MARTINGALES

Préparation à l'agrégation externe de Mathématiques de l'université Rennes 1[1]
Année 2008/2009

1. EQUI-NTEGRABILITE

Les propriétés de cette section sont valables pour toute suite de v.a.r.

Définition 1.1 *Une famille $(X_i)_{i\in I}$ de v.a.r. est dite équi-intégrable (EI) ou uniformément intégrable si*

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{i\in I} \mathbb{E}[|X_i|\mathbf{1}_{(|X_i|\geq k)}] = 0.$$

Propriétés 1.1
(1.) Si $(X_i)_{i\in I}$ est EI, elle est aussi bornée dans L_1 ;
(2.) Si il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\sup_{i\in I} \mathbb{E}[|X_i|^{1+\varepsilon}] < \infty$, $(X_i)_{i\in I}$ est EI;
(3.) Si $\sup_{i\in I} |X_i| \in L_1$, $(X_i)_{i\in I}$ est EI;
(4.) Pour toute v.a.r. intégrable Z, la famille $\{\mathbb{E}[Z|\mathcal{B}],\ \mathcal{B}$ sous-tribu$\}$ est EI.

Le résultat fondamental suivant s'apparente à un théorème de type "convergence dominée" :

Théorème 1.1 *Soient $(X_n)_n$ et X des v.a.r. Si $X_n \xrightarrow{P} X$, on a : $(X_n)_n$ est EI $\Longleftrightarrow X_n \xrightarrow{L_1} X$.*

2. CONVERGENCE L_1 DES MARTINGALES

Théorème 2.1 *Soit $(X_n)_n$ une sous-martingale. Alors, $(X_n)_n$ est EI $\Longleftrightarrow (X_n)_n$ converge dans $L_1 \Longleftrightarrow (X_n)_n$ converge p.s. et dans L_1.*

La martingale de Galton-Watson $(Z_n/m^n)_{n\geq 0}$ (cf complément de cours : Espérance conditionnelle - Introduction aux martingales) est EI si la loi de reproduction est de carré intégrable et $m > 1$: en effet, on peut montrer que $\mathbb{E}Z_{n+1}^2 = \mathrm{var}(\xi) + m^2\mathbb{E}Z_n^2$, et donc que $(Z_n/m^n)_{n\geq 0}$ est borné dans L_2. Il existe donc une v.a.r. intégrable W (non nulle) telle que l'on ait p.s. : $Z_n \sim m^n W$.

Théorème 2.2 *Soit $(X_n)_n$ une $(\mathcal{F}_n)_n$-sous-martingale EI et X_∞ sa limite. Alors $\forall n$: $X_n \leq \mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_n]$ p.s.*

Lorsque $(X_n)_n$ est une martingale EI, on a donc $X_n = \mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_n]$ p.s. et pour chaque n : on dit que la martingale $(X_n)_n$ est *fermée*. En tant que martingale EI, la martingale de Doob est convergente p.s. et dans L_1. On peut préciser la limite :

Théorème 2.3 [Doob] *Soit Z une v.a.r. intégrable, $(\mathcal{F}_n)_n$ une filtration complétée et $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_n \mathcal{F}_n)$. Alors,*

$$\mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_n] \overset{p.s., L_1}{\longrightarrow} \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_\infty].$$

Pour le critère quadratique, $\mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_n]$ est la meilleure approximation de Z sachant $\mathcal{F}_n$. On ne peut donc espérer récupérer la totalité de l'information que si Z est $\mathcal{F}_\infty$-mesurable, car alors $\mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_\infty] = Z$ p.s.

3. TEMPS D'ARRET

Dans ce qui suit, les filtrations seront supposées complétées et pour une filtration $(\mathcal{F}_n)_n$, on notera $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_n \mathcal{F}_n)$.

Définition 3.1 *Soit $(\mathcal{F}_n)_n$ une filtration. Une v.a. T à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ est un $(\mathcal{F}_n)_n$-temps d'arrêt (t.a.) si $\forall n$, $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ ou bien, de façon équivalente, si $\forall n$, $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.*

Noter que, alors, $\{T = \infty\} \in \mathcal{F}_\infty$.

[1]Benoît Cadre - ENS Cachan Bretagne

Exemples 3.1

- Une v.a. entière et p.s. constante est un t.a. pour toute filtration ;
- INSTANT DE 1ÈRE ENTRÉE DANS UN BORÉLIEN. Soit $(X_n)_n$ un processus $(\mathcal{F}_n)_n$-adapté et B un borélien de $\mathbb{R}$. Avec la convention $\inf \emptyset = \infty$, la v.a. $T = \inf(n : X_n \in B)$ est un $(\mathcal{F}_n)_n$-t.a.
- ... SUITE. En revanche, si k est un entier fixé et en adoptant la convention $\sup \emptyset = 0$, $S = \sup(n \leq k : X_n \in B)$ n'est en général pas un t.a.

Propriétés 3.1 *Soient S, T deux $(\mathcal{F}_n)_n$-t.a. Alors $S \vee T$, $S \wedge T$ et $S + T$ sont des $(\mathcal{F}_n)_n$-t.a.*

Définition-Proposition 3.2 *Soit T un $(\mathcal{F}_n)_n$-t.a. On note*

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n, \forall n\} = \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n, \forall n\}.$$

La classe d'événements $\mathcal{F}_T$ est une tribu, appelée tribu des événements antérieurs à T.

Noter que $\sigma(T) \subset \mathcal{F}_T$, l'égalité étant fausse en général. Il faut comprendre cette tribu de la manière suivante : si $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ est la filtration naturelle du processus $(X_n)_{n\geq 0}$ et T est un t.a. relatif à cette filtration, l'information contenue dans $\mathcal{F}_T$ comprend, d'une part, la valeur de T et d'autre part, les valeurs de $X_0, \cdots, X_T$.

Propriétés 3.2 *Soient S, T deux $(\mathcal{F}_n)_n$-t.a. Alors, $\mathcal{F}_{S\wedge T} = \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$ et en particulier, si $S \leq T$, $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.*

Propriété 3.3 *Soit $(X_n)_n$ un processus $(\mathcal{F}_n)_n$-adapté et T un $(\mathcal{F}_n)_n$-t.a. p.s. fini. On note X_T l'application définie pour chaque $\omega \in \Omega$ par $X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega)$. Alors X_T est une v.a.r. $\mathcal{F}_T$-mesurable.*

Définition 3.3 *Soit $(X_n)_n$ un processus $(\mathcal{F}_n)_n$-adapté et T un $(\mathcal{F}_n)_n$-t.a. On appelle processus arrêté à l'instant T le processus $X^T = (X_n^T)_n$ défini pour chaque n par $X_n^T = X_{n\wedge T}$.*

Il faut remarquer ici que pour chaque n, X_n^T est $\mathcal{F}_{n\wedge T}$-mesurable et donc $\mathcal{F}_n$-mesurable.

4. THEOREMES D'ARRET POUR LES MARTINGALES

Théorème 4.1 [THÉORÈME D'ARRÊT 1] *Soit $(X_n)_n$ une $(\mathcal{F}_n)_n$-sous-martingale et S, T deux $(\mathcal{F}_n)_n$-t.a. bornés tels que $S \leq T$. Alors, $X_S, X_T \in L_1$ et de plus, $\mathbb{E}[X_T|\mathcal{F}_S] \geq X_S$ p.s.*

Exercice 4.1 Soit $\mathbf{S} = (S_n)_{n\geq 0}$, la marche aléatoire simple symétrique issue de 0 et définie sur les entiers relatifs, et T le temps de 1er retour dans l'état 1. En utilisant le théorème ci-dessus, montrer que $T < \infty$ p.s.

Dans cet exemple, on a donc $1 = \mathbb{E}S_T \neq \mathbb{E}S_0 = 0$: ainsi, dans le théorème précédent, l'hypothèse de bornitude des t.a. est nécessaire. Lorsque ce n'est pas le cas, il faut pouvoir préciser le comportement asymptotique de la martingale.

Pour un processus $(X_n)_n$ qui converge, on note X_∞ sa limite et on convient que $X_T = X_\infty$ sur l'événement $\{T = \infty\}$.

Théorème 4.2 [THÉORÈME D'ARRÊT 2] *Soit $(X_n)_n$ une $(\mathcal{F}_n)_n$-sur-martingale, et S, T deux $(\mathcal{F}_n)_n$-t.a. -finis ou non- tels que $S \leq T$ p.s. Alors,*

(i) si $X_n \geq 0$ p.s. et pour chaque n, $\mathbf{1}_{\{S<\infty\}} X_S \geq \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{T<\infty\}} X_T|\mathcal{F}_S]$ p.s. ;

(ii) si $(X_n)_n$ est EI, $X_S \geq \mathbb{E}[X_T|\mathcal{F}_S]$ p.s.

Dans les deux cas, $X_U \in L_1$ pour tout $(\mathcal{F}_n)_n$-t.a. U.

Une conséquence -très anecdotique- de ce théorème est que si $(X_n)_n$ est une $(\mathcal{F}_n)_n$-martingale EI, la famille de v.a.r. $\{X_T, T \text{ un } (\mathcal{F}_n)_n\text{-t.a.}\}$ est EI.

Exercice 4.2 [RUINE DU JOUEUR] Un joueur joue à pile ou face avec une pièce équilibrée. Si il fait "pile" (resp. "face"), il gagne 1$ (resp. perd 1$). Il s'arrête de jouer lorsque son gain vaut 0 ou $m \geq 1$. Sa fortune avant de commencer le jeu est $0 \leq k \leq m$. Calculer la loi du gain lorsque la partie est terminée.

5. DECOMPOSITION DE DOOB

Définition 5.1 *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ un processus stochastique et $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ une filtration. On dit que $(X_n)_{n\geq 0}$ est $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$-prévisible si, pour tout $n \geq 0$, X_n est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable (avec la convention $\mathcal{F}_{-1} = \{\emptyset, \Omega\}$).*

En clair, le processus $(X_n)_{n\geq 0}$ est $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$-*prévisible* si, à l'instant n, l'information disponible $\mathcal{F}_n$ permet de connaître la valeur prise par X_{n+1} : on peut donc "prédire" la valeur future.

Théorème 5.1 [Décomposition de Doob] *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ un processus $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$-adapté tel que $\mathbb{E}|X_n| < \infty$ $\forall n$. Il existe une décomposition unique de $(X_n)_{n\geq 0}$ sous la forme $X_n = X_0 + M_n + A_n$ p.s. pour tout n, avec :*

- *$(M_n)_{n\geq 0}$ une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$-martingale et $(A_n)_{n\geq 0}$ un processus $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$-prévisible tels que $M_0 = A_0 = 0$ p.s. ;*
- *$(A_n)_{n\geq 0}$ est croissant (resp. décroissant) si, et seulement si $(X_n)_{n\geq 0}$ est une sous-martingale (resp. sur-martingale).*

Remarque 5.1 En pratique, on calcule $(A_n)_n$ par récurrence, en utilisant la formule $A_{n+1} - A_n = \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] - X_n$.

Le théorème 5.1 est souvent utilisé sous la forme suivante : si $\mathbf{Y} = (Y_n)_{n\geq 0}$ est une martingale de carré intégrable, $(Y_n^2)_{n\geq 0}$ est une sous-martingale. Le processus prévisible et croissant $(A_n)_{n\geq 0}$ intervenant dans la décomposition de Doob de $(Y_n^2)_{n\geq 0}$ est appelé *crochet* de la martingale $\mathbf{Y}$, et est noté $< \mathbf{Y} >_n$. En particulier, si $Y_0 = 0$, on a la relation $\mathbb{E}Y_T^2 = \mathbb{E} < \mathbf{Y} >_T$, pour tout t.a. borné T.

Exercice 5.1 Soient $\xi_1, \xi_2, \cdots$ des v.a.r.i.i.d. dont la loi est de carré intégrable, et $\mathbf{M} = (M_n)_{n\geq 0}$ le processus défini par $M_0 = 0$ et $M_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ pour $n \geq 1$.

a. Calculer $< \mathbf{M} >$, lorsque ξ est centrée.

b. Dans le contexte de l'exercice 4.1, en déduire que $T \notin L^1$.

c. Soit S un t.a. pour $\mathbf{M}$, avec $\mathbb{E}S < \infty$. Montrer l'identité de Wald : $\mathbb{E}M_S = \mathbb{E}S\,\mathbb{E}\xi$.

Exercice 5.2 Deux joueurs, André et Berthe, jouent simultanément à pile ou face, chacun avec sa propre pièce, qui est équilibrée. Les joueurs lancent la pièce, jusqu'à ce que l'un d'entre eux ait fait r piles de plus que son adversaire. Il est alors déclaré vainqueur de la partie. Montrer que le nombre de jeux d'une partie est fini, et même intégrable. Calculer le nombre moyen de jeux.

A titre de complément, et pour bien voir à quel point la convergence des martingales de carrés intégrables est liée à celle de leur crochet :

Théorème 5.2 [LFGN pour les martingales] *Soit $\mathbf{X} = (X_n)_{n\geq 0}$ une martingale de carré intégrable. Alors,*

(i) Pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \{< \mathbf{X} >_\infty < \infty\}$, la suite $(X_n(\omega))_{n\geq 0}$ converge.

(ii) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante telle que $\int_0^\infty (1+f(x))^{-2}dx < \infty$. Pour $\mathbb{P}$-presque toute éventualité $\omega \in \{< \mathbf{X} >_\infty = \infty\}$:

$$\frac{X_n(\omega)}{f(< \mathbf{X} >_n (\omega))} \to 0.$$

REFERENCES

• P. Billingsley, *Probability and Measure, 3rd Edition*, Wiley, 1995.
• D. Dacunha-Castelle et M. Duflo, *Probabilités et statistiques - Tome 2 : Problèmes à temps mobile (Cours et Exercices)*, Masson, 1983.
• D. Foata et A. Fuchs, *Processus stochastiques - Processus de Poisson, chaînes de Markov et martingales*, Dunod, 2002.
• J. Neveu, *Martingales à temps discret*, Masson, 1972.
• J.-Y. Ouvrard, *Probabilités 2 : maîtrise agrégation*, Cassini, 2001.
• D. Williams, *Probability with martingales*, Cambridge University Press, 1991.