

---

## Chaînes de Markov à temps continu

---

L'essentiel de ces notes provient de [Nor97], qui bien qu'en anglais, est très facile à lire et contient de nombreux exemples.

### 1 Lois exponentielles

**Définition 1.** Une variable aléatoire  $T$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda \geq 0$ , notée  $\mathcal{E}(\lambda)$  si sa fonction de répartition est donnée par  $F(t) = (1 - e^{-\lambda t})\mathbf{1}_{t \geq 0}$  (si  $\lambda = 0$ ,  $T$  vaut  $+\infty$  presque sûrement).

Sa loi admet  $t \mapsto \lambda e^{-\lambda t} \mathbf{1}_{\{t > 0\}}$  pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue. De plus,

$$\mathbb{E}(T) = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathbb{V}(T) = \frac{1}{\lambda^2} \quad \text{et, pour } t < \lambda \quad \mathbb{E}(e^{tT}) = \frac{\lambda}{\lambda - t}.$$

**Proposition 2** (Absence de mémoire). *Une variable aléatoire  $T$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$  suit une loi exponentielle si et seulement si elle vérifie la propriété d'absence de mémoire :*

$$\forall s, t \geq 0, \quad \mathbb{P}(T > t + s | T > s) = \mathbb{P}(T > t).$$

**Proposition 3.** *Soit  $(S_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes de lois exponentielles de paramètres respectifs  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$  strictement positifs.*

si  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\lambda_n} < \infty$  alors  $\mathbb{P}\left(\sum_{n \geq 1} S_n < \infty\right) = 1$  et si  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\lambda_n} = \infty$  alors  $\mathbb{P}\left(\sum_{n \geq 1} S_n = \infty\right) = 1$ .

*Démonstration.* Si  $\sum_{n \geq 1} 1/\lambda_n$  est fini alors, par convergence monotone, la variable aléatoire  $\sum_{n \geq 1} S_n$  est intégrable donc elle est finie p.s.

Si  $\sum_{n \geq 1} 1/\lambda_n$  est infini alors  $\prod_{n \geq 1} (1 + 1/\lambda_n)$  est infini et

$$\mathbb{E}\left(\exp\left\{-\sum_{n \geq 1} S_n\right\}\right) = \prod_{n \geq 1} \mathbb{E}(\exp\{-S_n\}) = \prod_{n \geq 1} (1 + 1/\lambda_n)^{-1} = 0$$

par convergence monotone et indépendance. □

**Proposition 4.** *Soit  $I$  un ensemble (au plus) dénombrable et  $(T_k)_{k \in I}$  des variables aléatoires exponentielles de paramètres respectifs  $(\lambda_k)_{k \in I}$  vérifiant  $\lambda = \sum_{k \in I} \lambda_k < \infty$ . Soit  $T = \inf_{k \in I} T_k$ . Alors, avec probabilité 1, l'infimum est atteint en un unique  $K$  (aléatoire) élément de  $I$ . De plus,  $T$  et  $K$  sont indépendantes,  $T$  suit la loi  $\mathcal{E}(\lambda)$  et pour tout  $k \in I$ ,  $\mathbb{P}(K = k) = \lambda_k/\lambda$ .*

*Démonstration.* Soit  $k \in I$  et  $t \geq 0$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(K = k, T \geq t) &= \mathbb{P}(T_k \geq t, T_j > T_k, j \neq k) \\ &= \int_t^\infty \lambda_k e^{-\lambda_k s} \mathbb{P}(T_j > s, j \neq k) ds \\ &= \int_t^\infty \lambda_k e^{-\lambda_k s} \prod_{j \neq k} e^{-\lambda_j s} ds \\ &= \int_t^\infty \lambda_k e^{-\lambda s} ds = \frac{\lambda_k}{\lambda} e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

On conclut en remarquant que les ensembles  $\{K = k\} \times \{T \geq t\}$  engendrent la tribu produit.  $\square$

**Exercice 5.** Soit  $(T_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi  $\mathcal{E}(\lambda)$  et  $N$  une variable aléatoire indépendante de loi géométrique de paramètre  $\beta$ . Montrer que  $T = \sum_{n=1}^N T_n$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda\beta$ .

## 2 Chaînes de Markov à temps continu

On s'intéresse à des processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  indexés par le temps continu  $t \in \mathbb{R}_+$  à valeurs dans un espace fini ou dénombrable  $I$ . Une trajectoire du processus est donc une fonction  $t \mapsto X_t(\omega)$  de  $\mathbb{R}_+$  dans  $I$  qui dépend d'un aléa  $\omega$ , tout comme une trajectoire d'une chaîne de Markov  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite  $(Y_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans  $I$  qui dépend de l'aléa  $\omega$ . On supposera dans toute la suite que les trajectoires de  $X$  sont continues à droite : pour (presque tout)  $\omega$  et tout  $t \geq 0$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que

$$\forall s \in [t, t + \varepsilon], \quad X_s(\omega) = X_t(\omega).$$

Pour une trajectoire donnée, trois comportements différents sont alors possibles :

1. la trajectoire devient constante à partir d'un certain instant,
2. la trajectoire possède un nombre infini de sauts sur  $\mathbb{R}_+$  mais seulement un nombre fini sur tout intervalle compact,
3. la trajectoire possède un nombre infini de sauts dans un intervalle de temps compact. Il existe alors un temps d'explosion  $\zeta$  fini. Après ce premier instant d'explosion, la trajectoire peut repartir, exploser à nouveau ou non...

Dans toute la suite, nous considérons les processus jusqu'à leur premier temps d'explosion. On parle alors de processus minimal.

On appelle  $J_0, J_1, \dots$  les **temps de saut** de  $(X_t)_{t \geq 0}$  et  $S_1, S_2, \dots$  les **temps d'attente**. Ils se déduisent de  $(X_t)_{t \geq 0}$  par les relations

$$J_0 = 0, \quad J_{n+1} = \inf \{t \geq J_n ; X_t \neq X_{J_n}\},$$

pour  $n \in \mathbb{N}$  avec la convention  $\inf \emptyset = +\infty$  et pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$S_n = \begin{cases} J_n - J_{n-1} & \text{si } J_{n-1} < \infty, \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Remarque 6.* La propriété de continuité à droite assure que  $S_n > 0$  pour tout  $n$ . Si  $J_{n+1} = \infty$  alors on peut définir  $X_\infty = X_{J_n}$ , sinon,  $X_\infty$  n'est pas défini. Le (premier) **temps d'explosion**  $\zeta$  est défini par

$$\zeta = \sup_n J_n = \sum_{n=1}^{\infty} S_n.$$

Le processus à temps discret  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  défini par  $Y_n = X_{J_n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  est appelée **chaîne incluse**. Il représente la suite des valeurs prises par  $(X_t)_{t \geq 0}$ .

**Définition 7.** Soit  $I$  un espace dénombrable. Un **générateur** sur  $I$  est une matrice  $Q = (q_{ij})_{i,j \in I}$  vérifiant

1. pour tout  $i \in I$ ,  $0 \leq -q_{ii} < \infty$ ,
2. pour tous  $i \neq j$ ,  $q_{ij} \geq 0$ ,
3. pour tout  $i \in I$ ,  $\sum_{j \in I} q_{ij} = 0$ .

On notera  $q_i = q(i) = -q_{ii}$  pour tout  $i \in I$ .

À un générateur  $Q$ , on associe la matrice de saut  $\Pi = (\pi_{ij})_{i,j \in I}$  donnée par

$$\pi_{ij} = \begin{cases} q_{ij}/q_i & \text{si } j \neq i \text{ et } q_i \neq 0, \\ 0 & \text{si } j \neq i \text{ et } q_i = 0, \end{cases}$$

$$\pi_{ii} = \begin{cases} 0 & \text{si } q_i \neq 0, \\ 1 & \text{si } q_i = 0. \end{cases}$$

*Remarque 8.* La matrice  $\Pi$  est stochastique : ces coefficients sont positifs et leur somme sur chaque ligne vaut 1.

Une chaîne de Markov à temps continu  $(X_t)_{t \geq 0}$  est déterminée par une mesure  $\lambda$  sur  $I$  (identifiée à un vecteur ligne) et un générateur  $Q$ . La mesure  $\lambda$  détermine la distribution initiale (c'est la loi de  $X_0$ ) et la matrice  $Q$  détermine la dynamique de la chaîne. On peut décrire de deux manières équivalentes la dynamique de  $(X_t)_{t \geq 0}$ .

La première description se fait par l'intermédiaire de la chaîne incluse et des temps d'attente.

**Définition 9.** Le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  est une chaîne de Markov à temps continu de générateur  $Q$  si

1.  $(Y_n)_{n \geq 0}$  est une chaîne de Markov à temps discret de loi initiale  $\lambda$  et de matrice de transition  $\Pi$ ,
2. conditionnellement à  $Y_0 = i_0, \dots, Y_{n-1} = i_{n-1}$ , les temps d'attente  $S_1, \dots, S_n$  sont des variables aléatoires exponentielles indépendantes de paramètres respectifs  $q_{i_0}, \dots, q_{i_{n-1}}$ .

Plus simplement, sachant que la chaîne  $X$  est issue de  $i$ , elle y reste un temps exponentiel de paramètre  $q_i$  puis saute à un nouvel état, en choisissant l'état  $j$  avec probabilité  $\pi_{ij}$ . Elle oublie ensuite ce qui s'est passé, attend un nouveau temps exponentiel de paramètre  $q_j$  (indépendant du précédent)....

La second description est l'analogie de la définition à temps discret. Notons  $p_{ij}(t) = \mathbb{P}(X_t = j | X_0 = i)$ .

**Définition 10.** Le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  est une chaîne de Markov à temps continu si, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , tous  $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n+1}$  et tous états  $i_0, \dots, i_{n+1}$ ,

$$\mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} | X_{t_0} = i_0, \dots, X_{t_n} = i_n) = p_{i_n i_{n+1}}(t_{n+1} - t_n).$$

**Théorème 11** (Propriété de Markov). Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  une chaîne de Markov à temps continu de générateur  $Q$ . Alors, conditionnellement à  $X_s = i$ ,  $(X_{s+t})_{t \geq 0}$  est une chaîne de Markov à temps continu de générateur  $Q$  issue de  $i$  et indépendante de  $(X_r)_{0 \leq r \leq s}$ .

*Remarque 12.* Pour tout  $t \geq 0$ ,  $P(t) = (p_{ij}(t))_{ij}$  est une matrice stochastique et  $t \mapsto P(t)$  vérifie la propriété dite de semi-groupe suivante :

$$P(t+s) = P(t)P(s) \quad \text{et} \quad P(0) = Id.$$

En effet, pour tous  $i, j$  dans  $I$ ,

$$\begin{aligned} p_{ij}(t+s) &= \sum_{k \in I} \mathbb{P}(X_{t+s} = j, X_t = k | X_0 = i) = \sum_{k \in I} \mathbb{P}(X_{t+s} = j | X_0 = i, X_t = k) \mathbb{P}(X_t = k | X_0 = i) \\ &= \sum_{k \in I} p_{kj}(s) p_{ik}(t) = (P(t)P(s))_{ij}. \end{aligned}$$

*Remarque 13.* On peut montrer qu'il y a une bijection entre générateurs et semi-groupes en toute généralité. Si  $I$  est de cardinal fini, le lien est explicite : si  $Q$  est un générateur alors  $(P(t))_{t \geq 0}$  défini par, pour tout  $t \geq 0$ ,

$$P(t) = e^{tQ} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} Q^n,$$

est un semi-groupe. Si  $(P(t))_{t \geq 0}$  est un semi-groupe, il existe un générateur  $Q$  tel que, pour tout  $t \geq 0$ ,  $P(t) = \exp(tQ)$ .

### 3 Processus de Poisson

**Exercice 14** (Processus de Poisson, avec des oiseaux). Des rouges-gorges (robins) et des merles (blackbirds), oiseaux solitaires lorsqu'ils cherchent de la nourriture, se posent parfois sur ma terrasse. Pour tout intervalle de temps petit de longueur  $h$ , un rouge-gorge se pose avec probabilité  $\beta h + o(h)$  et un merle se pose avec probabilité  $\rho h + o(h)$ . Quelle est la probabilité que les deux premiers oiseaux qui se posent soient des rouges-gorges ? Quelle est la loi du nombre total d'oiseaux qui se sont posés avant le temps  $t$  ? Sachant que ce nombre est  $n$ , quelle est la loi du nombre de merles qui se sont posés avant le temps  $t$  ?

### 4 Processus de naissance

Un processus de naissance est une généralisation du processus de Poisson dans laquelle le paramètre  $\lambda$  peut dépendre de l'état courant du processus. Les paramètres d'un processus de naissance sont les taux de naissances  $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$  supposés à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ .

**Définition 15.** Un processus de continu à droite  $(X_t)_{t \geq 0}$  à valeurs dans  $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$  est processus de naissance de taux  $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$  si, conditionnellement à  $X_0 = i$ , ses temps d'attente  $S_1, S_2, \dots$  sont des variables aléatoires indépendantes de lois exponentielles de paramètres respectifs  $q_i, q_{i+1}, \dots$ , et sa chaîne de saut est donnée par  $Y_n = i + n$ .

*Remarque 16.* Pour le processus de Poisson la suite  $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est constante égale à  $\lambda$ .

**Exemple 17** (Croissance d'une colonie de bactéries). Chaque bactérie dans une colonie se divise en deux bactéries identiques après un temps exponentiel de paramètre  $\lambda$  et ce indépendamment des autres. Si  $i$  individus sont présents alors la première division apparaît après un temps exponentiel de paramètre  $\lambda i$ . Il y a alors  $i + 1$  bactéries et, par la propriété d'absence de mémoire, les horloges des bactéries sont remises à zéros. Soit  $X_t$  la taille de la colonie au temps  $t$  et supposons que  $X_0 = 1$ . Soit  $T$  le temps de la première naissance. Alors

$$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_t \mathbf{1}_{\{T \leq t\}}) + \mathbb{E}(X_t \mathbf{1}_{\{T > t\}}) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} \mathbb{E}(X_t | T = s) ds + e^{-\lambda t}.$$

Soit  $\mu(t) = \mathbb{E}(X_t)$  alors  $\mathbb{E}(X_t | T = s) = 2\mu(t - s)$  pour  $0 \leq s \leq t$  donc  $\mu$  vérifie l'équation fonctionnelle

$$\mu(t) = e^{-\lambda t} + \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} \mu(t - s) ds,$$

qui peut encore s'écrire grâce au changement de variables  $r = t - s$

$$e^{\lambda t} \mu(t) = 2\lambda \int_0^t e^{\lambda r} \mu(r) dr.$$

La fonction  $\mu$  est donc solution de l'équation différentielle  $\mu'(t) = \lambda \mu(t)$ , avec la condition initiale  $\mu(0) = 1$ . Ceci assure donc que  $\mathbb{E}(X_t) = e^{\lambda t}$  : la taille de la population croît exponentiellement vite (mais n'explose pas en temps fini).

La principale différence entre le processus de Poisson et un processus de naissance général est la possibilité qu'a le second d'exploser. Il est très facile de caractériser les processus qui explosent grâce de la proposition 3. Remarquons qu'un processus de naissance explose si et seulement si il tend vers  $+\infty$  en temps fini.

**Théorème 18.** Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  un processus de naissance de taux  $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$  issu de 0.

$$\text{Si } \sum_{i \geq 0} \frac{1}{q_i} < \infty \text{ alors } \mathbb{P}(\zeta < \infty) = 1 \text{ et si } \sum_{i \geq 0} \frac{1}{q_i} = \infty \text{ alors } \mathbb{P}(\zeta = \infty) = 1.$$

**Théorème 19.** Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  un processus croissant, continu à droite à valeurs dans  $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . Soit  $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite de réels positifs. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. conditionnellement à  $X_0 = i$ , les temps d'attente  $S_1, S_2, \dots$  sont des variables aléatoires indépendantes de lois exponentielles de paramètres respectifs  $q_i, q_{i+1}, \dots$  et la chaîne de saut est donnée par  $Y_n = i + n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ;

2. pour tout  $t, h \geq 0$ , conditionnellement à  $X_t = i$ ,  $X_{t+h}$  est indépendant de  $(X_r)_{0 \leq r \leq t}$  et, quand  $h$  décroît vers 0, uniformément en  $t$ ,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{t+h} = i | X_t = i) &= 1 - q_i h + o(h) \\ \mathbb{P}(X_{t+h} = i + 1 | X_t = i) &= q_i h + o(h) ;\end{aligned}$$

*Remarque 20.* Notons  $p_{ij}(t) = \mathbb{P}(X_t = j | X_0 = i)$ . On peut montrer grâce à la formulation 2. que  $P(t) = (p_{i,j}(t))_{i,j}$  est solution de

$$p'_{ij}(t) = -q_j p_{ij}(t) + q_{j-1} p_{i,j-1}(t)$$

que l'on peut écrire sous forme compacte  $P'(t) = P(t)Q$  où  $Q$  est le générateur

$$Q = \begin{pmatrix} -q_0 & q_0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -q_1 & q_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -q_2 & q_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

**Exercice 21** (Croissance d'une colonie de bactéries). On reprend l'exemple 17 de la colonie de bactéries.

1. Montrer que la fonction génératrice  $G(t, z) = \mathbb{E}(z^{X_t})$  vérifie l'équation fonctionnelle :

$$G(t, z) = ze^{-\lambda t} + \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} G(t-s, z)^2 ds.$$

On distinguera les deux cas :  $T \geq t$  et  $T < t$  où  $T$ , l'instant de première division, suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

2. Après avoir effectué le changement de variables  $u = t - s$  montrer que  $G$  est solution de l'équation différentielle

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t, z) = \lambda G(t, z)(G(t, z) - 1).$$

3. En déduire que pour  $q = 1 - e^{-\lambda t}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{P}(X_t = n) = q^{n-1}(1 - q)$ .

## 5 Classes

Les notions de classes sont les mêmes à temps continu et à temps discret. Plus précisément,  $(X_t)_{t \geq 0}$  a la même structure de classe que sa chaîne incluse  $(Y_n)_{n \geq 0}$ .

On dit que  $i$  mène à  $j$ , et on note  $i \rightarrow j$  si

$$\mathbb{P}_i(X_t = j, \text{ pour un certain temps } t \geq 0) > 0.$$

On dit que  $i$  et  $j$  communiquent, et on note  $i \leftrightarrow j$  si  $i \rightarrow j$  et  $j \rightarrow i$ .

**Théorème 22.** Pour deux états distincts  $i$  et  $j$ , les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $i \rightarrow j$ ,

2.  $i \rightarrow j$  pour la chaîne incluse,
3. il existe  $n \in \mathbb{N}$  et  $i_0, \dots, i_n$  dans  $I$  tels que  $q_{i_0 i_1} \dots q_{i_{n-1} i_n} > 0$ ,
4. pour tout  $t > 0$ ,  $p_{ij}(t) > 0$ ,
5. il existe  $t > 0$ ,  $p_{ij}(t) > 0$ .

*Démonstration.* Les implications 4.  $\Rightarrow$  5.  $\Rightarrow$  1.  $\Rightarrow$  2. découlent des définitions. Si 2. est vraie, il existe  $n \in \mathbb{N}$  et  $i_0, \dots, i_n$  dans  $I$  tels que  $\pi_{i_0 i_1} \dots \pi_{i_{n-1} i_n} > 0$ , ce qui implique 3. Si  $q_{ij} > 0$  alors

$$p_{ij}(t) \geq \mathbb{P}_i(J_1 \leq t, Y_1 = j, J_2 < t) = (1 - e^{-q_i t}) \pi_{ij} e^{-q_j t} > 0,$$

pour tout  $t > 0$ . Donc si 3. est vraie, alors

$$p_{ij}(t) \geq p_{i_0 i_1}(t/n) \dots p_{i_{n-1} i_n}(t/n) > 0$$

pour tout  $t > 0$  et 4. est établie. □

*Remarque 23.* Le point 4. montre que la situation est plus simple en temps continu qu'en temps discret. En temps continu, si  $i$  mène à  $j$  alors avec une probabilité strictement positive,  $X_t$  peut valoir  $j$  (sachant que  $X_0 = i$ ). En temps, si  $i$  mène à  $j$ , il faut parfois un certain temps avant que la chaîne issue de  $i$  atteigne  $j$  et des phénomènes de périodicité apparaissent. Par exemple, pour la marche aléatoire simple issue de 0, le temps d'atteinte de 4 sera supérieur ou égal à 4 et pair.

## 6 Temps d'atteinte et d'absorption

Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  une chaîne de Markov de générateur  $Q$ . Le temps d'atteinte d'un sous-ensemble  $A$  de  $I$  est la variable aléatoire  $D^A$  définie par

$$D^A(\omega) = \inf \{t \geq 0 ; X_t(\omega) \in A\}, \quad \text{avec la convention } \inf \emptyset = +\infty.$$

Si  $H^A$  est le temps d'atteinte de  $A$  pour la chaîne incluse, alors  $\{D^A < \infty\} = \{H^A < \infty\}$ , et sur cet ensemble, on a  $D^A = J_{H^A}$ .

**Exemple 24.** On considère la chaîne de générateur

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quel est le temps moyen mis par  $X$  pour atteindre 4 depuis 1? Notons  $k_i = \mathbb{E}_i(H^{\{4\}})$ . Partant de 1, on passe en moyenne en 1 un temps  $1/q_1 = 1/2$  puis on saute avec des probabilités égales en 2 ou 3. Donc

$$k_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}k_2 + \frac{1}{2}k_3.$$

De même

$$k_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}k_1 + \frac{1}{3}k_3, \quad k_3 = \frac{1}{9} + \frac{1}{3}k_1 + \frac{1}{3}k_2.$$

La résolution de ce système fournit la valeur  $k_1 = 17/12$ .

## 7 Récurrence et transience

**Définition 25.** Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  une chaîne de Markov de générateur  $Q$ .

1. L'état  $i$  est dit **récurrent** si  $\mathbb{P}_i(\{t \geq 0, X_t = i\})$  est non borné) = 1.
2. L'état  $i$  est dit **transient** si  $\mathbb{P}_i(\{t \geq 0, X_t = i\})$  est non borné) = 0.

*Remarque 26.* Si  $(X_t)_{t \geq 0}$  peut exploser en étant issu de  $i$ , alors  $i$  ne peut être récurrent.

**Théorème 27.** On a

1. si  $i$  est récurrent pour la chaîne incluse, alors  $i$  est récurrent pour  $X$  ;
2. si  $i$  est transient pour la chaîne incluse alors  $i$  est transient pour  $X$  ;
3. tout état est soit récurrent, soit transient ;
4. récurrence et transience sont des propriétés de classes.

*Démonstration.* Supposons que  $i$  soit récurrent pour  $Y$ . Si  $X_0 = i$ ,  $X$  n'explose pas, donc  $J_n$  tend vers  $+\infty$ . De plus,  $X_{J_n} = Y_n = i$  infiniment souvent et  $\{t \geq 0, X_t = i\}$  est non borné avec probabilité 1.

Supposons que  $i$  soit transient pour  $Y$ . Si  $X_0 = i$ , alors

$$N = \sup \{n \in \mathbb{N}, Y_n = i\} < +\infty \quad p.s.,$$

donc  $\{t \geq 0, X_t = i\}$  est borné par  $J_{N+1}$ , qui est fini avec probabilité 1 puisque  $Y$  n'a pas atteint de point absorbant avant le temps  $N$ .

Les points 3. et 4. se déduisent des résultats analogues sur  $Y$ . □

Comme en temps discret, on peut reformuler les notions de récurrence et transience en terme de temps de premier retour. On définit le temps  $T_i$  de **premier retour** de  $(X_t)_{t \geq 0}$  dans l'état  $i$  par

$$T_i(\omega) = \inf \{t \geq J_1(\omega) ; X_t(\omega) = i\}.$$

*Remarque 28.* Attention à ne pas confondre les temps de premier passage et de premier retour. Dans le second cas, on s'assure que l'on a quitté le point de départ.

**Théorème 29.** On a la dichotomie suivante :

1. si  $q_i = 0$  ou  $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) = 1$ , alors  $i$  est récurrent et  $\int_0^\infty p_{ii}(t) dt = \infty$ ,
2. si  $q_i > 0$  et  $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) < 1$ , alors  $i$  est transient et  $\int_0^\infty p_{ii}(t) dt < \infty$ .

*Démonstration.* Si  $q_i = 0$ , alors  $(X_t)_{t \geq 0}$  ne peut quitter  $i$  qui est donc récurrent. De plus,  $p_{ii}(t) = 1$  pour tout  $t \geq 0$  et  $\int_0^\infty p_{ii}(t) dt = \infty$ . Supposons que  $q_i > 0$ . Soit  $N_i$  le temps de premier retour en  $i$  pour la chaîne incluse  $(Y_n)_{n \geq 0}$ . Alors  $\mathbb{P}_i(N_i < \infty) = \mathbb{P}_i(T_i < \infty)$ . Comme  $i$  est récurrent pour  $Y$  ssi  $\mathbb{P}_i(N_i < \infty) = 1$ ,  $i$  est récurrent pour  $X$  si et seulement si  $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) = 1$ . De plus, en notant  $\pi_{ij}^{(n)} = (\Pi^n)_{ij}$ , on va montrer que

$$\int_0^\infty p_{ii}(t) dt = \frac{1}{q_i} \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{ii}^{(n)},$$

ce qui assure que  $i$  est récurrent ssi  $\int_0^\infty p_{ii}(t) dt$  est infini d'après le résultat correspondant pour la chaîne incluse. Pour établir la relation ci-dessus, on écrit, en discutant sur le nombre de sauts qui ont eu lieu avant le temps  $t$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty p_{ii}(t) dt &= \int_0^\infty \mathbb{E}_i(\mathbf{1}_{\{X_t=i\}}) dt = \mathbb{E}_i\left(\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{X_t=i\}} dt\right) \\ &= \mathbb{E}_i\left(\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{X_t=i\}} \sum_{n=0}^\infty \mathbf{1}_{\{J_n \leq t < J_{n+1}\}} dt\right) = \sum_{n=0}^\infty \mathbb{E}_i\left(\mathbf{1}_{\{Y_n=i\}} \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{J_n \leq t < J_{n+1}\}} dt\right) \\ &= \sum_{n=0}^\infty \mathbb{E}_i(S_{n+1} \mathbf{1}_{\{Y_n=i\}}) = \sum_{n=0}^\infty \mathbb{E}_i(S_{n+1} | Y_n = i) \mathbb{P}_i(Y_n = i) = \frac{1}{q_i} \sum_{n=0}^\infty \pi_{ii}^{(n)}, \end{aligned}$$

ce qui est le résultat annoncé.  $\square$

## 8 Mesures invariantes

On dit que  $\lambda$  est une mesure **invariante** pour  $X$  si

$$\lambda Q = 0.$$

*Remarque 30.* Une mesure  $\lambda$  est « invariante » ssi, si  $X_0$  suit la loi  $\lambda$ , alors  $X_t$  suit la loi  $\lambda$ . En effet, si  $X_0$  suit la loi  $\lambda$  alors  $X_t$  suit la loi  $\lambda P(t)$ . Cette mesure ne dépend pas du temps si  $(\lambda P(t))' = 0$ , c'est-à-dire si  $\lambda Q P(t) = 0$ . Or  $P(t)$  est une matrice inversible (penser à  $P(t) = e^{tQ}$ ) donc la loi de  $X_t$  est indépendante du temps ssi  $\lambda Q = 0$ .

On peut relier les mesures invariantes de  $X$  aux mesures invariantes de la chaîne incluse.

**Théorème 31.** Soit  $Q$  un générateur,  $\Pi$  sa matrice de saut et  $\lambda$  une mesure. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $\lambda$  est invariante ;
2.  $\mu \Pi = \mu$  avec  $\mu_i = \lambda_i q_i$ , c'est-à-dire que  $\mu$  est invariante pour la chaîne incluse.

*Démonstration.* On a, par définition,  $q_i(\pi_{ij} - \delta_{ij}) = q_{ij}$  pour tous  $i, j$  donc

$$(\mu(\Pi - Id))_j = \sum_{i \in I} \mu_i(\pi_{ij} - \delta_{ij}) = \sum_{i \in I} \lambda_i q_{ij} = (\lambda Q)_j.$$

$\square$

Ce lien permet de réutiliser les théorèmes d'existence et d'unicité connus pour les chaînes à temps discret.

**Théorème 32.** Supposons que  $Q$  soit le générateur d'une chaîne irréductible et récurrente. Alors  $Q$  admet une mesure invariante, unique à une constante multiplicative près.

*Démonstration.* Une fois exclu le cas où  $I = \{i\}$ , l'irréductibilité assure que pour tout  $i \in I$ ,  $q_i > 0$ . Ceci entraîne que  $\Pi$  est irréductible et récurrente donc  $\Pi$  admet une mesure invariante unique à une constante multiplicative près.  $\square$

*Remarque 33.* Attention, si l'espace d'état  $I$  est infini, rien ne dit que les mesures invariantes sont de masse finie : l'existence d'une mesure de probabilité invariante n'est pas assurée. Elle l'est par contre dans le cas  $I$  fini.

Pour répondre complètement à cette question, il faut introduire la notion de récurrence positive. On dit qu'un point  $i$  est récurrent positif si  $q_i = 0$  ou si le temps moyen de premier retour en  $i$   $m_i = \mathbb{E}_i(T_i)$  est fini. Un point récurrent non récurrent positif est dit récurrent nul. On obtient alors le lien entre mesure de probabilité invariante et espérance des temps de retour avec une petite subtilité par rapport au temps discret.

**Théorème 34.** *Soit  $Q$  un générateur irréductible. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. tous les états sont récurrents positifs ;
2. il existe un état récurrent positif ;
3.  $Q$  est non explosif et admet une probabilité invariante  $\lambda$  qui charge tous les points.

De plus, quand 3. a lieu,  $m_i = 1/(\lambda_i q_i)$ .

*Remarque 35.* La mesure invariante affecte au point  $i$  le poids  $1/(q_i m_i)$  qui s'interprète comme le temps moyen que l'on passe en  $i$  multiplié par l'inverse du temps de retour. Analogie avec le temps discret ?

## 9 Convergence à l'équilibre et théorème ergodique

**Théorème 36** (Convergence à l'équilibre). *Soit  $Q$  un générateur irréductible non-explosif de semi-groupe  $(P(t))_{t \geq 0}$  et de probabilité invariante  $\lambda$ . Alors, pour tous états  $i, j$ ,*

$$p_{ij}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \lambda_j = \frac{1}{q_j m_j}.$$

De plus, pour toute mesure initiale  $\nu$ ,  $\mathbb{P}(X_t = j) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{q_j m_j}$ .

**Théorème 37** (Théorème ergodique). *Soit  $Q$  un générateur irréductible et  $\nu$  la loi de probabilité de  $X_0$ . Alors*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s=i\}} ds \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{q_i m_i} \quad p.s. \quad (1)$$

De plus, dans le cas récurrent positif, pour toute fonction bornée  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , on a

$$\frac{1}{t} \int_0^t f(X_s) ds \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \bar{f} = \sum_{i \in I} \frac{1}{q_i m_i} f(i) = \sum_{i \in I} \lambda_i f(i) \quad p.s.$$

*Remarque 38.* La relation (1) assure que le temps moyen passé en  $i$  par la chaîne jusqu'au temps  $t$  converge vers le poids que la mesure invariante affecte à  $i$ . Ce poids peut être nul si la chaîne n'est pas récurrente positive.

## 10 Exercices

**Exercice 39.** Considérons une flotte de  $N$  bus. Chaque véhicule tombe en panne indépendamment des autres avec un taux  $\mu$  et est envoyé au dépôt. L'atelier ne peut en réparer qu'un à la fois et le travail est distribué selon une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ . Quelle est la mesure d'équilibre du nombre de bus en service ?

**Exercice 40.** On modélise l'arrivée d'appels à un central téléphonique par un processus de Poisson de paramètre  $\lambda$ . Les durées des appels sont supposés indépendantes et identiquement distribuées de loi exponentielle de paramètre  $\mu$ . On suppose que le central peut gérer un nombre infini d'appel.

1. Quel est le modèle utilisé ? Donner le générateur du processus.
2. Montrer qu'en temps grand la loi du nombre d'appels en cours au temps  $t$  est approximativement une loi de Poisson de paramètre  $\lambda/\mu$ . Comment le vérifier par la simulation ?
3. Donner la longueur moyenne des périodes durant lesquelles au moins une ligne est occupée.
4. Montrer que le nombre moyen de lignes occupées au temps  $t$ , sachant que  $n$  étaient occupées à l'instant initial, est  $ne^{-\mu t} + \lambda(1 - e^{-\mu t})/\mu$ .
5. Montrer que, à l'équilibre, le nombre  $N_t$  d'appels qui ont pris fin dans l'intervalle de temps  $[0, t]$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda t$ . Est-ce que  $(N_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Poisson ?

## Références

[Nor97] J. NORRIS – *Markov chains*, Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, 1997.