
Feuille de TP n°7 – Régions de confiance

1 Intervalles de confiance

Lois classiques

1. La loi gamma $G(a, \lambda)$ ($\lambda > 0$ et $a > 0$) admet pour densité

$$\gamma_{a,\lambda}(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x} x^{a-1} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

2. Ces lois vérifient la propriété de convolution $G(a, \lambda) * G(b, \lambda) = G(a + b, \lambda)$.
 3. La loi $G(1, \lambda)$ est la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.
 4. La loi de la somme de n carrés de v.a. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ suit la loi du $\chi^2(n)$ qui est encore la loi $G(n/2, 1/2)$.
 5. La loi de Student t_p (à p degrés de liberté) est la loi de

$$\frac{U}{\sqrt{V/p}} \quad \text{où } U \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{et } V \sim \chi^2(p).$$

Elle admet pour densité (pour mémoire)

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \frac{1}{(p\pi)^{1/2}} \frac{1}{(1 + t^2/p)^{(p+1)/2}}.$$

1.1 Exemple 1

On considère le modèle statistique suivant : pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_\theta(x) = \frac{1}{2} \exp(-|x - \theta|).$$

- Donner deux estimateurs de θ (considérer la moyenne et la médiane). Sont-ils biaisés ?
- Proposer deux intervalles de niveau de confiance asymptotique 0,95. Lequel est-il le plus judicieux de choisir ?
- Que donne l'inégalité de Cramer (majoration par Markov exponentiel) ?

1.2 Exemple 2

Soit X_1, \dots, X_n un échantillon de loi normale centrée réduite.

- Illustrer le fait que $\sum_i X_i^2$ et $\sum_i (X_i - \bar{X})^2$ suivent respectivement une loi du $\chi^2(n)$ et du $\chi^2(n-1)$ (on prendra n assez petit pour différencier les deux lois).
- Illustrer le fait que

$$\frac{\bar{X}_n - m}{S_n/\sqrt{n}}, \quad \text{où } \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{et } S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2,$$

suit une loi de Student t_{n-1} .

1.3 Exemple 3

Soit X_1, \dots, X_n un échantillon i.i.d. de la loi exponentielle de paramètre θ .

1. Donner un estimateur de θ et illustrer sa convergence presque sûre.
2. Quelle est la loi de la v.a. $Y = \sum_{i=1}^n X_i$?
3. En déduire le biais et la variance de l'estimateur introduit à la question 1.
4. Donner un intervalle de confiance en précisant sa nature (asymptotique, exact, à confiance minorée...).