– Texte –
Modèles du votant

1 Le phénomène à modéliser

On souhaite modéliser la contagion concurrente de deux opinions dans une population donnée finie. On suppose que les individus sont immobiles et en interaction directe avec certains autres individus de la population. Les partisans de l'opinion A (resp. B) seront affublés du numéro 1 (resp. 0). Dans toute la suite on fait les hypothèses suivantes :

1. chaque individu influence directement ses voisins et eux seulement,
2. l'influence est positive : un individu a tendance à rallier son voisin à son opinion,
3. tous les individus ont le même pouvoir d'influence,
4. chacun des N individus est en communication directe avec au plus deux autres individus,
5. deux individus donnés sont en interaction au moins indirecte, c'est-à-dire par l'intermédiaire de tiers,
6. un seul individu peut changer d'opinion en un instant donné.

2 Premières définitions et bases du modèle

On modélise l'état de l'opinion de la population de la façon suivante : les individus sont numérotés de 1 à N et on leur affecte la valeur 1 s'ils sont proA et 0 s'ils sont proB. L'opinion de la population à un instant donné s'identifie donc à un élément de $E = \{0,1\}^S$ avec $S = \{1, \dots, N\}$.

Pour modiliser les changements d'opinions possibles, on va munir E d'une structure de graphe non orienté. Un graphe non orienté est un couple (S, A) où S est un ensemble et A est un ensemble de sous-ensembles à deux éléments de S. Les éléments de S sont appelés sommets du graphe et ceux de A les arêtes. Deux points x et y de S sont dits voisins si une arête les relie :

$$\forall x, y \in S, \quad x \sim y \iff \{x, y\} \in A.$$

Identifions $E = \{0,1\}^S$ à l'ensemble des applications de S dans $\{0,1\}$: pour $\eta \in E$,

$$\forall x \in S, \quad \eta(x) \in \{0,1\}.$$

Les éléments η de E sont appelés configurations.

Remarque 2.1. On parle parfois de système de spins.

On veut construire un processus aléatoire à valeurs dans E qui va décrire les changements d'opinion dans la population. Puisqu'un seul individu peut changer d'opinion à un instant donné, le processus ne peut passer d'une configuration η à une configuration ξ que si celle-ci diffère de η en exactement un site. Pour $\eta \in E$ et $x \in S$, nous noterons η_x la configuration η changée au site x :

$$\eta_x(y) = \begin{cases} \eta(y) & \text{si } y \neq x, \\ 1 - \eta(x) & \text{si } y = x. \end{cases}$$

Selon les modèles, il faudra encore spécifier, pour toute configuration η et tout site x, les probabilités de transition de η vers η_x.

3 Le modèle cyclique à temps discret

On suppose à présent que chaque individu interagit avec exactement deux autres et que la population totale compte N individus.

Le graphe correspondant à la situation peut être choisi de la manière suivante. Soit S l'ensemble $\{0, \ldots, N-1\}$ identifié à $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. On munit S d'une structure de graphe cyclique en se donnant l'ensemble des arêtes

$$A = \{x, x+1 \text{ Modulo } N, \quad x = 0, \ldots, N-1\}.$$

Remarque 3.1. Les points x et y sont voisins si et seulement si $|x-y|$ est égal à 1 modulo N.

3.1 Transitions de la chaîne

On note $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la chaîne de Markov à temps discret sur E qui va modéliser l'évolution de l'opinion dans la population.

Remarque 3.2. On notera $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la filtration engendrée par $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Puisque l'influence est positive, si tous les individus ont le même avis, les opinions n'évoluent plus. Si ce n'est pas le cas, la probabilité pour qu'un individu change d'avis est proportionnelle au nombre de ses voisins qui sont d'opinion contraire. On peut reformuler ceci de la manière suivante. Supposons que η est différente des configurations $(0, \ldots, 0)$ et $(1, \ldots, 1)$. Sachant que $X_n = \eta$, X_{n+1} vaut η_x où x est choisi avec une probabilité proportionnelle au nombre de ses voisins d'opinion différente. jamais choisi.

3.2 Classes

Lemme 3.3. *Les deux configurations* $(0, \ldots, 0)$ *et* $(1, \ldots, 1)$ *sont des états absorbants. Toutes les autres configurations sont transitoires.*

3.3 Évolution en temps long

Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{x \in S} X_n(x)$ le nombre de sites de la configuration X_n qui ont la valeur 1.

Lemme 3.4. *La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Démonstration. Soit η une configuration quelconque. Alors le nombre de sites ayant la valeur 0 voisins d'un site ayant la valeur 1 est égal au nombre de sites ayant la valeur 1 voisins d'un site ayant la valeur 0. Ceci implique que le site qui changera d'avis aura la valeur 1 avec probabilité 1/2 et 0 avec la probabilité 1/2. La propriété de martingale se déduit de cette remarque. □

En particulier, le nombre moyen de sites marqués 1 est constant au cours du temps.

Lemme 3.5. *L'ensemble des mesures invariantes sont les combinaisons convexes des mesures de Dirac en les configurations $(1,\dots,1)$ et $(0,\dots,0)$ et si $\mathbb{E}(S_0)/N = p$ alors la loi de X_n converge vers*

$$(1-p)\delta_{(0,\dots,0)} + p\delta_{(1,\dots,1)}.$$

3.4 Composantes connexes

Définition 3.6. Si η est une configuration, on appelle composante connexe de η un ensemble maximal, au sens de l'inclusion, de sites voisins sur lequel η est constante.

Remarque 3.7. Un site à 1 entouré de deux voisins à 0 est une composante connexe de cardinal 1.

Lemme 3.8. *Presque sûrement, le nombre de composantes connexes de X_n est une fonction décroissante du temps.*

3.5 Évolution du nombre de proA

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov à valeurs dans $\{0,\dots,N\}$ dont on peut déterminer la matrice de transition et classer les états.

Pour tout $i = 0,\dots,N$, on note :

$$a_i(n) = \mathbb{P}(S_n = 0 | S_0 = i) \quad \text{et} \quad b_i(n) = \mathbb{P}(S_n = N | S_0 = i).$$

Lemme 3.9. *Pour tout $i = 1,\dots,N-1$, on a :*

$$a_i(n+1) = \frac{1}{2}a_{i-1}(n) + \frac{1}{2}a_{i+1}(n) \quad \textit{et} \quad b_i(n+1) = \frac{1}{2}b_{i-1}(n) + \frac{1}{2}b_{i+1}(n).$$

Soit U le nombre de sauts de la chaîne avant absorption :

$$U = \inf\{n \in \mathbb{N},\ S_n \in \{0, N\}\}.$$

Pour tout $i = 0,\dots,N$, on pose

$$u_i = \mathbb{E}(U | S_0 = i).$$

Lemme 3.10. *Les* $(u_i)_{0\leqslant i\leqslant N}$ *sont solution de l'équation de récurrence :*

$$u_i = \frac{1}{2}u_{i-1} + \frac{1}{2}u_{i+1} + 1, \quad u_0 = u_N = 0.$$

On peut résoudre cette équation de récurrence en cherchant la solution sous la forme $u_i = a + bi + ci^2$.

4 Le modèle cyclique à temps continu

On considère à présent que le processus Y, à valeurs dans l'espace des configurations E, est indicé par le temps continu : $(Y_t)_{t\in[0,+\infty[}$. Sachant que $Y_0 = \eta$, Y reste en η pendant un temps aléatoire puis saute vers une des configurations voisines $(\eta_x)_{x\in S}$. On note $c(x,\eta)$ le taux de transition de η vers η_x (taux avec lequel la configuration change au point x). Le taux de changement $c(x,\eta)$ est égal au nombre de voisins d'opinion opposée :

— si $\eta(x) = 1$, alors $c(x,\eta) = \sum_{y\sim x}(1-\eta(y))$,

— si $\eta(x) = 0$, alors $c(x,\eta) = \sum_{y\sim x}\eta(y)$,

Remarque 4.1. Remarquons que dans le modèle considéré, $c(x,\eta)$ ne peut prendre que trois valeurs :

— 0 si les voisins de x sont en accord avec lui,

— 1 si un seul des deux voisins de x est en accord avec lui,

— 2 si x est en désaccord avec ses deux voisins.

En particulier, η_x ne pourra être atteinte dans le premier cas.

On peut réaliser la dynamique de Y de la manière suivante : sachant que $Y_0 = \eta$, on génère N v.a. exponentielles $(E_x)_{x\in S}$ de paramètres respectifs $(c(x,\eta))_{x\in S}$ (avec la convention $E_x = +\infty$ si $c(x,\eta) = 0$). Le temps $T = \inf_x E_x$ est le premier temps de saut et $y \in S$ tel que $E_y = \inf_x E_x$ est le site qui change d'opinion, c'est-à-dire que $Y_T = \eta_y$. Puis on itère l'algorithme...

Proposition 4.2. *Si* $(E_k)_{1\leqslant k\leqslant N}$ *sont des variables aléatoires indépendantes de lois exponentielles de paramètres respectifs* $(\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant N}$ *(éventuellement nuls), on définit les variables aléatoires* $T = \inf_{1\leqslant k\leqslant N} E_k$ *et* L *tel que* $E_L = \inf_{1\leqslant k\leqslant N} E_k$*. Alors* L *est bien définie (l'infimum est atteint en un seul entier presque sûrement),* T *suit une loi exponentielle de paramètre* $\lambda_1 + \cdots + \lambda_N$*, pour tout* $k \in \{1,\ldots,N\}$, $\mathbb{P}(L = k) = \lambda_k/(\lambda_1 + \cdots + \lambda_N)$*. De plus,* T *et* L *sont indépendantes.*

Notons $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les temps inter-sauts de Y. Alors, sachant que $X_0 = Y_0$, Y est constant sur les intervalles de la forme $[T_1 + \cdots + T_n, T_1 + \cdots + T_{n+1}]$ et $Y_{T_1+\cdots+T_n} = X_n$: la loi du processus continu au nième instant de saut $T_1 + \cdots + T_n$ est égal à celle de la chaîne de Markov à temps discret au temps n de la partie précédente.

Les états récurrents, transients et absorbants sont donc les mêmes que pour la chaîne à temps discret. Le nombre de composantes connexes est de même décroissant.

En supposant que Y_0 ne possède que deux composantes connexes, on pourrait étudier le processus $(Z_t)_{t\geqslant 0}$ qui compte le nombre de sites d'opinion 1 au temps t :

$$Z_t = \sum_{x\in S} Y_t(x).$$

On peut montrer que $(Z_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus de Markov à valeurs dans $\{0,\dots,N\}$.

Proposition 4.3. *Pour tout $i = 0,\dots,N$, on note :*

$$\alpha_i(t) = \mathbb{P}(Z_t = 0|Z_0 = i) \quad \textit{et} \quad \beta_i(t) = \mathbb{P}(Z_t = N|Z_0 = i).$$

On a alors

$$\alpha_i'(t) = 2\alpha_{i-1}(t) - 4\alpha_i(t) + 2\alpha_{i+1}(t) \quad \textit{et} \quad \beta_i'(t) = 2\beta_{i-1}(t) - 4\beta_i(t) + 2\beta_{i+1}(t).$$

Comme dans le modèle à temps discret, on définit le temps d'absorption V du processus Z :

$$V = \inf\{t \geqslant 0,\ Z_t \in \{0,N\}\}.$$

Pour tout $i = 0,\dots,N$, on pose

$$v_i = \mathbb{E}(V|S_0 = i).$$

Lemme 4.4. *Le réel v_i est donné par :*

$$v_i = \int_0^{+\infty} (1 - \alpha_i(t) - \beta_i(t))\,dt.$$

On en déduit que le vecteur $(v_i)_{0\leqslant i\leqslant N}$ est solution du système

$$1 = 2t_{i-1} - 4t_i + 2t_{i+1}, \quad t_0 = t_N = 0.$$

On peut résoudre cette équation en cherchant la solution sous la forme $t_i = a + bi + ci^2$.

5 Le modèle linéaire avec conditions aux bords

On voudrait à présent étudier la situation où les deux opinions ont des défenseurs indéfectibles, c'est-à-dire qu'ils ne changeront en aucun cas d'avis au cours du temps.

Pour cela, on considère l'ensemble

$$S = \{-1,0,\dots,N+1\} \subset \mathbb{Z} \text{ muni des arêtes } \mathcal{A} = \{\{x,x+1\},\ x = -1,\dots,N\}.$$

Les éléments -1 et $N+1$ ne communiquent pas. Les points -1 et $N+1$ ont donc chacun un seul voisin tandis que $x = 0, \dots, N$ ont tous deux voisins.

On considère les configurations $\eta \in \{0,1\}^S$ telles que $\eta(-1) = 0$ et $\eta(N+1) = 1$: le site 0 sera toujours d'opinion 0 tandis que le site $N+1$ sera toujours d'opinion 1. Les opinions des sites intermédiaires évolueront comme précédemment.

On note $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la chaîne de Markov à temps discret sur E qui va modéliser l'évolution de l'opinion dans la population.

Remarque 5.1. On notera $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la filtration engendrée par $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Puisque toutes les influences sont équivalentes, la chaîne passera d'un état à un autre en choisissant de manière équiprobable l'influence qui a abouti avec succès. On peut reformuler ceci de la manière suivante : sachant que $X_n = \eta$, X_{n+1} vaut η_x où $x \in \{0, \dots, N\}$ (car -1 et $N+1$ ne peuvent être choisis) est choisi avec une probabilité proportionnelle aux nombre de voisins d'opinion différente.

5.1 Composantes connexes

Définition 5.2. Si η est une configuration, on appelle composante connexe de η un ensemble maximal au sens de l'inclusion, de sites voisins sur lequel η est constante.

Remarque 5.3. Pour une configuration η donnée, il y a au moins deux composantes connexes :

— celle de -1 qui est égale à $\{-1, \max\{x,\ \forall y \leqslant x, \eta(y) = 0\}\}$,

— celle de $N+1$ qui est égale à $\{\min\{x,\ \forall y \geqslant x, \eta(y) = 1\}, \dots, N+1\}$,

Lemme 5.4. *Presque sûrement, le nombre de composantes connexes de X_n est une fonction décroissante du temps.*

5.2 Classification des états

Lemme 5.5. *Tous les états à deux composantes connexes sont récurrents, les autres sont transitoires.*

Remarque 5.6. La preuve de ce résultat peut se déduire des observations suivantes.

1. Toute configuration initiale η mène à la configuration $\xi_0 = (0, 0, \dots, 0, 1)$ au sens où il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{P}(X_n = \xi_0 | X_0 = \eta) > 0$.
2. La configuration η_0 mène à η si et seulement si η n'a que deux composantes connexes ou encore si et seulement s'il existe $k \in \{-1, \dots, N\}$ tel que pour tout $x \leqslant k$, $\eta(x) = 0$ et pour tout $x > k$, $\eta(x) = 1$.

5.3 Cas de deux composantes connexes

On suppose à présent que X_0 a exactement deux composantes connexes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $Y_n = \max\{x \in S, X_n(x) = 0\}$. La suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur $E = \{0, \dots, N\}$ de matrice de transition

$$P = (P_{ij})_{0 \leqslant i,j \leqslant N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque 5.7. La chaîne de Markov $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est communément appelée marche aléatoire simple symétrique réfléchie sur $\{0, \dots, N\}$.

Lemme 5.8. *La chaîne Y admet une mesure invariante (qui est de plus symétrique) μ donnée par*

$$\mu_i = \begin{cases} 1/N & \text{si } i \in \{1, \dots, N-1\}, \\ 1/(2N) & \text{si } i = 0 \text{ ou } i = N. \end{cases}$$

Remarque 5.9. Une mesure μ est symétrique pour P si

$$\forall i, j \in E, \quad \mu_i P_{ij} = \mu_j P_{ji}.$$

6 Suggestions

1. On pourra démontrer certains des résultats concernant le modèle cyclique à temps discret de la section 3.
2. On pourra proposer la simulation de la chaîne à temps discret X de la section 3.
3. On pourra étudier le processus à temps continu décrit dans la section 4.
4. On pourra étudier le modèle linéaire avec conditions aux bords de la section 5. On commentera les résultats esquissés. On pourra en particulier étudier les propriétés de la chaîne Y après avoir justifié son introduction.