité $|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|$ est vérifiée.

Preuve Soit $(a,b) \in I^2$. Si $a = b$ on a $|f(b) - f(a)| = 0 \leq M|b-a|$. Si $a \neq b$, d'après le théorème des accroissements finis il existe $c \in I$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Or $|f'c)| \leq M$. On a donc

$$|f(b) - f(a)| = |f'(c)| \times |b-a| \leq M|b-a|.$$

Corollaire 5 (inégalité des accroissements finis (version plus générale)) Soit I un intervalle non vide de $\mathbf{R}$ et $f,g : I \to \mathbf{R}$ des fonctions continues et dérivables. On suppose que pour tout $x \in I$ l'inégalité $|f'(x)| \leq g'(x)$ est vérifiée. Alors tout $(a,b) \in I^2$ l'inégalité $|f(b) - f(a)| \leq |g(b) - g(a)|$ est vérifiée.

Preuve Soit $(a,b) \in I^2$. Si $a = b$ on a $|f(b) - (a)| = 0 \leq 0 = |g(b) - g(a)|$. Si $a \neq b$, d'après l'hypothèse $|f'| \leq g$ et le théorème des accroissements finis appliqué à $g - f$ et $g + f$ il existe $c \in I$ tel que

$$0 \leq g'(c) - f'(c) = \frac{(g(b) - f(b)) - (g(a) - f(a))}{b - a}$$

et il existe $d \in I$ tel que

$$0 \leq g'(d) + f'(d) = \frac{(g(b) + f(b)) - (g(a) + f(a))}{b - a}.$$

Il vient donc

$$-\frac{g(b) - g(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

et donc, en prenant les valeurs absolues et en multipliant par $|b - a|$, on obtient

$$|f(b) - f(a)| \leq |g(b) - g(a)|.$$

3.13 Appliquer ce théorème à une fonction trinôme du second degré. Quelle propriété géométrique en déduit-on ?

Remarque 27 Soient $a,b,c \in \mathbf{R}$ avec $a \neq 0$ et f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ si $x \in \mathbf{R}$. La fonction f est un trinôme du second degré. Son graphe est une parabole Γ. La fonction f est dérivable et $f'(x) = 2ax + b$ si $x \in \mathbf{R}$. Le théorème des accroissements finis appliqué à f sur $[\alpha,\beta]$ où $\alpha < \beta$ sont deux réels donne l'existence de $\gamma \in]\alpha,\beta[$ tel que $f'(\gamma) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Le calcul donne $2a\gamma + b = \frac{a(\beta^2-\alpha^2)+b(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}$ qui se transforme en $a\gamma + b = a(\beta+\gamma) + b$ en utilisant l'identité remarquable $\beta^2 - \alpha^2 = (\beta+\gamma)(\beta-\gamma)$. On obtient finalement $\gamma = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$: γ est le milieu de $[\alpha,\beta]$. Or le taux $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ représente la pente de la corde à la parabole Γ entre $A = (\alpha, f(\alpha))$ et $B = (\beta, f(\beta))$ et que $f'(\gamma)$ représente la pente de la tangente à la parabole Γ en $C = (\gamma, f(\gamma))$. On en déduit qu'étant donnée la tangente à une parabole Γ en un de ses points C, toutes les cordes $[A,B]$ à la parabole qui sont parallèles à cette tangente ont leurs milieux qui sont alignés sur la droite verticale qui passe par le point C.

3.14 Dérivée et monotonie, extremum

Proposition 42 Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbf{R}$ dérivable. Si f est croissante alors f' est positive ou nulle et si f est décroissante f' est négative ou nulle.

Preuve On suppose f croissante. Soit $a \in I$. Alors si $x \in I$ et $x \neq a$ on a $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$. Par passage à la limite il vient $f'(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$. On suppose maintenant f décroissante. Soit $a \in I$. Alors si $x \in I$ et $x \neq a$ on a $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$. Par passage à la limite il vient $f'(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$.

Proposition 43 Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbf{R}$ dérivable. Si f' est positive ou nulle (respectivement négative) ou nulle alors f est croissante (respectivement décroissante).

Preuve On suppose f' positive ou nulle. Soient $x < y \in I$. D'après le théorème des accroissements finis il existe $z \in]x,y[$ tel que $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(z) \leq 0$. Par conséquent $f(y) - f(x) \leq 0$. Comme c'est vrai quels que soient $x < y \in I$ la fonction f est croissante. Ce raisonnement appliqué à $-f$ si f' négative ou nulle (et donc $(-f)'$ positive ou nulle) permet de conclure que $-f$ est croissante et donc f décroissante si f' est négative ou nulle.

Corollaire 6 Soient $f, g :\to \mathbf{R}$ deux fonctions dérivables. Alors $f-g$ est constant si et seulement si $f' = g'$.

Preuve Si $f-g$ est constant alors $f'-g' = (f-g)' = 0$. Réciproquement si $f'-g' = 0$ alors on a $(f-g)' = 0$ et donc $f-g$ est à la fois croissante et décroissant sur l'intervalle I. La différence $f-g$ ne varie donc pas, elle est constante.

Proposition 44 Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbf{R}$ dérivable. Si f' est strictement positive (respectivement strictement négative) alors f est strictement croissante (respectivement strictement décroissante).

Preuve On suppose f' strictement positive. Soient $x < y \in I$. D'après le théorème des accroissements finis il existe $z \in]x, y[$ tel que $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(z) > 0$. Par conséquent $f(y) - f(x) > 0$. Comme c'est vrai quels que soient $x < y \in I$ la fonction f est strictement croissante. Ce raisonnement appliqué à $-f$ si f' strictement négative (et donc $(-f)'$ strictement positive) permet de conclure que $-f$ est strictement croissante et donc f strictement décroissante si f' est strictement négative.

Remarque 28 La réciproque est fausse comme le montre la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^3$.

Définition 31 Soit $f : D \to \mathbf{R}$ une fonction numérique. Un réel M est le maximum de f s'il existe $a \in D$ tel que $f(a) = M$ et si pour tout $x \in D$, $f(x) \leq M$.

Définition 32 Soit $f : D \to \mathbf{R}$ une fonction numérique. Un réel m est le minimum de f s'il existe $a \in D$ tel que $f(a) = m$ et si pour tout $x \in D$, $f(x) \geq m$.

Définition 33 Soit $f : D \to \mathbf{R}$ une fonction numérique et soit $a \in D$. On dit que f atteint un maximum local (respectivement un minimum local) en a s'il existe un intervalle ouvert I centré en a tel que $f(a)$ est le maximum (respectivement le minimum) de la restriction de f à $D \cap I$.

Théorème 10 Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction. On suppose que f atteint un extremum en un point c de I. Si f est dérivable en c alors $f'(c) = 0$

Preuve Elle reprend les idées de la preuve du théorème de Rolle. On la fait dans le cas où f atteint un minimum en c. Puisque I est un intervalle ouvert il existe $a, b \in I$ tels que $a < c < b$. Puisque $c \in]a, b[$ les intervalles $[a, c[$ et $]c, b]$ sont non vides. On considère $x \in [a, c[$. D'une part $x - c < 0$ car $x \in [a, c[$ et d'autre part $f(x) - f(c) \geq 0$ car f atteint son minimum en c. Donc $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$ si $x \in [a, c[$ et par passage à la limite

$$f'(c) = \lim_{\substack{x \to c \\ x < c}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0.$$

Soit $x \in]c, b]$. D'une part $x - c > 0$ car $x \in]c, b]$ et d'autre part $f(x) - f(c) \geq 0$ car f atteint son minimum en c. Donc $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$ si $x \in]c, b]$ et par passage à la limite

$$f'(c) = \lim_{\substack{x \to c \\ x > c}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

Finalement $0 \leq f'(c) \leq 0$ et donc $f'(c) = 0$.

Remarque 29 L'annulation de la dérivée n'est pas une condition suffisante pour qu'une fonction atteigne un extremum en un point. Par exemple la dérivée de la fonction qui à x associe x^3 est nulle en 0 mais cette fonction qui est strictement croissante n'admet pas d'extremum.

3.15 Dérivée et convexité

Lemme 2 Soient $s,t,u,v \in \mathbf{R}$ avec $t,v > 0$. Si $\frac{s}{t} \leq \frac{u}{v}$ alors $\frac{s}{t} \leq \frac{s+u}{t+v} \leq \frac{u}{v}$.

Preuve L'inégalité $\frac{s}{t} \leq \frac{u}{v}$ implique $0 \leq \frac{u}{v} - \frac{s}{t} = \frac{ut-sv}{tv}$ et puisque $t,v > 0$ on obtient $0 \leq ut - sv$. Par conséquent $\frac{s+u}{t+v} - \frac{s}{t} = \frac{ut-sv}{(t+v)t} \geq 0$ et $\frac{u}{v} - \frac{s+u}{t+v} = \frac{ut-sv}{(t+v)v} \geq 0$. Ainsi $\frac{s+u}{t+v} \geq \frac{s}{t}$ et $\frac{u}{v} \geq \frac{s+u}{t+v}$.

Proposition 45 Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable. Elle est convexe si et seulement si sa dérivée est croissante. Elle est strictement convexe si et seulement si sa dérivée est strictement croissante.

Preuve Supposons que f' est croissante (respectivement strictement croissante). Soient $(a,b,c) \in I^3$ tels que $a < b < c$. Puisque f est dérivable il existe $\alpha \in]a,b[$ et $\beta \in]b,c[$ tels que $f'(\alpha) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ et $f'(\gamma) = \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$. Puisque f' est croissante il vient $f'(\alpha) \leq f'(\beta)$ (respectivement $f'(\alpha) < f'(\beta)$), c'est à dire $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$ (respectivement $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} < \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$). D'après le lemme qui précède, puisque $b-a > 0$ et $c-b > 0$ on a les inégalités $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$ (respectivement $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} < \frac{f(c)-f(a)}{c-a} < \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$). Comme ces inégalités sont vraies pour tout $(a,b,c) \in I^3$ tels que $a < b < c$ la fonction f est convexe (respectivement strictement convexe). Supposons maintenant f convexe (strictement convexe). Soit $(a,c) \in I^2$ avec $a < c$. On pose $b = \frac{1}{2}(a+c)$. Il vient alors $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$ (respectivement $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} < \frac{f(c)-f(a)}{c-a} < \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$). Soit $x \in]a,b[$. Toujours en raison de la convexité on a $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Par passage à la limite en a il vient $f'(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Soit maintenant $x \in]b,c[$. La convexité implique $\frac{f(c)-f(b)}{c-b} \leq \frac{f(c)-f(x)}{c-x}$. Par passage à la limite en x il vient $\frac{f(c)-f(b)}{c-b} \leq f'(c)$. Finalement puisque $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$ (respectivement $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} < \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$) on obtient les inégalités $f'(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b} \leq f'(c)$ (respectivement $f'(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < \frac{f(c)-f(b)}{c-b} \leq f'(c)$). On vient de montrer que si $a,c \in I$ vérifie $a \leq c$ on a alors $f'(a) < f'(c)$. La croissance (stricte croissance) de f' est donc établie lorsque f est convexe (strictement convexe).

3.16 Logarithme népérien et exponentielle

Proposition 46 Il existe une unique fonction notée ln et appelée logarithme népérien qui est définie et dérivable sur $]0,+\infty$ et qui vérifie $\ln(1) = 0$ et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ si $x \in]0,+\infty[$.

Remarque 30 L'existence de ln résulte du théorème fondamental de l'analyse de Newton qui admet l'énoncé suivant. Si $f : I \to \mathbf{R}$ est une fonction continue sur un intervalle I elle admet une primitive F : F est dérivable et sa dérivée vaut f et si $a,b \in I$ $F(b) - F(a)$. Cette variation est notée $\int_a^b f(x)dx$ et en relation directe avec l'aire comprise entre le graphe de f, l'axe des abscisses et les droites verticales $x = a$ et $x = b$ lorsque $a < b$ et $f \geq 0$ sur $[a,b]$ (pourvu qu'on ait donné un sens à l'aire). L'unicité résulte du fait que deux fonctions dérivables définies sur un intervalle diffère d'une constante si et seulement si leurs dérivées sont égales.

Preuve On donne une preuve de l'existence de ln qui repose sur une construction élémentaire de l'intégrale de la fonction $f : x \in]0,+\infty[\mapsto \frac{1}{x}$ entre 1 et un réel $x > 0$. Si $n \in \mathbf{N}$ on note $s_n :]0,+\infty[\to \mathbf{R}$ la fonction constante par morceaux et décroissante définie par $s_n(x) = \frac{2^n}{k+1}$ si $k \in \mathbf{N}$ et $x \in]0,+\infty[$ vérifie $x \in [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[$. À $x \in]0,+\infty[$ fixé la suite $(s_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite croissante de limite $\frac{1}{x}$ de nombres strictement positifs. En effet soit $n \in \mathbf{N}$. Soit $k = \mathrm{Ent}(2^n x)$. Alors $x \in [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[$ et soit $x \in [\frac{k}{2^n}, \frac{2k+1}{2^{n+1}}[$

et $s_n(x) = \frac{2^n}{k+1} < \frac{2^{n+1}}{2k+1} = s_{n+1}(x) < \frac{1}{x}$, soit $x \in [\frac{2k+1}{2^n+1}, \frac{k+1}{2^n}[$ et $s_n(x) = \frac{2^n}{k+1} = s_{n+1}(x) < \frac{1}{x}$. La suite $(s_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ est donc croissante et puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{Ent}(2^n x)+1}{2^n} = x \neq 0$ on a bien

$$\lim_{n\to+\infty} s_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{\mathrm{Ent}(2^n x)+1} = \frac{1}{x}.$$

On définit pour $n \in \mathbf{N}$ la fonction $S_n :]0,+\infty[\to \mathbf{R}$ par

$$S_n(a) = \frac{1}{2^n}\left(\sum_{k\in\mathbf{N}, 1\leq \frac{k}{2^n} < a} s_n(\frac{k}{2^n})\right) + (a - \frac{\mathrm{Ent}(2^n a)}{2^n}) s_n(\frac{\mathrm{Ent}(2^n a)}{2^n})$$

si $a \geq 1$ et

$$S_n(a) = -\frac{1}{2^n}\left(\sum_{k\in\mathbf{N}, a< \frac{k}{2^n} < 1} s_n(\frac{k}{2^n})\right) - (\frac{\mathrm{Ent}(2^n a)}{2^n} + 1 - a) s_n(\frac{\mathrm{Ent}(2^n a)}{2^n})$$

si $a < 1$. La valeur $S_n(a)$ est la somme des aires des rectangles $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}] \times [0, s_n(\frac{k}{2^n})]$ pour k entier vérifiant $2^n \leq k < 2^n a$ et du rectangle $[\frac{\mathrm{Ent}(2^n a)}{2^n}, a] \times [0, s_n(\frac{\mathrm{Ent}(2^n a)}{2^n})]$ si $a \geq 1$ et l'opposé de la somme des aires des rectangles $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}] \times [0, s_n(\frac{k}{2^n})]$ pour k entier vérifiant $2^n a < k < 2^n$ et du rectangle $[a, \frac{\mathrm{Ent}(2^n a)}{2^n} + 1] \times [0, s_n(\frac{\mathrm{Ent}(2^n a)}{2^n})]$ si $a < 1$. Autrement dit, $S_n(a)$ est l'aire comptée algébriquement entre le graphe de la fonction s_n, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = 1$ et $x = a$. Puisque la suite de terme général $s_n(x)$ est croissante et majorée par $\frac{1}{x}$ et que la fonction $x > 0 \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante, la suite de terme général $S_n(a)$ est croissante et majorée par $a - 1 = (a-1) \times 1$ si $a \geq 1$ et elle est décroissante et minorée par $1 - \frac{1}{a} = (a-1)) \times \frac{1}{a}$ si $a < 1$. Or, puisque les suites croissantes majorées et les suites décroissantes minorées sont convergentes, dans tous les cas la suite de terme général $S_n(a)$ admet une limite finie notée $\ln(a)$ et appelée logarithme népérien de a. Montrons que cette fonction est dérivable et que $\ln'(a) = \frac{1}{a}$ si $a \in]0,+\infty[$. Fixons donc $a \in]0,+\infty[$. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la fonction $x > 0 \mapsto \frac{1}{x}$ est continue il existe $\eta > 0$ tel que si $x > 0$ vérifie $|x - a| < \eta$ alors $|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}| < \frac{1}{3}\varepsilon$. Puisque $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ on a $0 \notin [a-\eta, a+\eta]$ et donc $[a-\eta, a+\eta] \subset]0,+\infty[$. Puisque $(s_n(a+\eta))_{n\in\mathbf{N}}$ croit vers $\frac{1}{a+\eta}$ il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que si $n \in \mathbf{N}$ vérifie $n \geq N$ alors $s_n(a+\eta) > \frac{1}{a+\eta} - \frac{1}{3}\varepsilon$. Soit $x \in]a-\eta, a+\eta[$. Alors

$$\frac{1}{a} - \frac{2}{3}\varepsilon \leq \frac{1}{a+\eta} - \frac{1}{3}\varepsilon \leq s_n(a+\eta) \leq s_n(x) \leq s_n(a-\eta) < \frac{1}{a-\eta} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{3}\varepsilon \leq \frac{1}{a} + \frac{2}{3}\varepsilon,$$

c'est à dire

$$\frac{1}{a} - \frac{2}{3}\varepsilon \leq s_n(x) \leq \frac{1}{a} + \frac{2}{3}\varepsilon.$$

Prenons $b \in]a-\eta, a+\eta[$. La différence $S_n(b) - S_n(a)$ est égale à l'aire comptée algébriquement entre le graphe de la fonction s_n, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$. Puisque la fonction constante par morceaux s_n vérifie $\frac{1}{a} - \frac{2}{3}\varepsilon \leq s_n(x) \leq \frac{1}{a} + \frac{2}{3}\varepsilon$ si $x \in]a-\eta, a+\eta[$ l'aire $S_n(b) - S_n(a)$ est comprise entre $(b-a)(\frac{1}{a} - \frac{2}{3}\varepsilon)$ et $(b-a)(\frac{1}{a} + \frac{2}{3}\varepsilon)$. Ceci implique que si $b \in]a-\eta, a+\eta[$ et $n \geq N$ alors $\frac{1}{a} - \frac{2}{3}\varepsilon \leq \frac{S_n(b)-S_n(a)}{b-a} \leq \frac{1}{a} + \frac{2}{3}\varepsilon$. Par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ on obtient $\frac{1}{a} - \frac{2}{3}\varepsilon \leq \frac{\ln(b)-\ln(a)}{b-a} \leq \frac{1}{a} + \frac{2}{3}\varepsilon$. On vient donc d'établir l'assertion suivante :

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\eta > 0\ \forall b \in]a,+\infty[\ |b-a| < \eta \Rightarrow |\frac{\ln(b)-\ln(a)}{b-a}| \leq \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon.$$

Ceci signifie que ln est dérivable en a et que $\ln'(a) = \frac{1}{a}$.

Proposition 47 Si $x, y \in]0,+\infty[$ alors $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.

Preuve Soit $y \in]0,+\infty[$. On note g la fonction qui à $x \in]0,+\infty[$ associe $\ln(xy)$. La fonction g est dérivable et si $x \in]0,+\infty$ alors $g'(x) = \frac{1}{x}$. Puisque $g' = \ln'$ les deux fonctions diffèrent d'une constante qui vaut $g(1) - \ln(1)$, c'est à dire $\ln(y)$. Par conséquent $g(x) = \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ si $x \in]0,+\infty[$.

Proposition 48 La fonction ln est dérivable, strictement croissante, sa dérivée est strictement positive et elle vérifie $\lim_{+\infty} \ln = +\infty$, $\lim_0 \ln = -\infty$ et $\lim_{+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

Preuve La fonction ln est dérivable par définition. Elle est strictement croissante car sa dérivée en $x \in]0,+\infty[$ vaut $(\ln)'(x) = \frac{1}{x} > 0$. Puisque la fonction ln est croissante elle a une limite en $+\infty$ et cette limite est $+\infty$ si ln n'est pas bornée sur $[1,+\infty[$. Or $\ln(2) > \ln(1) = 0$ car ln strictement croissante et si $n \in \mathbf{N}$ alors $\ln(2^n) = n\ln(2)$ et donc $\lim_{+\infty} \ln(2^n) = +\infty$. Ainsi ln n'est pas bornée sur $[1,+\infty[$ et $\lim_{+\infty} \ln = +\infty$. On a $0 = \ln(1) = \ln(\frac{x}{x}) = \ln(\frac{1}{x}) + \ln(x)$ si $x \in]0,+\infty[$. Par conséquent $\ln(x) = -\ln(\frac{1}{x})$ si $x \in]0,1]$. Ainsi $\lim_0 \ln(x) = -\lim_0 \ln(\frac{1}{x}) = -\lim_{+\infty} \ln(y) = -\infty$. Soit g définie sur $[1,+\infty[$ par $g(x) = x - \ln(x)$. La fonction g est dérivable et $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} \geq 0$. La fonction g est donc croissante et comme elle s'annule en 1 on a $g(x) \geq 0$, c'est à dire $x \geq \ln(x)$ si $x \geq 1$. Soit $x > 1$. Puisque $\ln(x) = 2\ln(\sqrt{x})$ et que $x = \sqrt{x} \times \sqrt{x}$ on a $\frac{\ln(x)}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}} \frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$. Or d'après ce qui précède $0 \leq \frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} < 1$. Donc, puisque $\lim_{+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$, on a bien $\lim_{+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

Proposition 49 La fonction ln est une bijection de $]0,+\infty[$ dans $\mathbf{R}$.

Preuve D'après la proposition précédente la fonction ln est strictement croissante donc injective. Il reste à voir qu'elle est surjective. Soit $y \in \mathbf{R}$. Puisque $\lim_{+\infty} \ln = +\infty$, $\lim_0 \ln = -\infty$ il existe donc $x_1, x_2 \in]0,+\infty[$ tels que $\ln(x_1) < y < \ln(x_2)$. Comme ln est dérivable, elle est continue et donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in]x_1, x_2[$ tel que $\ln(x) = y$. On vient de montrer que ln qu'on savait injective est surjective donc bijective.

Définition 34 Puisque ln est une bijection dérivable et à dérivée strictement positive de $]0,+\infty[$ dans $\mathbf{R}$ elle admet une réciproque notée exp et appelée exponentielle.

Proposition 50 La fonction exp est une bijection dérivable strictement croissante de $\mathbf{R}$ dans $]0,+\infty[$, sa dérivée vérifie $\exp' = \exp$ et si $x, y \in \mathbf{R}$ on a $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

Preuve La fonction exp est une bijection dérivable strictement croissante de $\mathbf{R}$ dans $]0,+\infty[$ car c'est la réciproque de ln qui est une bijection dérivable strictement croissante de $]0,+\infty[$ dans $\mathbf{R}$ et dont la dérivée est strictement positive. Soient $x \in \mathbf{R}$ et $y = \exp(x)$. Alors la dérivée de exp en x est égale à l'inverse de la dérivée de ln en y. Or la dérivée de ln en y vaut $\frac{1}{y}$, c'est à dire $\frac{1}{\exp(x)}$. Donc la dérivée de $\exp(x)$ vaut $y = \exp(x)$. Soient si $x, y \in \mathbf{R}$. Alors on a

$$\ln(\exp(x)\exp(y)) = \ln(\exp(x)) + \ln(\exp(y)) = x + y.$$

En composant par l'exponentielle on obtient $\exp(x)\exp(y) = \exp(\ln(\exp(x)\exp(y))) = \exp(x+y)$.

Définition 35 (fonction exponentielle de base λ) Soit $\lambda > 0$ tel que $\lambda \neq 1$. Si $x \in \mathbf{R}$ on définit λ^x par $x^\lambda = \exp_\lambda(x) = \exp(\ln(\lambda)x)$.

Remarque 31 Si $n \in \mathbf{Z}$ et $\lambda > 0$ différent de 1 alors cette définition de λ^n coïncide avec la définition classique.

Proposition 51 Soit $\lambda > 0$ différent de 1. La fonction $\exp_\lambda$ est une bijection dérivable de $\mathbf{R}$ dans $]0,+\infty[$ (strictement croissante si $\lambda > 1$ et strictement décroissante si $0 < \lambda < 1$), sa dérivée vérifie $\exp_\lambda' = \ln(\lambda)\exp_\lambda$ et si $x, y \in \mathbf{R}$ on a $\exp_\lambda(x+y) = \exp_\lambda(x)\exp_\lambda(y)$.

Preuve C'est une conséquence immédiate des propriétés analogues pour exp et du fait que $\ln(\lambda)$ est strictement positif si $\lambda \in]1,+\infty[$ et strictement négatif si $\lambda \in]0,1[$.

Définition 36 Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. La fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x^\lambda$ est dérivable et sa dérivée est donnée par $f'(x) = \lambda x^{\lambda-1}$. Si $\lambda > 0$ alors f est strictement croissante, si $\lambda < 0$ alors f est strictement décroissante et si $\lambda = 0$ alors f est la constante 1.

Proposition 52 Soient $\lambda \in \mathbf{R}$ et $x,y >$. Alors $x^\lambda y^\lambda = (xy)^\lambda$.

Preuve En effet

$$\begin{aligned} x^\lambda y^\lambda &= \exp(\ln(x)\lambda)\exp(\ln(y)\lambda) \\ &= \exp(\ln(x)\lambda + \ln(y)\lambda) \\ &= \exp((\ln(x)+\ln(y))\lambda) \\ &= \exp(\ln(xy)\lambda) \\ &= (xy)^\lambda. \end{aligned}$$

Proposition 53 (l'exponentielle domine les puissances) Si $\lambda \in \mathbf{R}$ alors $\lim_{+\infty} x^\lambda \exp(x) = +\infty$.

Preuve On a $x^\lambda \exp(x) = \exp(x + \lambda \ln(x))$. Or $\lim_{+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$. Donc $\lim_{+\infty} x + \lambda \ln(x) = +\infty$. Ceci implique que $\lim_{+\infty} x^\lambda \exp(x) = \lim_{+\infty} \exp(x + \lambda \ln(x)) = +\infty$.

4 Formules de Taylor et développements limités

4.1 Énoncer le théorème de Taylor-Lagrange. En proposer une démonstration. De quel théorème est-il la généralisation ?

Théorème 11 (Formule de Taylor-Lagrange) Soient $n \in \mathbf{N}$, $a < b$ deux réels et $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^n et $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Preuve Elle repose sur le théorème de Rolle. Le cas $n = 0$ correspond à l'égalité des accroissements finis.

Si $\lambda \in \mathbf{R}$ on note g_λ la définie définie sur I par

$$g_\lambda(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k - \frac{\lambda}{(n+1)!}(b-x)^{n+1}.$$

La fonction g_λ s'annule en b et, puisque $a \neq b$, la fonction qui à $\lambda \in \mathbf{R}$ associe $g_\lambda(a)$ est une fonction affine non constante.Il existe donc un unique λ_0 tel que $g_{\lambda_0}(a) = 0$.

Par construction la fonction g_{λ_0} est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et s'annule en a et b. D'après le théorème de Rolle il existe donc $c \in]a,b[$ tel que $g'_{\lambda_0}(c) = 0$.

Or le calcul de $g'_{\lambda_0}(c)$ donne

$$\begin{aligned} g'_{\lambda_0}(c) &= -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(c)}{k!}(b-c)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{(k-1)!}(b-c)^{k-1} + \frac{\lambda_0}{n!}(b-c)^n \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n + \frac{\lambda_0}{n!}(b-c)^n. \end{aligned}$$

Aussi il vient

$$0 = g'_{\lambda_0}(c) = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n + \frac{\lambda_0}{n!}(b-c)^n$$

c'est à dire, puisque $b \neq c$,

$$f^{(n+1)}(c) = \lambda_0.$$

L'égalité $g_{\lambda_0}(a) = 0$ devient, en remplaçant λ_0 par sa valeur,

$$0 = g_{\lambda_0}(a) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k - \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

qui donne

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Remarque 32 La formule de Taylor-Lagrange généralise le théorème des accroissements finis.

4.2 Rappeler le théorème de Taylor avec reste intégral. En proposer une démonstration *(CAPES 2016 - première composition)*.

Théorème 12 (Formule de Taylor avec reste intégral) Soient $n \in \mathbf{N}$ et $a < b$ deux réels. Si $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ est une fonction de classe C^{n+1} alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n dx.$$

Preuve Elle se fait par récurrence sur n.

Au rang 0 l'énoncé est la conséquence suivante du théorème fondamental de l'analyse de Newton. Si $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ est une fonction de classe C^1 alors

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f^{(1)}(x)dx.$$

Il suffit donc de prouver l'hérédité de la propriété annoncée.

Soit $n \in \mathbf{N}$. On suppose que la propriété est vraie jusqu'au rang n et prouvons que ceci implique qu'elle est vraie au rang $n+1$. Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^{n+2}. Puisqu'elle est de classe C^{n+2} elle est de classe C^{n+1} et d'après l'hypothèse de récurrence

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n dx.$$

Puisque f est de classe C^{n+2} la fonction $f^{(n+1)}$ est C^1. On a donc, par intégration par parties

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n dx &= \left[-\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}(b-x)^{n+1}\right]_a^b + \int_a^b \frac{f^{(n+2)}(x)}{(n+1)!}(b-x)^{n+1}dx \\
&= \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} + \int_a^b \frac{f^{(n+2)}(x)}{(n+1)!}(b-x)^{n+1}dx
\end{aligned}$$

et donc

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+2)}(x)}{(n+1)!}(b-x)^{n+1}dx.$$

La propriété est bien vérifiée au rang $n+1$.

Proposition 54 (Formule de Taylor avec reste intégral (variante)) Soient $n \in \mathbf{N}$ et $a < b$ deux réels. Si $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ est une fonction de classe C^{n+1} alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + (b-a)^{n+1}\int_0^1 \frac{f^{(n+1)}(a+(b-a)t)}{n!}(1-t)^n dt.$$

Preuve On passe de l'énoncé classique de la formule de Taylor avec reste intégral à cette variante en faisant le changement de variable $x = a + (b-a)t$.

4.3 Rappeler la formule de Taylor-Young. En proposer une démonstration.

Théorème 13 (Formule de Taylor-Young) Soit $n \in \mathbf{N}$. Si $f : I \to \mathbf{R}$ est une fonction définie et $n-1$ fois dérivable sur un intervalle ouvert I et qui admet une dérivée n-ème en un point a de I alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + (x-a)^n \varepsilon(x)$$

où $\varepsilon : I \to \mathbf{R}$ est une fonction qui s'annule et qui est continue en a.

Preuve Elle est établie par récurrence sur n.

Au rang 0 l'énoncé traduit simplement la continuité de f en a. Il suffit donc de prouver l'hérédité de la propriété annoncée.

Soit $n \in \mathbf{N}$. On suppose que la proriété est vraie jusqu'au rang n et prouvons que ceci implique qu'elle est vraie au rang $n+1$. Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction définie et n fois dérivable sur un intervalle I et qui admet une dérivée $n+1$-ème en un point a de I.

Puisque la dérivation est linéaire on peut supposer que pour tout entier k compris entre 0 et $n+1$, $f^{(k)}(a) = 0$.

D'après l'hypothèse de récurrence appliquée à la dérivée f' qui est $n-1$ fois dérivable sur I et qui admet une dérivée n-ème au point a il existe une fonction $\varepsilon_0 : I \to \mathbf{R}$ qui s'annule et qui est continue en a telle que

$$f'(x) = (x-a)^n \varepsilon_0(x).$$

Notons ε la fonction qui vaut 0 en a et qui vaut $\varepsilon(x) = \frac{f(x)}{(x-a)^{n+1}}$ si $x \in I \setminus \{a\}$. Pour conclure à l'hérédité de la propriéte il suffit de prouver que ε est continue en a.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\varepsilon_0(a) = 0$ et que ε_0 est continue en a il existe $\eta > 0$ tel que si $x \in I$ et $|x-a| < \eta$ alors $|\varepsilon_0(x)| < \varepsilon$. Par conséquent sur l'intervalle $I \cap]a-\eta, a+\eta[$ l'inégalité

$$|f'(x)| \leq \varepsilon |x-a|^n$$

est vérifiée. D'après l'inégalité des accroissements finis ceci implique que sur cet intervalle

$$|f(x)| \leq \frac{1}{n+1} \varepsilon |x-a|^{+n+1}$$

et donc

$$|\varepsilon(x)| \leq \varepsilon.$$

On vient finalement de prouver

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 \forall x \in I \; |x-a| < \eta \Longrightarrow |\varepsilon(x)| \leq \varepsilon$$

et ceci signifie que la fonction ε qui vaut 0 en a est bien continue en a.

4.4 Quelles différences y a-t-il entre ces trois formules ?

Les trois formules permettent d'approcher une fonction définie sur un intervalle par un même polynôme exprimé à l'aide des dérivées successives de f en un point a de l'intervalle et appelée partie principale. L'écart de la fonction à ce polynôme, appelé reste, est exprimé de trois façons qui différencient fortement les formules.

La formule de Taylor-Young repose sur les hypothèses les plus faibles mais donne une information seulement en un réel fixé a (ou pour x très proche de ce réel). Elle indique comment se comporte la fonction quand la variable x s'approche de a et fournit, étant donné un entier n, le polynôme appelé partie principale de de degré n qui approche le mieux f quand la variable x s'approche de a. La façon dont le reste est donnée ne donne qu'une information qualitative sur celui-ci quand la variable x s'approche de a.

La formule de Taylor-Lagrange comporte un reste qui est contrôlé autant que l'est la dérivée d'ordre $n+1$ sur l'intervalle de définition de f. Étant donné $n \in \mathbf{N}$, cette formule donne des informations existentielles sur le reste en tout point b du domaine de définition de la fonction f. La partie principale est donnée comme dans la formule de Taylor-Young par la connaissance des dérivées successives de f jusqu'à l'ordre n de f en a. Le reste est donné de façon plus précise et plus quantitative puisqu'il est exprimé à l'aide de la dérivée d'ordre $n+1$ de f en un point c dont on ne connaît que l'existence.

La formule de Taylor avec reste intégral repose sur les hypothèses les plus fortes. Elle comporte un reste qui a une expression intégrale explicite qui dépend continûment de la variable. Comme la formule de Taylor-Lagrange et la formule de Taylor-Young, la partie principale est donnée par la connaissance des dérivées successives de f jusqu'à l'ordre n de f en a. Le reste est ici exprimé à l'aide d'une formule intégrale explicite qui implique la dérivée d'ordre $n+1$ de f.

4.5 Donner un exemple de fonction non identiquement nulle, de classe C^∞, dont toutes les dérivées sont nulles en 0.

Exemple 68 La fonction f définie par $f(0)=0$ et $f(x)=\exp(-\frac{1}{x^2})$ si $x \neq 0$ est une fonction strictement positive sur $\mathbf{R}^*$, elle est de classe C^∞ et toutes ses dérivées sont nulles en 0.

Preuve Hors de 0 la fonction est C^∞ car c'est la composée à gauche de $-\frac{1}{x^2}$ qui est C^∞ par l'exponentielle qui est aussi C^∞. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ la propriété $\mathcal{A}_n$ suivante : il existe pour chaque $n \in \mathbf{N}$ un polynôme P_n tel que si $x \neq 0$ alors $f^{(n)}(x) = P_n(\frac{1}{x})\exp(-\frac{1}{x^2})$. La propriété $\mathcal{A}_0$ est vraie : le polynôme P_0 est la constante 1. Il reste à vérifier l'hérédité de la propriété $\mathcal{A}_n$. Soit $n \in \mathbf{N}$. On suppose $\mathcal{A}_n$ vraie : il existe polynôme P_n tel que si $x \neq 0$ alors $f^{(n)}(x) = P_n(\frac{1}{x})\exp(-\frac{1}{x^2})$. En dérivant on obtient $f^{(n+1)}(x) = (\frac{2}{x^3}P_n(\frac{1}{x}) - \frac{1}{x^2}P_n'(\frac{1}{x}))\exp(-\frac{1}{x^2})$ si $x \neq 0$. Ainsi le polynôme P_{n+1} défini par $P(t) = 2t^3P_n(t) - t^2P_n'(t)$ si $t \in \mathbf{R}$ est tel que si $x \neq 0$ alors $f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}(\frac{1}{x})\exp(-\frac{1}{x^2})$. Ainsi $\mathcal{A}_{n+1}$ est vraie si $\mathcal{A}_n$ l'est : l'hérédité est prouvée. Montrons maintenant par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ la propriété $\mathcal{B}_n$ suivante : $f^{(n)}(0)$ est bien définie et vaut 0. La propriété $\mathcal{B}_0$ est vraie puisque par définition $f^{(0)}(0) = f(0) = 0$. On suppose $\mathcal{B}_n$ vérifiée : $f^{(n)}(0)$ est bien définie et vaut 0. D'après $\mathcal{A}_n$ on a $|\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x-0}| = |\frac{f^{(n)}(x)}{x}| = |\frac{1}{x}P_n(\frac{1}{x})|\exp(-\frac{1}{x^2})$. On déduit du fait que $\lim_{+\infty} t^\lambda \exp(-t) = 0$ quel que soit $\lambda \in \mathbf{R}$ que $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} |\frac{1}{x}P_n(\frac{1}{x})|\exp(-\frac{1}{x^2}) = 0$ et donc $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} |\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x-0}| = 0$. Ceci prouve que $f^{(n]}$ est dérivable en 0 et que $f^{(n+1)}(0) = (f^{(n)})'(0) = 0$. Ainsi $\mathcal{B}_{n+1}$ est vraie si $\mathcal{B}_n$ l'est : l'hérédité est prouvée. On vient d'établir que pour tout entier $n \in \mathbf{N}$ la fonction $f^{(n)}$ est définie partout y compris en 0. La fonction f est donc bien de classe C^∞.

4.6 Rappeler la définition du développement limité d'une fonction f au voisinage de 0. Retrouver les exemples classiques.

Définition 37 Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I non réduit à un point de $\mathbf{R}$ et soit $a \in I$. Si $n \in \mathbf{N}$ on dit que f possède un développement limité d'ordre n en a s'il existe un polynôme P de degré n et une fonction ε définie sur I tels que ε s'annule et est continue en a et $f(x) = P(x) + (x-a)^n\varepsilon(x)$ si $x \in I$. Le polynôme P s'appelle partie principale de degré n de f en a et $x \in I \mapsto x^n\varepsilon(x)$ s'appelle le reste.

Remarque 33 Pour une fonction $f : D \to \mathbf{R}$, avoir un développement limité d'ordre 0 en $a \in D$ est équivalent à être continue en a, avoir un développement limité d'ordre 1 en $a \in D$ est équivalent à être dérivable en a et alors $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon : D \to \mathbf{R}$ continue en a et nulle en a.

Proposition 55 Soient f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, $a \in I$ et $n \in \mathbf{N}$. Si f admet deux développements limités d'ordre n en a alors ils sont égaux.

Preuve On suppose que f définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ admet deux développements limités d'ordre n en $a \in I$: $f(x) = P_1(x) + (x-a)^n \varepsilon_1(x) = P_2(x) + (x-a)^n \varepsilon_2(x)$ si $x \in I$ avec $\lim_a \varepsilon_1 = \lim_a \varepsilon_2 = 0$. En faisant la différence des deux expressions on obtient $(P_1(x) - P_2(x)) = (x-a)^n(\varepsilon_2(x) - \varepsilon_1(x))$ si $x \in I$. Ainsi $\lim_{\substack{x\to a \\ x\neq a}} \frac{P_1(x)-P_2(x)}{(x-a)^n} = \lim_{\substack{x\to a \\ x\neq a}} (\varepsilon_2(x) - \varepsilon_1(x)) = 0$. Puisque $P_1 - P_2$ est de degré au plus n, ce n'est possible que si $P_1 - P_2 = 0$, c'est à dire si $P_1 = P_2$.

Remarque 34 Les trois formules de Taylor donnent le développement limité d'une fonction, sous réserve, pour la formule de Taylor-Lagrange, que la dérivée d'ordre $n+1$ soit bornée.

Exemple 69 Soient f un polynôme, $a \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$. Alors f admet un développement limité à l'ordre n en a. Les coefficients de sa partie principales sont les coefficients des monômes de degré au plus n du polynôme en t donné par $P(t) = f(a+t)$.

Preuve Il suffit de remarquer que si $k \in \mathbf{N}$ alors $f^{(k)}(a) = k!p_k$ où p_k est le coefficient du monôme de degré k de P.

Exemple 70 Soit f la fonction de classe C^∞ définie sur $\mathbf{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Si $n \in \mathbf{N}$ alors f admet un développement limité d'ordre n en 0 dont la partie principale est $\sum_{k=0}^n x^k$.

Preuve C'est une conséquence de l'égalité $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + x^{n+1}\frac{1}{1-x}$.

Exemple 71 Soit $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ et soit f la fonction de classe C^∞ définie sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = (1+x)^\lambda$. Si $n \in \mathbf{N}$ alors f admet un développement limité d'ordre n en 0 dont la partie principale est 1 si $n = 0$ et $1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(\lambda - j)x^k$ si $n > 0$.

Preuve Il suffit de remarquer que $f(0) = 1$ et que si $k \in \mathbf{N}^*$ alors $f^{(k)}(0) = \prod_{j=0}^{k-1}(\lambda - j)$.

Exemple 72 Soit f la fonction de classe C^∞ définie sur $]-\infty, 1]$ par $f(x) = \ln(1-x)$. Si $n \in \mathbf{N}$ alors f admet un développement limité d'ordre n en 0 dont la partie principale est 0 si $n = 0$ et $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}x^k$ si $n > 0$.

Preuve Il suffit de remarquer que $f(0) = 0$ et que puisque $f'(x) = \frac{1}{1-x}$ on a $f^{(k+1)}(0) = k!$ si $k \in \mathbf{N}$.

Exemple 73 Soit f la fonction de classe C^∞ définie par $f(x) = \exp(x)$ si $x \in \mathbf{R}$. Si $n \in \mathbf{N}$ alors f admet un développement limité d'ordre n en 0 dont la partie principale est $\sum_{k=0}^n \frac{k!}{x}^k$.

Preuve Il suffit de remarquer que $f(0) = 1$ et puisque $f' = f$ on a $f^{(k)}(0) = 1$ si $k \in \mathbf{N}$.

Exemple 74 Soient f et g les fonctions de classe C^∞ définies par $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = \cos(x)$ si $x \in \mathbf{R}$. Si $n \in \mathbf{N}$ alors f admet un développement limité d'ordre $2n+1$ en 0 dont la partie principale est $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$ et g admet un développement limité d'ordre $2n$ en 0 dont la partie principale est $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$.

Preuve On déduit des égalités $\sin' = \cos$ et $\cos' = \sin$ et de $\sin(0) = 0$ et $\cos(0) = 1$ que si $k \in \mathbf{N}$ alors $\sin^{(2k)}(0) = 0$, $\sin^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$, $\cos^{(2k)}(0) = (-1)^k$, $\cos^{(2k+1)}(0) = (0)$. Les formules de Taylor permettent de conclure.

4.7 Jusqu'à quel ordre $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ x^\pi \text{ si } x > 0 \end{cases}$ admet-elle un développement limité en 0 ?

Réponse On considère la fonction ε définie par $\varepsilon(x) = x^{\pi-3}$ si $x > 0$ et 0 sinon. Puisque $\pi > 3$ on a $\lim_0 \varepsilon = 0$. Or $f(x) = x^3\varepsilon(x)$ si $x \in \mathbf{R}$. Donc f admet un développement limité d'ordre 3 en 0. La partie principale de ce développement est le polynôme nul. En revanche, puisque $\pi < 4$ on a $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\varepsilon(x)}{x} = +\infty$ et on a $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)}{x^4} = +\infty$ donc f n'admet pas de développement limité d'ordre 4 ou plus en 0.

4.8 Extremum local et développement limité d'ordre 2

Proposition 56 Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert et qui admet un développement limité d'ordre 2 en un un point $a \in D$: il existe $u, v, w \in \mathbf{R}$ et $\varepsilon : D \to \mathbf{R}$ tels que $f(x) = u + v(x-a) + w(x-a)^2 + (x-a)^2\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to} \varepsilon(x) = 0$. Si f admet un maximum (respectivement un minimum) en a alors $v = 0$ et $w \leq 0$ (respectivement $w \geq 0$).

Preuve Le nombre u est égal à $f(a)$. Le nombre v est égal à $f'(a)$ et puisque f admet un extremum en a $v = f'(a) = 0$. Par conséquent $f(x) = f(a) + (w + \varepsilon(x)) \times (x-a)^2$.

Supposons que $w \neq 0$. Puisque $\varepsilon(a) = 0$ et que ε est continue en a, quitte à restreindre I, on peut supposer que $w + \varepsilon$ ne s'annule pas et est du signe de w sur I.

Si $w > 0$ alors $(w + \varepsilon(x)) \times (x-a)^2 > 0$ si $x \in I \setminus \{0\}$ et donc $f(x) > f(a)$ si $x \in I \setminus \{0\}$. Ainsi si $w > 0$ la fonction f n'admet pas de maximum en a. Par contraposée, si f admet un maximum en a alors $w \leq 0$.

Si $w < 0$ alors $(w + \varepsilon(x)) \times (x-a)^2 < 0$ si $x \in I \setminus \{0\}$ et donc $f(x) < f(a)$ si $x \in I \setminus \{0\}$. Ainsi si $w < 0$ la fonction f n'admet pas de minimum en a. Par contraposée, si f admet un minimum en a alors $w \geq 0$.

Proposition 57 Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert et qui admet un développement limité d'ordre 2 en un un point $a \in D$: il existe $u, v, w \in \mathbf{R}$ et $\varepsilon : D \to \mathbf{R}$ tels que $f(x) = u + v(x-a) + w(x-a)^2 + (x-a)^2\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to} \varepsilon(x) = 0$. Si $v = 0$ et $w < 0$ (respectivement $w > 0$) alors f admet un maximum local (respectivement un minimum local) en a.

Preuve Le nombre u est égal à $f(a)$.

Supposons $v = 0$ et $w < 0$. Alors $f(x) = f(a) + (w + \varepsilon(x)) \times (x-a)^2$. Puisque $\varepsilon(a) = 0$ et que ε est continue en a, quitte à restreindre I, on a $w + \varepsilon(x) < 0$ si $x \in I$. Alors $(w + \varepsilon(x)) \times (x-a)^2 < 0$ si $x \in I \setminus \{0\}$ et donc $f(x) < f(a)$ si $x \in I \setminus \{0\}$. La fonction f admet un maximum local en a.

Supposons $v = 0$ et $w > 0$. Alors $f(x) = f(a) + (w + \varepsilon(x)) \times (x-a)^2$. Puisque $\varepsilon(a) = 0$ et que ε est continue en a, quitte à restreindre I, on a $w + \varepsilon(x) > 0$ si $x \in I$. Alors $(w + \varepsilon(x)) \times (x-a)^2 > 0$ si $x \in I \setminus \{0\}$ et donc $f(x) > f(a)$ si $x \in I \setminus \{0\}$. La fonction f admet un minimum local en a.

Remarque 35 Supposons f deux fois dérivable en a. Dans ce cas on peut reformuler les énoncés précédents avec $f'(a)$ et $f''(a)$. Si f admet un maximum (respectivement un minimum) local en a alors $f'(a) = 0$ et $f''(a) \leq 0$ (respectivement $f''(a) \geq 0$). Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) < 0$ (respectivement $f''(a) > 0$) alors f admet un maximum (respectivement un minimum) local en a.

5 Suites définies par récurrence, théorèmes de point fixe

5.1 Énoncer le théorème du point fixe et son application à l'étude des suites récurrentes. Donner une démonstration de ce théorème. Illustrer graphiquement.

Définition 38 Un point fixe d'une application f d'un ensemble dans lui-même est un élément l de cet ensemble qui est invariant par f, c'est à dire qui vérifie l'égalité $f(l) = l$.

Exemple 75 La fonction définie par $f(x) = x + \sin(x)$ si $x \in \mathbf{R}$ possède une infinité de points fixes, les nombres $n\pi, n \in \mathbf{Z}$.

Définition 39 Soit E un sous-ensemble de $\mathbf{R}$ et soit f une fonction de E dans E. On appelle suite récurrente associée à f une suite u de la forme $u_0 \in E$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ si $n \in \mathbf{N}$. Quel que soit $x \in E$ il existe une et une seule suite récurrente associée u à f et de premier terme $u_0 = x$.

Proposition 58 Soient $E \subset \mathbf{R}$, $f : E \to E$ continue et $l \in E$. Si l est la limite d'une suite récurrente u associée à f, alors l est un point fixe de f : $f(l) = l$.

Preuve Considérons une suite récurrente $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ associée à f et qui converge vers $l \in E$. La suite extraite $u' = (u'_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u'_n = u_{n+1}$ converge aussi vers l. Mais u' est la suite image de la suite u par la fonction f. Puisque f est continue en l la suite image u' converge vers $f(l)$. Ainsi $f(l) = l$.

Exemple 76 La fonction continue f définie sur $[2,3]$ par $f(x) = 2\sqrt{x-1}$ est à valeurs dans $[2,3]$, vérifie $2 < f(x) < x$ pour tout $x \in]2,3]$ et 2 son seul point fixe. La suite récurrente u de premier terme $u_0 = 3$ associée à f est donc strictement décroissante et bornée. Elle est donc convergente. Sa limite est, d'après la proposition, l'unique point fixe de f : c'est le point 1.

Proposition 59 Soit $E = [a,b]$. Si $f : E \to E$ est continue alors f possède un point fixe l : $f(l) = l$.

Preuve Supposons que a et b ne sont pas des points fixes de f et considérons $g : |a,b] \to [a,b]$ définie par $g(x) = f(x) - x$. La fonction g est continue et puisque $f(a) \neq a$ et $f(b) \neq b$ il vient $f(a) \in]a,b]$ et $f(b) \in [a,b[$ et donc $g(a) = f(a) - a > 0$ et $g(b) = f(b) - b < 0$: la fonction g qui est continue change de signe entre a et b. D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $l \in]a,b[$ tel que $g(l) = 0$, c'est à dire $f(l) = l$.

Remarque 36 Cet énoncé garantit l'existence d'un point fixe mais pas son unicité. D'ailleurs la fonction $f : [0,1] \to [0,1]$ définie par $f(x) = 2x(1-x)$ vérifie les hypothèses de la proposition et possède deux points fixes, 0 et $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Définition 40 Soient $K \in [0,1[$ et $E \subset \mathbf{R}$. On dit que $f : E \to E$ est K-contractante si

$$\forall (x,x') \in E^2 \ |f(x) - f(x')| \leq K|x - x'|.$$

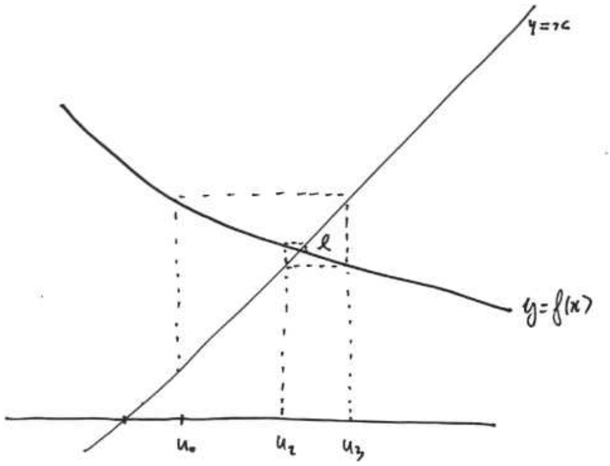
Proposition 60 Soient $K \in [0,1[$, $E \subset \mathbf{R}$ et $f : E \to E$ une fonction K-contractante. Alors f est continue et si f admet un point fixe il est unique.

Preuve Puisque la fonction f est K-contractante alors

$$\forall \varepsilon > 0 \forall (x,x') \in E^2 |x - x'| < \varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f(x')| \leq K|x - x'| \leq |x - x'| < \varepsilon.$$

Ceci signifie que f est uniformément continue, donc continue.

Soient l et l' des points fixes de f. Il vient $|l-l'| = |f(l)-f(l')| \leq K|l-l'|$. Puisque $K \in [0,1[$ cette inégalité implique $|l-l'| = 0$, c'est à dire $l = l'$.



Remarque 37 Cet énoncé garantit l'unicité d'un point fixe mais pas son existence. D'ailleurs la fonction $f :]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ définie par $f(x) = \frac{1}{2}x$ vérifie les hypothèses de la proposition mais ne possède aucun point fixe.

Théorème 14 (théorème de point fixe des fonctions K-contractantes) Soient $K \in [0,1[$, $E \subset \mathbf{R}$ et $f : E \to E$ une fonction K-contractante. Si E est égal à $\mathbf{R}$, à un segment ou à une demi-droite fermée alors f possède un point fixe et il est unique.

Preuve D'après la troisième proposition, puisque f est contractante, elle possède au plus un point fixe. Si E est un segment, d'après la deuxième proposition, f a un point fixe. Il est donc unique. Supposons $E = \mathbf{R}$. On considère la fonction g définie par $g(x) = f(x) - x$ si $x \in \mathbf{R}$. Puisque f est K contractante on a $f(x) \leq f(0) + Kx$ et donc $g(x) \leq g(0) - (1-K)x$ si $x > 0$ et $f(x) \geq f(0) + Kx$ et donc $g(x) \geq g(0) - (1-K)x$ si $x < 0$. Or $\lim_{+\infty} g(0) - (1-K)x = -\infty$ et $\lim_{-\infty} g(0) - (1-K)x = +\infty$ car $1 - K > 0$ et donc $\lim_{+\infty} g = -\infty$ et $\lim_{-\infty} g = +\infty$. La fonction g change donc de signe sur $\mathbf{R}$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires elle s'annule. Il existe $l \in \mathbf{R}$ tel que $g(l) = 0$, c'est à dire $f(l) = l$: la fonction f a bien un point fixe. Si $E = [A,+\infty[$ on prolonge f sur $\mathbf{R}$ tout entier en posant $F(x) = f(A)$ si $x < A$ et $F(x) = f(x)$ si $x \geq A$. La fonction F est toujours K-contractante. Puisqu'elle est définie sur $\mathbf{R}$ elle possède un unique point fixe l d'après ce qui précède. Or si $x < A$ alors $F(x) = f(A) \geq A > x$ et x n'est pas point fixe de F. Donc $l \geq A$ et $l = F(l) = f(l)$. La fonction f possède un unique point fixe. Si $E =]-\infty, A]$, alors la fonction $F : [-A,+\infty[\to [-A,+\infty[$ définie par $F(x) = -f(-x)$ est K-contractante et d'après ce qui précède elle possède un unique point fixe L. Or par construction de F à partir de f, l est point fixe de f si et seulement si $-l$ est point fixe de F et donc f possède aussi un unique point fixe.

Exemple 77 Soit $r \in \mathbf{Q} \cap]0,1[$ et soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $d \geq 1$. Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, si $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{d}(r - u_n^d)$ converge vers $r^{\frac{1}{d}}$. En effet, soit f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x + \frac{1}{d}(r - x^d)$. Puisque $f'(x) = 1 - x^{d-1} \in [0,1[$ si $x \in]0,1]$ la fonction f restreinte à $[0,1]$ est croissante et $f([r,1]) \subset f([0,1]) = [r, 1 - \frac{1}{d}(1-r)] \subset [r,1]$. Or si $x \in [r,1]$, $f'(x) \in [0,K]$ avec $K = 1 - r^{d-1} \subset [0,1[$. La restriction de f au segment $[r,1]$ qui est stable par f est donc K contractante et la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est donc convergente vers l'unique point fixe de cette restriction. Or $r^{\frac{1}{d}} = f(r^{\frac{1}{d}}) \in [r,1]$. C'est donc l'unique point fixe et c'est aussi la limite de la suite. Par construction la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de rationnels mais sa limite ne l'est pas nécessairement.

5.2 Peut-on utiliser ce résultat pour l'étude de la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n - 1}$?

Réponse La fonction f définie sur $[2,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x-1}$ est à valeurs dans $[2,+\infty[$ car si $x \geq 2$ alors $x-1 \geq 1$ et donc $\sqrt{x-1} \geq 1$ et $f(x) = 2\sqrt{x-1} \geq 2$. Elle est dérivable mais sa dérivée en 2 vaut 1. Aussi elle ne peut pas être K contractante : en effet si $K \in [0,1[$, puisque $\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{2\sqrt{x-1}-2}{x-2} = 1$ il existe $\eta > 0$ tel que pour $x \in]2,2+\eta[$ on a $\frac{2\sqrt{x-1}-2}{x-2} > K$. La fonction f admet tout de même un unique point fixe, 2, car $f(2) = 2$ et si $x > 2$ alors $f(x) < x$. De plus cette inégalité implique que toute suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ associée à f est soit stationnaire égale à 2 lorsque $u_0 = 2$ soit strictement décroissante et minorée par 2 qui est sa limite si $u_0 > 2$. En effet l'inégalité $2 < u_n$ implique les inégalités $2 < u_{n+1} = f(u_n) < u_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui est décroissante et bornée converge et d'après ce qui précède sa limite qui est minorée par 2 est un point fixe de f, c'est donc 2.

5.3 Que dire si E est quelconque ?

Proposition 61 Soient $K \in [0,1[$, $E \subset \mathbf{R}$ et $f : E \to E$ une fonction K-contractante qui possède un point fixe l. Alors toute suite récurrente u associée à f converge vers l.

Preuve Soit u une suite récurrente associée à f.

Vérifions par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ que $|l-u_n| \leq K^n|l-u_0|$.

Véracité au rang 0 : $|l-u_0| = K^0|l-u_0| \leq |l-u_0|$.

Hérédité. On considère $n \in \mathbf{N}$ tel que $|l-u_n| \leq K^n|l-u_0|$. Puisque u est une suite récurrente associée à f qui est K-contractante et que $f(l) = l$ il vient

$$|l-u_{n+1}| = |f(l)-f(u_n)| \leq K|l-u_n| \leq K^{n+1}|l-u_0|.$$

Puisque $K \in [0,1[$ la suite de terme général $K^n|l-u_0|$ tend vers 0 et puisque $|l-u_n| \leq K^n|l-u_0|$ la suite de terme général $l-u_n$ tend aussi vers 0 et donc la suite u converge vers l.

Théorème 15 Soient $K \in [0,1[$, $E \subset \mathbf{R}$ et $f : E \to E$ une fonction K-contractante. Alors il existe $l \in \mathbf{R}$ tel que toutes les suites récurrentes associées à f sont convergentes de limite l. L'alternative suivante est de plus vérifiée : soit f a un point fixe et c'est l soit $l \notin E$.

Remarque 38 Un des intérêts de cette énoncé et qu'il admet une preuve qui permet des généralisations à d'autres espaces que $\mathbf{R}$ à des espaces du type $\mathbf{R}^n$ avec $n \in \mathbf{N}$ et même à certains espaces de dimension infinie dans lesquels on peut définir la notion de suite de Cauchy convergente.

Preuve Elle est faite en quatre étapes.

Étape 1 Soient $x, x' \in E$. Alors les suites récurrentes u et v associées à f et de premier terme $u_0 = x$ et $v_0 = x'$ vérifient

$$|u_n - v_n| \leq K^n|x-x'| \text{ si } n \in \mathbf{N}.$$

Preuve (de l'étape 1) Par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$.

Si $n = 0$ on a bien $|u_0 - v_0| = |x-x'| \leq K^0|x-x'|$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Si $|u_n - v_n| \leq K^n|x - x'|$ alors

$$\begin{aligned}|u_{n+1} - v_{n+1}| &= |f(u_n) - f(v_n)| \\ &\leq K|u_n - v_n| \\ &\leq K^{n+1}|x - x'|.\end{aligned}$$

Étape 2 Soit $x \in E$. Alors la suite récurrente $u =$ associée à f et de premier terme $u_0 = x$ est de Cauchy donc convergente.

Preuve (de l'étape 2) Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $K \in [0,1[$ la suite de terme général $\frac{K^N}{1-K}|x - f(x)|$ est positive et tend vers 0 et il existe donc $N \in \mathbf{N}$ tel que

$$\frac{K^N}{1-K}|x - f(x)| < \varepsilon.$$

Soient $n, m \in \mathbf{N}$ tels que $n \geq N$ et $m \geq 1$. Alors

$$\begin{aligned}|u_n - u_{n+m}| &\leq \sum_{i=0}^{m-1} |u_{n+i} - u_{n+i+1}| \\ &\leq \sum_{i=0}^{m-1} K^{n+i}|x - f(x)| \\ &\leq K^n \frac{1-K^m}{1-K}|x - f(x)| \\ &\leq \frac{K^n}{1-K}|x - f(x)| \\ &\leq \frac{K^N}{1-K}|x - f(x)| \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

Ceci montre que u est bien de Cauchy donc convergente.

Étape 3 La limite de la suite u est indépendante du choix de $x \in E$.

Preuve (de l'étape 3) Soient u et v deux suites associées à f et soient l et l' leurs limites. La suite de terme général $|u_n - v_n|$ tend vers $|l - l'|$. C'est le cas aussi de la suite de terme général $|u_{n+1} - v_{n+1}|$. Or si $n \in \mathbf{N}$

$$|u_{n+1} - v_{n+1}| = |f(u_n) - f(v_n)| \leq K|u_n - v_n|$$

et en passant à la limite on obtient

$$|l - l'| \leq K|l - l'|.$$

Puisque $K \in [0,1[$ cette inégalité n'est possible que si $l = l'$.

Étape 4 Soit f a un point fixe et c'est l soit $l \notin E$.

Preuve (de l'étape 4)

Si f a un point fixe x alors la suite récurrente u de premier terme x associée à f est constante. Comme sa limite est l la limite commune à toutes les suites récurrentes associées à f, il vient $l = x$ et l est ce point fixe.

Il reste à montrer que si $l \in E$ alors c'est un point fixe de f. Supposons donc $l \in E$. La fonction f est continue car K-contractante. Puisque l est dans E et qu'il est la limite d'une suite récurrente associée à la fonction continue f c'est un point fixe de cette fonction.

5.4 Rappeler les méthodes d'étude d'une suite récurrente à valeurs dans R définie par la donnée de u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$, en fonction de la monotonie de la fonction f.

Proposition 62 Soient E un sous-ensemble de $\mathbf{R}$, f une fonction monotone de E dans E et u une suite récurrente associée à f. Si f est croissante alors u est monotone, croissante si $u_0 \leq u_1$ et décroissante sinon. Si f est décroissante alors les suites extraites de terme général u_{2n} et u_{2n+1} sont monotones de variations opposées.

Preuve On va prouver la proposition en distinguant f croissante et f décroissante.

Le cas de f croissante. Pour tout n, $u_{n+1} - u_n$ et $u_{n+2} - u_{n+1} = f(u_{n+1}) - f(u_n)$ sont de même signe qui est le signe de $u_1 - u_0$. Par conséquent u est monotone : elle est croissante si $u_0 \leq u_1$ et décroissante si $u_0 \geq u_1$.

Le cas de f décroissante. Dans ce cas la fonction $f \circ f$ est croissante. Donc pour tout n, $u_{2n+2} - u_{2n}$ et $u_{n+4} - u_{n+2} = f^2(u_{2n+2}) - f^2(u_{2n})$ sont de même signe qui est le signe de $u_2 - u_0$. De même, $u_{2n+3} - u_{2n+1}$ et $u_{n+5} - u_{n+3} = f^2(u_{2n+3}) - f^2(u_{2n+1})$ sont de même signe qui est le signe de $u_3 - u_1$. Par conséquent les suites extraites de terme général u_{2n} et u_{2n+1} sont monotones. Leurs variations sont déterminées par le signe de $u_2 - u_0$ et le signe de $u_3 - u_1$. Ces variations sont opposées car, puisque f est décroissante, les signes de $u_2 - u_0$ et $u_3 - u_1$ sont opposés.