Feuille de TP n˚3 – Chaînes de Markov

1 Un exemple simpliste

Les consommateurs de 3 produits sont initialement répartis respectivement à 50% pour P1, 30% pour P2 et 20% pour P3. Après chaque mois, 60% restent fidèles à P1 contre 70% pour P2 et 90% pour P3. Les autres se réorientent entre les deux autres produits (de manière équiprobable).

1. Déterminer la distribution initiale ν et la matrice de transition P associées à ce modèle markovien (exemple : $P_{12} = 0.2$).
2. Tracer l'évolution déterministe des répartitions des consommateurs pendant les 12 premiers mois.
3. Tracer l'évolution de l'opinion d'un individu initialement adepte de P1 pendant les douze premiers mois(consultez l'aide pour `grand` option 'markov').
4. Même question pour un individu pris au hasard dans la population totale selon la loi ν.
5. Simuler la répartition sur douze mois des opinions de 1000 personnes (qui ne se concertent pas) choisies indépendamment dans la population.
6. Déterminez la distribution stationnaire de la matrice de transition et refaire la question 2 en prenant la distribution stationnaire comme distribution initiale des consommateurs. Quelles sont les valeurs propres de P ? On pourra utiliser les fonctions `spec`, `bdiag`, mais aussi de grandes puissances de P.

2 L'urne d'Ehrenfest

On dispose de m particules que l'on répartit initialement entre deux récipients A et B. À chaque pas de temps, on choisit une particule parmi les m et on la change d'urne. On note X_n le nombre de particules dans l'urne A au temps n. Pour toutes les applications, on prendra $m = 10$.

1. Donner la matrice de transition P de la chaîne de Markov (X_n) sur $\{0, \ldots, m\}$.
2. Cette chaîne est-elle irréductible ? récurrente ? périodique ?
3. Écrire une fonction qui trace une trajectoire de cette chaîne. On pourra utiliser la fonction `binomial` pour générer la matrice de transition.
4. Vérifier que la mesure invariante μ de cette chaîne est la loi binomiale $\mathcal{B}(m, 1/2)$.
5. Illustrer le fait que, pour $l \in \{0, \ldots, m\}$,
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_i = l\}} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mu(\{l\}).$$
Quel théorème est-il mis en lumière ici ?
6. On définit T_{ll} le temps de retour en l par $T_{ll} = \inf\{n \geq 1, X_n = l | X_0 = l\}$. Comparer, par simulation, $\mathbb{E}(T_{ll})$ et $\mu(l)$.
7. Comparer les grades puissances paires et impaires de P. La loi de X_n converge-t-elle vers μ ? Pourquoi ?
8. Comment simuler les trajectoires d'une chaîne d'Ehrenfest lorsque le nombre de boules atteint 1000000 ?

On pourra consulter [FF02] et surtout [KS60].

3 Modèle de Wright-Fisher sans mutations

On considère ici la chaîne de Markov X sur $\{0, 1, \ldots, 2N\}$ de matrice de transition $P = (p_{ij})_{ij}$ donnée par :

$$p_{ij} = \binom{2N}{j} q_i^j (1 - q_i)^{2N-j} \quad \text{avec} \quad q_i = \frac{i}{2N}$$

pour $i, j \in \{0, 1, \ldots, 2N\}$. La loi de X_{n+1} sachant que $X_n = i$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(2N, i/2N)$. On pourra utilisez les fonctions `binomial` et `grand` option `markov` pour définir la matrice P.

1. Représenter plusieurs trajectoires de cette chaîne de Markov pour $N = 5,\ 10,\ 30$.
2. Estimer la probabilité que la chaîne soit absorbée en $2N$ en fonction du point de départ pour $N = 5,\ 10,\ 30$. Une conjecture pour l'expression théorique ?
3. Proposer une estimation de l'espérance du temps d'absorption de la chaîne en fonction du point de départ pour $N = 5,\ 10,\ 30$. Ne pas oublier pas l'intervalle de confiance !

4 Modèle de Wright-Fisher avec mutations

On remplace le modèle précédent par la chaîne associée à la matrice P donnée par

$$p_{ij} = \binom{2N}{j} q_i^j (1 - q_i)^{2N-j} \quad \text{avec} \quad q_i = \frac{i}{2N}(1-u) + \left(1 - \frac{i}{2N}\right) v$$

pour $i, j \in \{0, 1, \ldots, 2N\}$ avec u et v dans $]0, 1[$.

1. Calculer la mesure invariante π pour $N = 10$ et 20. À partir de quelle valeur de N, le logiciel ne permet plus le calcul de π ?
2. Proposer une méthode s'appuyant sur le théorème ergodique pour donner une estimation des coefficients de π. Confronter les résultats de la simulation à ceux de la question précédente pour $N = 10$ et 20.

Pour les deux modèles de Wright-Fisher, on pourra se référer à [Nor98] ou aux recueils de textes publiés.

Références

[FF02] D. Foata et A. Fuchs – *Processus stochastiques*, Dunod, 2002.

[KS60] J. G. Kemeny et J. L. Snell – *Finite markov chains*, Van Nostrand, 1960.

[Nor98] J. R. Norris – *Markov chains*, Cambridge University Press, 1998.