–Texte–
Décompositions d'atomes radioactifs

Mots-clefs : chaîne de Markov, loi exponentielle, fonction génératrice.

1 Modélisation

On considère un fragment de kryptonite. Celle-ci est constituée d'atomes radioactifs susceptibles de se décomposer en atomes instables qui se décomposent eux-mêmes pour donner une forme stable et inerte. La première décomposition est très lente et, durant l'expérience, peu d'atomes de kryptonite se seront décomposés. Un atome donné choisit de se décomposer indépendamment des autres (pas de réactions en chaîne) et sans que son âge n'ait d'influence sur son taux de décomposition. Le séjour d'un atome dans la forme instable est beaucoup plus court mais obéit au même principe d'absence de vieillissement et d'indépendance par rapport aux autres atomes.

Pour modéliser l'apparition de la forme instable, on utilise un processus de Poisson, dont nous noterons l'intensité λ. Nous supposerons qu'un atome instable se décomposera à nouveau (pour rejoindre la position inerte) au bout d'un temps exponentiel dont le paramètre sera noté μ. Le processus de Poisson et les temps de séjour dans l'état instable de tous les atomes seront supposés indépendants.

On s'intéresse à X_t le nombre d'atomes au temps t présents sous la forme instable et à la façon d'estimer les paramètres du modèle.

2 Quelques remarques sur les lois exponentielles

Proposition 2.1 (Absence de mémoire)**.** *Soit S et T deux variables aléatoires exponentielles indépendantes de paramètres respectifs λ et μ. Alors, pour tout $t \geqslant 0$,*

$$\mathbb{P}(T > S + t | T > S) = e^{-\lambda t}.$$

En d'autres termes, la loi de $T - S$ sachant $T > S$ est encore la loi exponentielle de paramètre λ.

Proposition 2.2. *Soient I un ensemble fini et $(T_k)_{k\in I}$ des variables aléatoires indépendantes et de lois exponentielles de paramètres respectifs $(\lambda_k)_{k\in I}$. On pose $T = \inf_{k\in I} T_k$ et $\lambda = \sum_{k\in I} \lambda_k$. Alors, avec probabilité 1, l'infimum est atteint en un unique K (aléatoire) élément de I. De plus, T et K sont indépendantes, T suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$ et pour tout $k \in I$, $\mathbb{P}(K = k) = \lambda_k/\lambda$.*

Démonstration. Soit $k \in I$ et $t \geqslant 0$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(K=k, T \geqslant t) &= \mathbb{P}(T_k \geqslant t, T_j > T_k, \forall j \neq k) = \int_t^\infty \lambda_k e^{-\lambda_k s}\mathbb{P}(T_j > s, \forall j \neq k)\, ds \\ &= \int_t^\infty \lambda_k e^{-\lambda_k s} \prod_{j\neq k} e^{-\lambda_j s}\, ds = \int_t^\infty \lambda_k e^{-\lambda s}\, ds = \frac{\lambda_k}{\lambda} e^{-\lambda t}.\end{aligned}$$

On conclut en remarquant que les ensembles $\{K=k\}$ et $\{T \geqslant t\}$ engendrent les tribus $\sigma(K)$ et $\sigma(T)$. □

3 Équations de Chapman-Kolmogorov

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on note $p_n(t) = \mathbb{P}(X_t = n)$.

Proposition 3.1. *Les fonctions $(p_n(\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ et satisfont le système d'équations différentielles linéaire suivant :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n'(t) = -(\lambda + n\mu)p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + (n+1)\mu p_{n+1}(t), \tag{1}$$

avec la convention $p_{-1}(t) = 0$ pour tout $t \geqslant 0$, la loi initiale $(p_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ étant donnée.

Démonstration. Pour calculer $p_n(t+h)$, on remarque que si $X_{t+h} = n$ alors l'une des conditions incompatibles suivantes est réalisée :

1. $X_u = n$ pour tout $u \in [t, t+h[$,
2. $X_t = n-1$ et une seule transition a lieu (de $n-1$ vers n) dans l'intervalle de temps $]t, t+h]$,
3. $X_t = n+1$ et une seule transition a lieu (de $n+1$ vers n) dans l'intervalle de temps $]t, t+h]$,
4. dans l'intervalle de temps $[t, t+h[$, au moins deux transitions ont lieu.

D'après les propositions 2.1 et 2.2, le processus reste dans l'état n un temps aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda + n\mu$ puis saute de n à $n-1$ ou $n+1$ avec probabilités respectives $n\mu/(\lambda+n\mu)$ et $\lambda/(\lambda+n\mu)$. En conditionnant par l'événement $\{X_t = n\}$, on en déduit l'égalité suivante :

$$p_n(t+h) = p_n(t)\{1 - \lambda h - n\mu h\} + \lambda h p_{n-1}(t) + (n+1)\mu h p_{n+1}(t) + o(h).$$

Il reste à faire tendre h vers 0. □

4 Loi du nombre d'atomes

Il y a plusieurs façons de déterminer la loi de X_t.

4.1 Fonctions génératrices

On cherche à déterminer la fonction génératrice de X_t. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et tout $s \in]-1,1[$, on pose

$$G(s,t) := \mathbb{E}\big(s^{X_t}\big) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n p_n(t).$$

Lemme 4.1. *La fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[\times\mathbb{R}_+$ et satisfait l'équation aux dérivées partielles suivante*

$$\partial_t G(s,t) = (1-s)[\mu\partial_s G(s,t) - \lambda G(s,t)]. \tag{2}$$

On peut alors préciser la fonction G.

Proposition 4.2. *Si G_0 est la fonction génératrice de X_0 alors, pour tout $t \geqslant 0$ et tout $s \in [0,1[$,*

$$G(s,t) = \exp\left(\frac{\lambda}{\mu}(1-s)(e^{-\mu t}-1)\right) G_0(1-e^{-\mu t}+se^{-\mu t}).$$

Démonstration. On pourra poser $H(s,t) = \log G(s,t)$ puis faire le changement de variables $(s,\tau) = (s,(1-s)e^{-\mu t})$. En notant $\tilde{H}$ la fonction telle que $H(s,t) = \tilde{H}(s,\tau)$, on montre avec le lemme précédent que $\tilde{H}$ s'écrit sous la forme

$$\tilde{H}(s,\tau) = \frac{\lambda}{\mu}s + h(\tau),$$

où h reste à déterminer. Ceci revient à dire que H est de la forme

$$H(s,t) = \frac{\lambda}{\mu}s + h((1-s)e^{-\mu t}).$$

On conclut en remarquant que la fonction h est caractérisée par le fait que $H(s,0) = \log G_0(s)$ pour tout $s \in [0,1[$. $\square$

A titre d'exemple, mentionnons le résultat :

Corollaire 4.3. *On obtient par exemple les lois de X_t lorsque X_0 est déterministe :*

$$\mathcal{L}(X_t|X_0=0) = \mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{\mu}\big(1-e^{-\mu t}\big)\right)$$

et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathcal{L}(X_t|X_0=k) = \mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{\mu}\big(1-e^{-\mu t}\big)\right) * \mathcal{B}(k,e^{-\mu t}).$$

Pour une loi initiale donnée, la loi de X_t est donc une combinaison convexe des lois ci-dessus.

4.2 Un raisonnement plus probabiliste

Supposons dans un premier temps que $X_0 = 0$. Notons $(N_t)_{t\geqslant 0}$ le processus de Poisson de paramètre λ régissant l'apparition des atomes instables. Soit $t > 0$. La variable aléatoire N_t suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda t)$. De plus, sachant que $N_t = n$, la loi des n instants de saut de $(N_t)_{t\geqslant 0}$ est distribuée comme un n-échantillon réordonné de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0, t]$. Un atome, apparu à un instant aléatoire de loi uniforme sur $[0, t]$, est donc encore présent à l'instant t avec une probabilité égale à

$$q(t) := \frac{1}{t}\int_0^t (1 - F_\mu(s))\, ds = \frac{1}{\mu t}(1 - e^{-\mu t}),$$

où F_μ est la fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}(\mu)$. On obtient donc, par indépendance des atomes, pour tout $k \in \mathbb{N}$ [1],

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_t = k) &= \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(X_t = k | N_t = n)\mathbb{P}(N_t = n) \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} C_n^k q(t)^k (1 - q(t))^{n-k} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \\
&= e^{\lambda t q(t)} \frac{(\lambda t q(t))^k}{k!}.
\end{aligned}$$

On en déduit donc que la loi de X_t sachant que $X_0 = 0$ est la loi de Poisson de paramètre $\lambda(1 - e^{-\mu t})/\mu$.

Remarque 4.4. Si les temps de désintégration des atomes instables ne sont plus de loi exponentielle mais sont i.i.d. de fonction de répartition F, on montre de même que la loi de X_t sachant que $X_0 = 0$ est une loi de Poisson de paramètre $\lambda \int_0^t (1 - F(s))\, ds$.

De manière plus générale, on peut aussi calculer, comme dans la section précédente, la loi de X_t sachant que $X_0 = k$, pour $k \in \mathbb{N}^*$. Il suffit de remarquer que, puisque les temps de désintégration des atomes sont indépendants et de loi exponentielle (absence de mémoire), la loi de X_t sachant que $X_0 = k$ est la convolution de la loi de X_t sachant que $X_0 = 0$ et de la loi du nombre d'atomes non encore désintégrés à l'instant t parmi les k atomes initiaux. On retrouve ainsi le résultat du corollaire 4.3.

5 Mesure invariante et entropie relative

Pour toute loi initiale de X_0, la loi de X_t converge vers la loi de Poisson de paramètre λ/μ lorsque $t \to \infty$. On souhaite ici quantifier la vitesse de convergence.

1. étant sous-entendu que $X_0 = 0$

Définition 5.1. Soit ν_1 et ν_2 deux mesures de probabilité sur $\mathbb{R}$. La relation $\nu_1 << \nu_2$ signifie que ν_1 est absolument continue par rapport à ν_2. Si tel est le cas, on note alors $\frac{d\nu_1}{d\nu_2}$ la densité de ν_1 par rapport à ν_2. On définit l'entropie relative de ν_1 par rapport à ν_2 de la façon suivante :

$$\mathbf{Ent}(\nu_1 \,|\, \nu_2) := \begin{cases} \displaystyle\int \frac{d\nu_1}{d\nu_2} \log\left(\frac{d\nu_1}{d\nu_2}\right) d\nu_2 = \int \log\left(\frac{d\nu_1}{d\nu_2}\right) d\nu_1 & \text{si } \nu_1 << \nu_2, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

Proposition 5.2. *Soit ν_1 et ν_2 deux mesures de probabilité sur $\mathbb{R}$. Alors $\mathbf{Ent}(\mu_1 \,|\, \mu_2)$ est positif (ou égal à $+\infty$) et nul si et seulement si $\nu_1 = \nu_2$.*

En calculant la densité de la loi de X_t sachant X_0 par rapport à la loi $\mathcal{P}(\lambda/\mu)$, on obtient alors :

Corollaire 5.3. *L'entropie relative de la loi de X_t sachant que $X_0 = 0$ par rapport à la mesure invariante $\mathcal{P}(\lambda/\mu)$ converge exponentiellement vite vers 0.*

6 Chaîne de Markov et estimation

Les atomes instables sont dénombrés par un compteur de type Geiger qui ne peut pas fonctionner en temps continu mais fournit des observations à des instants réguliers espacés de $\alpha > 0$. On définit la suite de variables aléatoires $\left(Y_n^{(\alpha)}\right)_{n\in\mathbb{N}} := (X_{\alpha n})_{n\in\mathbb{N}}$. Le corollaire 4.3 assure que $\left(Y_n^{(\alpha)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov homogène d'espace d'états $\mathbb{N}$, définie par sa loi initiale et la relation

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{L}\left(Y_{n+1}^{(\alpha)} \middle| Y_n^{(\alpha)} = k\right) = \mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{\mu}(1 - e^{-\mu\alpha})\right) * \mathcal{B}(k, e^{-\mu\alpha}),$$

avec la convention $\mathcal{B}(0, e^{-\mu\alpha}) = \delta_0$.

Proposition 6.1. *La chaîne de Markov $\left(Y_n^{(\alpha)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est irréductible, récurrente positive et apériodique. De plus, elle admet pour mesure de probabilité invariante la loi de Poisson de paramètre λ/μ.*

Remarque 6.2. Cette proposition permet d'estimer λ/μ à partir de $\left(Y_k^{(\alpha)}\right)_{1\leqslant k\leqslant n}$ grâce au théorème ergodique. Des intervalles de confiance asymptotiques peuvent être obtenus en précisant la vitesse de convergence dans ce théorème ergodique.

Proposition 6.3. *Il existe $\sigma^2(\alpha) > 0$ tel que*

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^{(\alpha)} - \frac{\lambda}{\mu}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(\alpha)).$$

Remarque 6.4. On peut de plus remarquer que $\alpha \mapsto \sigma^2(\alpha)$ est croissante et non nulle en 0. De plus

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^{(\alpha)} \xrightarrow[\alpha\to 0, \alpha n = t]{p.s.} \frac{1}{t}\int_0^t X_s\, ds,$$

qui est l'estimateur de λ/μ construit à partir de l'observation du processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$, et non plus seulement aux instants $\alpha\mathbb{N}$. On peut alors prouver un résultat analogue à celui de la proposition 6.3 :

$$\sqrt{t}\left(\frac{1}{t}\int_0^t X_s\, ds - \frac{\lambda}{\mu}\right) \xrightarrow[t\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(0)).$$

7 Suggestions

1. On pourra présenter et commenter le modèle.
2. On pourra démontrer la proposition 3.1.
3. On pourra déterminer par la méthode de son choix la loi de X_t sachant que $X_0 = k$ pour $k \in \mathbb{N}$.
4. On pourra démontrer la proposition 5.2, calculer l'entropie relative de $\mathcal{L}(X_t|X_0 = 0)$ par rapport à $\mathcal{P}(\lambda/\mu)$ et en déduire le corollaire 5.3.
5. On pourra démontrer la proposition 6.1.
6. On pourra détailler la remarque 6.2.
7. On pourra illustrer par la simulation la proposition 6.3 et l'utiliser pour préciser l'estimation de λ/μ.
8. On pourra commenter et illustrer par la simulation la remarque 6.4. Perd-on beaucoup d'informations en n'observant pas la trajectoire à tout instant $t > 0$?