DOCUMENT DE SYNTHÈSE

présenté à

L'UNIVERSITÉ DE LA ROCHELLE

en vue de

L'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

DISCIPLINE : MATHÉMATIQUES

SPECIALITÉ : PROBABILITÉS

Contributions à l'étude de quelques fonctionnelles stochastiques

par

Jean-Christophe Breton

soutenue le 26 juin 2009 devant le jury composé de Messieurs les Professeurs :

Loïc Chaumont	Examinateur	Université d'Angers
Youri Davydov	Examinateur	Université Lille 1
Christian Houdré	Président	Georgia Institute of Technology (États-Unis)
Mikhael Lifshits	Rapporteur	Université de Saint Petersbourg (Russie)
Jean-Jacques Prat	Examinateur	Université de La Rochelle
Thomas Simon	Rapporteur	Université Lille 1
Li-Ming Wu	Rapporteur	Université Clermont-Ferrand 2

Remerciements

C'est pour moi un plaisir que de sacrifier à l'exercice des remerciements. De nombreuses personnes ont contribué, de près ou de loin, mathématiquement ou pas, à la réalisation du travail dont ce document de synthèse traite. Ces quelques lignes leurs sont dédiées pour les remercier.

En premier lieu, je remercie l'ensemble de mes coauteurs. Leurs collaborations furent, à chaque fois, des expériences, parfois très différentes, mais toujours très enrichissantes et instructives que je renouvellerais avec plaisir dans le futur. Qu'ils soient tous remerciés, non seulement pour les résultats obtenus, mais aussi pour l'ambiance amicale et stimulante qu'ils ont, chacun, apportée.

Je remercie Michel Lifshits, Thomas Simon et Liming Wu d'avoir accepté d'être rapporteur de cette habilitation. En particulier, je remercie Michel Lifshits pour avoir toujours gardé un œil sur mon travail, Thomas Simon pour ses conseils et sa lecture très minutieuse de ce document et Liming Wu pour son intérêt pour mon travail.

Je remercie encore Loïc Chaumont pour sa participation à ce jury et Jean-Jacques Prat pour avoir honoré sa dernière responsabilité universitaire en prenant part à ce jury. Je formule également trois remerciements spéciaux : les premiers sont pour Youri Davydov, pour sa présence dans ce jury et pour sa direction, lors de mes premiers pas scientifiques, qui m'inspire toujours ; les deuxièmes s'adressent à Nicolas Privault qui a eu une forte influence sur mon travail et qui s'est toujours montré intéressé par mon avancement même, maintenant, d'un peu plus loin ; les troisièmes, enfin, sont réservés à Christian Houdré qui m'a fait l'honneur de présider ce jury, je le remercie également pour ses invitations, ses collaborations et discussions sur des sujets toujours passionnants.

Je remercie enfin les membres du laboratoire Mathématiques Image et Applications et du département de Mathématiques de l'Université de La Rochelle. Certains contribuent à donner une ambiance résistante et stimulante qui a été essentielle pour avancer mon travail. Je les en remercie tout particulièrement.

Finalement, je réserve des remerciements très spéciaux à mes proches. Les premiers s'adressent à mes parents et à ma sœur qui, de loin, m'ont depuis toujours encouragé. Les derniers, enfin, sont pour Elodie dont le soutien quotidien, s'il est invisible dans ce document final, est pourtant vraiment présent à chaque page. Je la remercie en particulier pour son soutien et sa simple présence dans les moments difficiles où « plus rien ne marche dans les preuves ».

Table des matières

Introduction

Ce mémoire présente une vue d'ensemble de mon activité scientifique depuis mon doctorat. Que ce soit sous la forme de variables aléatoires, de processus stochastiques, de champs, d'intégrales stochastiques ou encore de modèles probabilistes plus spécifiques, les objets de base étudiés dans mes travaux sont génériquement des fonctionnelles stochastiques. Nous en analysons la régularité des lois, le comportement asymptotique (s'il y a lieu) ou encore nous établissons des comparaisons de lois, par exemple par des inégalités de concentration. Plusieurs thèmes émergent de mes travaux de recherche, la plupart en se croisant et s'entrecroisant. J'ai choisi une présentation reprenant des thèmes issus de mon travail doctoral [25]. Celui-ci était articulé autour de deux problèmes : l'étude des lois d'intégrales stables multiples et la recherche de principes locaux d'invariance. Depuis mes études doctorales, ces deux thèmes ont été développés et étoffés en utilisant parfois des points de vue assez éloignés de ceux d'origine. Ils ont mené à deux parties de ce mémoire qui seront donc consacrées d'une part à des intégrales stochastiques en partie 1 (de plusieurs types : intégrales stable, de Wiener-Itô, de Poisson) et d'autre part à des théorèmes limites en partie 3. Dans une troisième partie (qu'on présentera, en fait, en deuxième), on s'intéresse à des inégalités de concentration ou de comparaison pour des fonctionnelles stochastiques.

Comme suggéré plus haut, à la lecture de ce mémoire, on notera que d'autres thèmes apparaissent transversalement dans cette présentation : ainsi des convergences en variation sont établies aussi bien sous forme de théorèmes limites en partie 3 que pour des intégrales stochastiques (en partie 1), des résultats en environnement stable sont recherchés dans différents contextes (inégalités de concentration, intégrales stochastiques, limite dans les modèles de boules aléatoires). Des intégrales stochastiques se retrouvent, comme objet d'étude ou comme instrument, ailleurs que dans la partie 1.

Commençons par décrire succinctement le contenu de chaque partie.

La **partie 1** est dédiée à l'étude d'**intégrales stochastiques**. Nous commençons d'abord par y poursuivre l'étude des lois des intégrales stables multiples, entamée en doctorat, cf. [25, Partie 1], voir aussi les travaux de Samorodnitsky, Taqqu et leurs co-auteurs [108, 109, 112, 113, 114]. On s'intéresse en particulier à l'étude des lois jointes d'intégrales stables multiples. On donne ainsi des conditions suffisantes pour l'absolue continuité des lois par rapport à la mesure de Lebesgue et pour la continuité de ces lois par rapport aux fonctions intégrées, pour la topologie de la variation totale. On s'intéresse également à la régularité pour la variation totale des lois d'intégrales de Wiener-Itô, généralisant ainsi certains résultats de Davydov [34]. Le cas d'intégrales de type Poisson est aussi étudié et on fait le lien avec certains résultats de Kulik [77, 78, 79, 80]. Un outil essentiel dans nos études des intégrales stochastiques est la méthode de stratification (ou son évolution, la méthode de superstructure) due à Davydov et Lifshits [32], [37]. Pour cela, les intégrales sont considérées comme des fonctionnelles stochastiques dont on étudie les lois en les désintégrant sur des fibres générées par des directions admissibles d'un processus sous-jacent (pour simplifier : ce processus sous-jacent est le processus contre lequel les intégrales sont calculées). Les fibres étant fini-dimensionnelles, on se ramène ainsi à étudier des mesures en dimension finie.

Dans la **partie 2**, nous proposons des **inégalités de comparaison** pour les lois de différentes fonctionnelles stochastiques. On commence par établir des inégalités de concentration pour des fonctionnelles stochastiques définies sur un espace de Poisson, lorsque un gradient de type différence est bien contrôlé. Ces résultats sont fondés sur des identités de représentation de la covariance, dans le cas carré-intégrable, dûes à Houdré et ses coauteurs [21], [52] et aussi utilisées dans [53], [54], [55], [56]. On décline ce type de résultats explicitement dans différents cadres, notamment pour des fonctionnelles lipschitziennes de variables stables où on complète aussi l'étude par la description de « petite concentration » autour de la moyenne ou de la médiane. On établit ensuite des inégalités de comparaison convexe pour des processus de diffusion à sauts lorsque les caractéristiques des processus satisfont certaines inégalités. Dans le cas de processus exponentiels stochastiques, les comparaisons s'interprètent en termes de bornes pour des processus de prix d'options financières complètant des résultats de Bergenthum et Rüschendorf, obtenus par propagation de la convexité dans le modèle [13].

La **partie 3** regroupe des **théorèmes limites** dans différents cadres. Pour commencer, et faisant suite à nouveau à des travaux menés en thèse, cf. [25, Partie 2], on s'est intéressé à des principes locaux d'invariance pour des processus empiriques. On expliquera les difficultés spécifiques à ce cas, les résultats obtenus et les travaux toujours en cours. En utilisant des outils de la partie 1, c'est encore la variation totale des lois qu'on a étudiée pour les variations de type Hermite du mouvement Brownien fractionnaire. On a ainsi complété des résultats récents de type Berry-Esséen obtenus par Nourdin *et al.* [95, 96]. On a également étudié deux modèles probabilistes où les fluctuations des lois sont établies. Dans le premier, on considère des boules aléatoires modélisant des réseaux de communication sans fils, on étudie alors les propriétés macroscopique et microscopique d'un champ aléatoire représentant les interférences d'un tel réseau. On complète des résultats de Kaj *et al.* [17, 69, 66, 67, 68]. Dans le second, on considère des mots issus d'alphabets aléatoires ordonnés et on s'intéresse aux tableaux de Young associés et à la fluctuation de la loi de leur forme limite quand simultanément l'alphabet et la taille du mot grossissent. On retrouve des distributions limites dirigées par la loi de Tracy-Widom [123, 124, 125].

Dans la suite, nous développons ces contributions en présentant les résultats principaux et en indiquant de courtes esquisses de preuve ou en expliquant les idées sur lesquelles les principaux arguments sont fondés. Nous renvoyons systématiquement aux articles correspondants pour les résultats exhaustifs ou pour les preuves complètes. Enfin, les trois parties étant indépendantes, elles peuvent être lues dans un ordre arbitraire.

Liste des publications

Tous ces travaux sont accessibles sur ma page *web* personnelle à l'URL

`http ://perso.univ-lr.fr/jcbreton/recherche.html`

ou disponible sur simple demande à `jcbreton@univ-lr.fr`

Publications parues

[B-1] *Intégrales stables multiples : représentation, absolue continuité de leur loi*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., vol. 331, pp. 717–720, 2000.

[BD-2] *Principe local d'invariance pour des variables aléatoires i.i.d.*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., vol. 333, pp. 673–676, 2001. Avec Y. A. Davydov.

[B-3] *Absolue continuité des lois jointes des intégrales stables multiples*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., vol. 334, pp. 135–138, 2002.

[B-4] *Multiple stable stochastic integrals : Series representation and absolute continuity of their law*, Journal of Theoretical Probability, vol. 15, no. 4, pp. 877–901, 2002.

[B-5] *Convergence in variation of the laws of multiple stable integrals,* C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I vol. 338, pp. 239–244, 2004.

[B-6] *Absolute continuity of joint laws of multiple stable stochastic integrals*, Journal of Theoretical probability, vol. 18, no. 1, pp. 43–77, 2005.

[BD-7] *Supremum of empirical processes for i.i.d. random variables*, Lithuanian Journal of Mathematics, vol. 45, no. 4, 2005, pp. 368–386. Avec Y. Davydov.

[BD-8] *Local invariance principle for i.i.d. random variables*, Theory of Probability and its Applications, vol. 51, no. 2, pp. 333–357, 2006. Avec Y.A. Davydov.

[B-9] *Convergence in variation of the joint laws of multiple Wiener-Itô integrals,* Statistical and Probability letters, vol. 76, no. 17, p 1904–1913, 2006.

[BHP-10] *Dimension-free and infinite variance tail estimates on Poisson space*, Acta Applicandae Mathematicae, vol. 95, no. 3, pp 151–203, 2007. Avec C. Houdré et N. Privault.

[BH-11] *On finire-range stable-type deviation*, Theory of Probability ans its Applications, vol. 52, 2007. Avec C. Houdré.

[BP-12] *Convex concentration inequalities for exponential Jump-diffusion Processes* Comm. Anal. Stoch., Vol 1, no. 2, pp 263–277, 2007. Avec N. Privault.

[B-13] *Convergence in variation of the joint laws of multiple stable stochastic integrals,* Probability and Mathematical Statistics, vol. 28, no. 1, 2008.

[BP-14] *Bounds on option prices in point process diffusion models.* International Journal of Theoretical and Applied Finance, vol. 11, no. 6, pp. 597–610, 2008. Avec N. Privault.

[BN-15] *Error bounds on the non-normal approximation of Hermite power variations of fractional Brownian motion.* Electronic communication in Probability, vol. 13, pp. 482–493, 2008. Avec I. Nourdin.

[ABP-16] *Convex ordering for random vectors using predictable representation.* Potential Analysis, vol. 29, no. 4. pp. 327–349, 2008. Avec M. Arnaudon et N. Privault.

Prépublications à paraître

[B-17] *Regularity of the laws of shot noise series and of related processes.* arXiv :0910.0156
Á paraître dans Journal of Theoretical Probability.

[BD-18] *Rescaled weighted random balls models and stable self-similar random fields.* arXiv :0807.4700
Avec C. Dombry. À paraître dans Stochastic Processes and their Applications.

[BH-19] *Simultaneous asymptotics for the shape of random Young tableaux with growingly reshuffled alphabets.* arXiv :0812.3672.
Avec C. Houdré. À paraître dans Bernoulli.

Chapitre 1

Intégrales stochastiques

Dans cette partie on s'intéresse à des intégrales stochastiques en les interprétant comme des fonctionnelles stochastiques. Selon les cas, nous considérons des fonctionnelles de processus stables, gaussiens ou de Poisson et nous en étudions les lois. De façon générale, les lois de telles fonctionnelles pour des processus de Lévy ont été intensivement étudiées dès les années 80. Pour cela, la principale idée a été d'introduire sur l'espace des trajectoires du processus étudié une structure assez régulière pour appliquer une forme de calcul stochastique. Cela a mené au calcul de Malliavin. Avec des outils très performants (règle de dérivation composée, intégration par parties), ce calcul s'est révélé très fécond et très efficace pour étudier la régularité de lois de fonctionnelles gaussiennes (l'existence de densité, régularité des densités *etc.*, voir par exemple [99]). Ce calcul a été utilisé aussi dans le cadre d'espace de trajectoires avec sauts (originellement voir [19] mais aussi par exemple [15], [27], [38], [43], [104]) et il fonctionne bien en particulier quand la mesure de Lévy a une densité. Pour un exemple d'utilisation du calcul de Malliavin dans le cadre gaussien, nous renvoyons à la section 3.2 où dans la lignée des travaux récents de Nourdin *et al.* nous complétons des vitesses de convergence pour les q-variations du mouvement brownien fractionnaire.

Une autre approche pour introduire une structure régulière dans l'espace de probabilité est la méthode de stratification. Dans ce cas, la structure régulière vient d'un semi-groupe de transformation de l'espace, admissible par rapport à la loi du processus étudié, cf. [32] et [37]. En désintégrant l'espace de probabilité en strates (les orbites du semi-groupe), cette approche réduit l'analyse des lois sur l'espace des trajectoires à celle de lois fini-dimensionnelles. Cette méthode supporte en particulier de faibles propriétés de différentiabilité et s'applique en particulier dans des cadres discrets. C'est cette approche qui nous a guidés dans l'étude des fonctionnelles stochastiques, de type stable (Section 1.1), gaussien (Section 1.2), ou de Poisson (Section 1.3) où on étudie l'absolue continuité des lois par rapport à la mesure de Lebesgue et la régularité par rapport à la variation totale.

Dans la suite, $\mathscr{L}(X)$ désigne la loi de X, variable ou fonctionnelle aléatoire, et λ_p la mesure de Lebesgue p-dimensionnelle (on notera λ plutôt que λ_1 et λ_A la restriction de λ^p à $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$). On note $\mu_1 \ll \mu_2$ pour l'absolue continuité de la mesure μ_1 par rapport à la mesure μ_2 et $\mu_1 \asymp \mu_2$ pour l'équivalence de μ_1 et μ_2 (*i. e.* $\mu_1 \ll \mu_2$ et $\mu_2 \ll \mu_1$). Dans la suite, nous dirons qu'une mesure est absolument continue si elle l'est par rapport à la mesure de Lebesgue.

1.1 Intégrales stables

En thèse, un de nos sujets d'étude favoris était les intégrales stables multiples. Après en avoir rappelé la construction et les principales propriétés, nous en complétons l'étude des lois jointes avec la régularité par rapport à la variation totale.

Dans la suite, nous noterons $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ une loi stable où $\alpha \in (0, 2]$ est l'indice de stabilité, $\sigma > 0$ est un facteur d'échelle, $\beta \in [-1, 1]$ est un paramètre de biais et $\mu \in \mathbb{R}$ est un paramètre de translation. Sa fonction caractéristique φ est donnée par

$$\varphi(\theta) = \begin{cases} \exp\{-\sigma^\alpha|\theta|^\alpha(1 - i\beta(\operatorname{sign}\theta)\tan\frac{\pi\alpha}{2}) + i\mu\theta\} & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \\ \exp\{-\sigma|\theta|(1 + i\beta\frac{2}{\pi}(\operatorname{sign}\theta)\ln|\theta|) + i\mu\theta\} & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

Nous renvoyons à [130] pour une description détaillée de ces lois. Ces lois sont des généralisations des lois gaussiennes (qui correspondent au cas $\alpha = 2$) mais n'ont pas de variance (quand $\alpha < 2$). Cela explique la difficulté à construire des intégrales multiples par rapport à une mesure stable M (sans variance, pas de produit scalaire L^2 et donc pas d'isométrie associée). Pour commencer, rappelons que le cas des intégrales simples est bien connu (voir [115]) : pour $\alpha \neq 1$, $I_1(f) := \int_{[0,1]} f\,dM$ est bien définie si $f \in L^\alpha([0,1])$ et $I_1(f)$ suit la loi $S_\alpha(\sigma_f, \beta_f, \mu_f)$ avec des paramètres σ_f, β_f, μ_f explicites en fonction de f, α et β (paramètre de biais, qui pour une mesure M devient une fonction de $[0,1]$ dans $[-1,1]$), cf. [115, §3.4]. Les intégrales stables multiples $I_d(f)$ sont des généralisations des intégrales simples $I_1(f)$ mais aussi des intégrales multiples de Wiener-Itô (qu'on étudiera en Section 1.2), elles apparaissent par exemple comme les lois de limites de certaines fonctionnelles de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (*iid*) [5] ou pour définir des classes de processus auto-similaires [119], plus généralement elles sont liées à des formes multilinéaires aléatoires [75]. Plusieurs approches des intégrales multiples par rapport à des mesures stables ont été proposées : Szulga-Woyczyński utilisent un développement du type Fourier-Haar ; Rosiński-Woyczyński [108] pour $\alpha \in (1,2)$ puis Kwapień-Woyczyński [82] pour $\alpha \in (0,2)$ font des itérations successives sur le simplexe $\{0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_d < T < +\infty\}$; Surgailis [121] se ramène à des intégrales de type Poisson ; Krakowiak-Szulga [76] utilisent une méthode de type Dunford-Lebesgue ; puis Samorodnitsky-Szulga [112] et Samorodnitsky-Taqqu [113, 114] utilisent des représentations de LePage. C'est ce dernier type d'approche, par représentation de LePage, qu'on a suivie, en la simplifiant. Ainsi, dans [B-1] et [B-4], on montre que l'intégrale stable multiple $I_d(f)$ de f est bien définie si f est dans l'espace de type Orlicz

$$L^\alpha(\ln_+)^{d-1}([0,1]^d) = \{f : [0,1]^d \to \mathbb{R} \text{ mesurable telle que } \rho_{\alpha,d}(f) < +\infty\}$$

où, avec $\ln_+ x = \ln(x \wedge 1)$, $\rho_{\alpha,d}(f)$ est donnée par

$$\rho_{\alpha,d}(f) = \int_{[0,1]^d} |f(t_1,\dots,t_d)|^\alpha \left(1 + \ln_+(|f(t_1,\dots,t_d)|)\right)^{d-1}\ dt_1\cdots dt_d.$$

Si $(\Gamma_i)_{i>0}$ est la suite des dates de saut d'un processus de Poisson de paramètre 1, $\{(V_i,\gamma_i)\}_{i>0}$ est une suite indépendante et *iid* avec V_i de loi uniforme sur $[0,1]$ et γ_i de loi conditionnelle Rademacher de paramètre $(1+\beta(V_i))/2$, la série de LePage définie par

$$S_d(f) = C_\alpha^{d/\alpha} \sum_{\mathbf{i}>0} [\gamma_{\mathbf{i}}]\,[\Gamma_{\mathbf{i}}]^{-1/\alpha}\, f\left(\mathbf{V_i}\right), \tag{1.1.1}$$

où $C_\alpha = \left(\int_0^{+\infty} x^{-\alpha}\sin x\,dx\right)^{-1}$, existe. Ci-dessus et dans la suite, on utilise les notations multi-indicielles $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_d)$, $[\mathbf{i}] = i_1\,i_2\cdots i_d$, $[\mathbf{V_i}] = (V_{i_1}, V_{i_2}, \dots, V_{i_d})$, $[\gamma_{\mathbf{i}}] = \gamma_{i_1}\gamma_{i_2}\cdots\gamma_{i_d}$, $[\mathbf{\Gamma_i}] = \Gamma_{i_1}\Gamma_{i_2}\cdots\Gamma_{i_d}$, et $\mathbf{i} > 0$ signifie $i_1 > 0, \dots, i_d > 0$. Dans le résultat suivant, nous relions l'intégrale stable multiple $I_d(f)$ à la série de LePage (1.1.1) quand $\alpha < 1$ ou quand $\alpha \geq 1$ et $\beta = 0$. Dans le cas non symétrique lorsque $\alpha \geq 1$, il faudrait généraliser la série $S_d(f)$ en prenant en compte un terme correctif à partir de [115, th. 3.1.10], Afin d'éviter des complications de nature technique, nous laissons ce cas de côté.

Théorème 1.1 *Considérons une mesure aléatoire stable M, symétrique si $\alpha \geq 1$.*
Si $f \in L^\alpha(\ln_+)^{d-1}([0,1]^d)$, alors la série multiple $S_d(f)$ est $\mathbb{P}$-presque sûrement convergente et on a

$$I_d(f) \overset{fdd}{=} S_d(f) \tag{1.1.2}$$

où $\overset{fdd}{=}$ désigne l'égalité des lois fini-dimensionnelles.

La preuve de la convergence de la série $S_d(f)$ vient en décomposant la série en deux selon que $|f(\mathbf{V_i})|\ [\mathbf{i}]^{-1/\alpha} > 1$ ou que $|f(\mathbf{V_i})|\ [\mathbf{i}]^{-1/\alpha} \leq 1$. Pour $\alpha < 1$, des estimations combinatoires permettent de contrôler par $\rho_{\alpha,d}(f)$ la première partie en probabilité et la deuxième en espérance. Comme par la loi des grands nombres $\Gamma_i \sim_{+\infty} i$, on en déduit la convergence de $S_d(f)$ quand $f \in L^\alpha(\ln_+)^{d-1}([0,1]^d)$. Pour $\alpha \geq 1$, la divergence de la série $\sum_{i>0} i^{-1/\alpha}$ oblige à combiner des estimations combinatoires plus fines au théorème des trois séries. La représentation (1.1.2) s'obtient ensuite par continuité en probabilité de S_d et de I_d en l'observant d'abord sur les fonctions simples. $\square$

L'avantage de la représentation (1.1.2) de $I_d(f)$ est qu'elle permet de mettre en œuvre la méthode de stratification pour étudier sa loi. Comme plusieurs résultats de cette partie sont fondés sur cette méthode, on commence par décrire sommairement cette méthode en renvoyant à [37] pour toute description plus précise.

Dans [B-3] et [B-6], on étudie l'absolue continuité des lois jointes de p intégrales stables multiples $(I_{d_1}(f_1), \ldots, I_{d_p}(f_p))$ pour $d_1, \ldots, d_p \in \mathbb{N}^*$ et

$$f_1 \in L^\alpha(\ln_+)^{d_1-1}([0,1]^{d_1}), \quad \ldots, \quad f_p \in L^\alpha(\ln_+)^{d_p-1}([0,1]^{d_p}). \tag{1.1.3}$$

Nous commençons par introduire des notations, utiles pour exprimer nos résultats :

- pour $i = 1, \ldots, p$, $N_i = d_1 + \cdots + d_i$, $N = N_p$,
- $a^i = (a_0^i, \ldots, a_p^i) \in \mathbb{N}^{p+1}$ une $(p+1)$-partition de d_i : $d_i = |a^i| = a_0^i + \cdots + a_p^i$,
- $a = (a^1, \ldots, a^p) \in (\mathbb{N}^{p+1})^{\otimes p}$,
- $M_a = (a_j^i)_{1\leq i,j\leq p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $d_i = \sum_{k=0}^p a_k^i$, $b_k = \sum_{i=1}^p a_k^i$,
- pour $b = (b_1, \ldots, b_p) \in \mathbb{N}^p$:
$$E(b) = \left\{ a = (a^1, \ldots, a^p) \mid |a^i| = d_i,\ \sum_{i=1}^p a_k^i = b_k \text{ pour } k = 1, \ldots, p \right\},$$
- σ_a la permutation de $\{1, \ldots, N\}$ telle que pour $j = \sum_{u=1}^{k-1} b_u + \sum_{s=1}^{i-1} a_{s,k} + l$, $l = 1, \ldots, a_{i,k}$, on a $\sigma_a(j) = \sum_{v=1}^{i-1} d_i + \sum_{s=1}^{k-1} a_{i,s} + l$,
- l'application associée à σ_a, $U_a : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ $U_a(t_1, \ldots, t_N) = (t_{\sigma_a(1)}, \ldots, t_{\sigma_a(N)})$,
- $\phi(t) = f_1(t_1, \ldots, t_{N_1}) \cdots f_p(t_{N_{p-1}+1}, \ldots, t_{N_p})$,
- $\phi_b(t) = \displaystyle\sum_{a\in E(b)} \prod_{i=1}^p \frac{d_i!}{a_0^i! \cdots a_p^i!} \det M_a\, \phi(U_a(t))$,
- En notant $\Pi_{b_1,\ldots,b_d}$ le sous-groupe de Π_N constitué des permutations laissant invariants les « b-blocs » suivants : $(1, \ldots, b_1)$, $(b_1+1, \ldots, b_1+b_2)$, $\ldots$, $(b_1 + b_2 + \cdots b_{p-1} + 1, \ldots, b_1 + b_2 + \cdots b_p = N)$:
$$S_{b_1,\ldots,b_d}\phi(t) = \frac{b_1! \cdots b_d!}{N!} \sum_{\sigma\in\Pi_{b_1,\ldots,b_d}} \phi(t_{\sigma(1)}, \ldots, t_{\sigma(N)}),$$
- $\bar{\phi}_b = S_{b_1,\ldots,b_d}\phi_b$ symétrisée de ϕ dans chaque « b-blocs ».

Théorème 1.2 *Soient M une mesure aléatoire stable satisfaisant, symétrique si $\alpha \geq 1$, et f_1, $\ldots$, f_p des fonctions comme dans* (1.1.3) *vérifiant la condition $\mathbf{H_{p,d}}$ suivante :*

$$\textit{il existe } \mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_p) \in \mathbb{N}^p,\ |\mathbf{b}| = N \textit{ avec } \bar{\phi}_\mathbf{b} = S_{b_1,\ldots,b_d}\phi_b$$
$$\textit{non presque partout nulle sur } [0,1]^N.$$

Alors la loi jointe $\big(I_{d_1}(f_1), \ldots, I_{d_p}(f_p)\big)$ est absolument continue par rapport à λ^p, la mesure de Lebesgue p-dimensionnelle.

La condition $\mathbf{H_{p,d}}$ n'est pas spécifique au cas stable, elle est déjà présente dans [34] pour l'absolue continuité des lois jointes d'intégrales de Wiener-Itô. C'est une condition algébrique qui assure que les fonctions $f_1, \dots, f_p$ ne sont pas trop « entrelacées ». Elle sera utile aussi pour obtenir la continuité des lois par rapport à la variation totale aussi bien dans le cas stable, cf. Théorème 1.3, que dans le cas gaussien, cf. Section 1.2.

On rappelle quelques exemples où la condition $\mathbf{H_{p,d}}$ devient explicite :

1. Quand $p=1$ et $d_1=1$, $\mathbf{H_{1,1}}$ devient $f \not\equiv 0$, ce qui coïncide avec les conditions bien connus pour les intégrales stables simples, cf. [115].

2. Quand $p>1$ et $d_1=\cdots=d_p=1$, $\mathbf{H_{p,(1,\dots,1)}}$ est vérifiée si $\det\{f_i(t_j)\} \neq 0$ et on peut constater sur des contre-exemples que $\mathbf{H_{p,(1,\dots,1)}}$ peut être en défaut si ce déterminant est nul.

3. Quand $p=1$ et $d_1=d>1$, $\mathbf{H_{1,d}}$ devient $f \not\equiv 0$.

4. Quand $p=2$ et $d_1=d_2=2$, on montre que $\mathbf{H_{2,(2,2)}}$ est satisfaite s'il n'existe pas de réels c_1, c_2 tels que $c_1 f_1 = c_2 f_2$ et que $\mathbf{H_{2,(2,2)}}$ n'est pas satisfaite si l'égalité est possible.

5. Quand $p=2$ et $d_1=1$, $d_2=d$, la condition $\mathbf{H_{2,(1,d)}}$ est vérifiée si

$$f_1(t_1) f_2(t_2, t_3, \dots, t_{d+1}) \not\equiv \frac{1}{d} \sum_{i=2}^{d+1} f_1(t_i) \underbrace{f_2(t_2, \dots, t_{d+1})}_{\substack{\text{avec } t_1 \text{ en} \\ i^{\text{ème}} \text{ position}}},$$

   par exemple pour $d=2$, si $f_1(t_1) f_2(t_2,t_3) \not\equiv \frac{1}{2}\big(f_1(t_2) f_2(t_1,t_3) + f_1(t_3) f_2(t_2,t_1)\big)$.

6. Quand $p=3$ et $d_1=1$, $d_2=1$, $d_3=2$, la condition $\mathbf{H_{2,(1,d)}}$ est vérifiée si

$$\begin{vmatrix} f_1(t_1) & f_2(t_1) & f_3(t_1,t_4) \\ f_1(t_2) & f_2(t_2) & f_3(t_2,t_4) \\ f_1(t_3) & f_2(t_3) & f_3(t_3,t_4) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(t_1) & f_2(t_1) & f_3(t_1,t_3) \\ f_1(t_2) & f_2(t_2) & f_3(t_2,t_3) \\ f_1(t_4) & f_2(t_4) & f_3(t_4,t_3) \end{vmatrix} \not\equiv 0.$$

Par la représentation (1.1.2), on prouve le théorème 1.2 pour les séries de type LePage $(S_{d_1}(f_1), \dots, S_{d_p}(f_p))$ en les interprétant comme des fonctionnelles stochastiques $F(\eta)$ où $\eta = M([0,t])$ est le processus stable associé à la mesure aléatoire et F est une fonctionnelle sur les sauts de η définie sur l'espace de Skorohod $\mathbb{D}([0,1])$, espace des trajectoires de η. En notant P la loi du processus stable, on est ramené à prouver $PF^{-1} \ll \lambda_d$, ce qui se fait en trois étapes.

1. *Approximation* : il suffit de voir que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\mathcal{X}_\varepsilon$ mesurable dans $\mathcal{X} = \mathbb{D}$, tel que $P(\mathcal{X}_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$ et $P_{\mathcal{X}_\varepsilon} F^{-1} \ll \lambda_p$.

2. *Localisation* : Pour cela, on montre l'existence pour tout $x \in \mathcal{X}_\varepsilon$ d'un voisinage $V(x)$ de x tel que $P_{V(x)} F^{-1} \ll \lambda_p$.

3. *Stratification* : En analysant F dans des directions privilégiées pour η, on constate qu'il s'agit d'un polynôme à plusieurs indéterminées dont on prouve (sous l'hypothèse $\mathbf{H_{p,d}}$) qu'il est non nul sur $V(x)$ en étudiant son jacobien.

On se contente de décrire l'étape 3, qui est l'étape cruciale : on introduit la famille de transformations $G_{\mathbf{c}}(x) = x + \langle \mathbf{c}, \mathbf{l}_x \rangle = x + c_1 l_x^1 + \cdots + c_p l_x^p$ où $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_p)$ et $l^i = (l_x^i)_{x \in \mathbb{D}}$ sont des champs locaux définis par

$$l_x^i(t) = \sum_{s\,:\,\delta_x(s) > \epsilon_i} \left(\sum_{j=1}^{m_i} \tau_j^i \mathbf{1}_{\Delta_j}(s) \mathbf{1}_{[s,\infty[}(t) \right)^+ - \sum_{s\,:\,\delta_x(s) < -\epsilon_i} \left(\sum_{j=1}^{m_i} \tau_j^i \mathbf{1}_{\Delta_j^i}(s) \mathbf{1}_{[s,\infty[}(t) \right)^- \qquad (1.1.4)$$

avec des paramètres ($m_i \in \mathbb{N}^*, \epsilon_i > 0,\ \tau_j^i \in \mathbb{R}, \Delta_j^i$ intervalles, $1 \leq j \leq m_i$) déterminés par les contraintes techniques de la localisation. On note que l^i agit sur les sauts de $x \in \mathbb{D}([0,1])$ et qu'on a $\delta_{x+c\, l_x^i}(t) = \delta_x(t) + c\, w_x^i(t)$ avec $w_x^i(t) = \tau_j$ si, pour $1 \leq j \leq m_i$, $t \in \Delta_j^i$, $|\delta_x(t)| > \epsilon_j$ et $\delta_x(t)\, \tau_j^i > 0$, 0 sinon. Le mérite de ces transformations est qu'elles sont des directions admissibles pour le processus stable η, *i. e.* $PG_c^{-1} \asymp P$ et qu'on peut désintégrer P (cf. [37, Th. 21.1]) et écrire

$$P_{V(x)}F_d^{-1} = \int_{V(x)/\Gamma} P_\gamma F_d^{-1} P_\Gamma(d\gamma)$$

où Γ est une partition de l'espace en srates $\gamma = \{x + \langle \mathbf{c}, \mathbf{l}_x\rangle \ : \ \mathbf{c} \in (\mathbb{R}^+)^p\}$, P_Γ est une mesure quotient et P_γ est une mesure concentreé sur la strate et vérifiant $P_\gamma \ll \lambda_\gamma^p$ où λ_γ^p est la mesure de Lebesgue sur la strate γ. On est donc ramené à étudier la restriction $F_\gamma(\mathbf{c}) = F(x + \langle \mathbf{c}, \mathbf{l}_x\rangle)$ de F aux traces de strates γ sur $V(x)$. Comme F est une fonctionnelle sur les sauts et que $G_\mathbf{c}$ agit linéairement par morceaux sur les sauts de x, cette restriction F_γ est un polynôme en $(c_1, \dots, c_p)$ dont le jacobien J_γ est -après calculs- :

$$J_\gamma(\mathbf{c}) = \sum_{\substack{|a^i|=d_i \\ i=1,\dots,p}} \left(\prod_{i=1}^p B_{a^i}^i\right)\left(\prod_{k=1}^p c_k^{b_k-1}\right) \det M_a.$$

Un étude détaillée du coefficient de plus haut degré de J_γ montre qu'il est non nul pour toute strate γ de trace non-négligeable sur $V(x)$ sous l'hypothèse $\mathbf{H_{d,p}}$ et avec les contraintes techniques satisfaites à l'étape de localisation. Finalement $P_\gamma F_d^{-1} \ll \lambda^p$ et en remontant les étapes $PF^{-1} \ll \lambda^p$, ce qui prouve le théorème 1.2. □

Notre étude des lois des intégrales stables s'est poursuivie avec celle d'une autre forme de régularité : la continuité des lois par rapport aux fonctions intégrées pour la topologie de la variation totale. Nous rappelons que la variation totale d'une mesure signée μ sur un espace mesurable $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ est donnée par

$$\|\mu\|_{var} = \sup_{(A_n)} \sum_n |\mu(A_n)|, \tag{1.1.5}$$

où le supremum est pris sur les partitions dénombrables mesurables $(A_n)_n$ de $\mathcal{X}$. Il s'agit d'une norme qui rend complet l'espace des mesures signées finies sur $\mathcal{X}$. Dans la suite, nous notons $\xrightarrow{var}$ la convergence associée à cette norme. Cette convergence est beaucoup plus forte que la convergence en loi et coïncide avec la convergence dans L^1 des densités lorsqu'elles existent.

L'étude de la régularité des lois des intégrales stables pour la variation totale a été initiée en thèse dans [B-5] où on a prouvé :

Théorème 1.3 *On considère M une mesure stable (symétrique si $\alpha \geq 1$). Soit f_n une suite convergeant vers $f \neq 0$ dans $L^\alpha(\ln_+)^{d-1}([0,1]^d)$. On a $\mathscr{L}(I_d(f_n)) \xrightarrow{var} \mathscr{L}(I_d(f))$.*

La preuve repose sur la méthode de superstructure qu'on va commencer par décrire puisqu'elle servira à nouveau dans la suite. Initialement, il s'agit d'étudier l'absolue continuité de la loi PF^{-1} d'une fonctionnelle stochastique sur un espace $(\mathcal{X}, P)$ *a priori* infini-dimensionnel. La méthode consiste en l'introduction de familles auxiliaires de mesures Q_ε et de fonctionnelles F_ε sur une famille d'espaces $\mathcal{X}_\varepsilon = \mathcal{X} \otimes \mathcal{C}_\varepsilon$ plus gros avec $Q_\varepsilon F_\varepsilon^{-1} \xrightarrow{var} PF^{-1}$ quand $\varepsilon \to 0$. Le grossissement est intéressant quand les mesures $Q_\varepsilon F_\varepsilon^{-1}$ s'étudient assez facilement, par exemple par stratification. En général, on stratifie en désintégrant les mesures sur les strates $\{x\} \times \mathcal{C}_\varepsilon$, $x \in \mathcal{X}$, parallèle à $\mathcal{C}_\varepsilon$. Quand le grossissement $\mathcal{C}_\varepsilon$ est de dimension finie, on s'est ramené à l'étude de mesures image en dimension finie pour lesquelles un arsenal de résultats classiques permet d'en analyser la régularité, qui sera ensuite conservée par mélange. La difficulté est de trouver des familles auxiliaires $(Q_\varepsilon)_\varepsilon$, $(F_\varepsilon)_\varepsilon$ satisfaisant $Q_\varepsilon F_\varepsilon^{-1} \xrightarrow{var} PF^{-1}$, pour transférer effectivement la régularité des mesures $Q_\varepsilon F_\varepsilon^{-1}$ à PF^{-1}. Une telle condition est réalisée en « tordant le grossissement » par l'action d'une transformation sur $(x, c) \in \mathcal{X} \otimes \mathcal{C}_\varepsilon$ qui se comporte bien vis à vis de P.

Précisons la méthode dans un cas simple assez fréquent : on suppose qu'on dispose d'une famille de transformations $\{G_c,\ c\in[0,a]\}$ de $\mathcal{X}$ vérifiant $PG_c^{-1}\xrightarrow{var}P$ quand $c\to 0$. Typiquement, une telle famille est donnée par une direction admissible pour P, $G_c(x)=x+cl$ avec $l\in H$, l'espace de Cameron-Martin, si P est gaussienne, ou $G_c(x)=x+cl_x$ avec l_x un champ local (comme vu précédemment en (1.1.4)) quand P est stable. On considère alors sur l'espace produit $(\mathcal{X}_\varepsilon,\mathcal{C}_\varepsilon)=(\mathcal{X},\mathcal{B})\otimes([0,\varepsilon],\ \mathcal{B}([0,\varepsilon]))$, $\varepsilon\in[0,a]$, la famille de mesures Q_ε et de fonctionnelles $F_\varepsilon:\mathcal{X}_\varepsilon\longrightarrow\mathbb{R}$ données par : $Q_\varepsilon=\frac{1}{\varepsilon}(P\times\lambda|_{[0,\varepsilon]})$, $F_\varepsilon(x,c)=F(G_cx)$. On a

$$\begin{aligned}\|PF^{-1}-Q_\varepsilon F_\varepsilon^{-1}\|_{var} &= \left\|\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon(PF^{-1}-PG_c^{-1}F^{-1})\,dc\right\|_{var}\\ &\le \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon\|P-PG_c^{-1}\|_{var}\,dc\longrightarrow 0,\quad \varepsilon\to 0,\end{aligned}$$

ce qui garantit la condition d'approximation. Ensuite, en notant $\varphi_x(c)=F(G_cx)$, $c\in[0,\varepsilon]$, on a

$$Q_\varepsilon F_\varepsilon^{-1}=\frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathcal{X}}\lambda\varphi_x^{-1}\ P(dx).$$

On est ramené à l'étude de $\lambda\varphi_x^{-1}$, mesure image en dimension 1. Essentiellement, c'est à la régularité des restrictions de F sur les orbites de $\{G_c\}_c$ (donc dans les directions privilégiées de la loi P) qu'on se ramène.

En utilisant la représentation (1.1.1), la preuve du théorème 1.3 passe par des conditionnements multiples pour se ramener à des fonctionnelles de la seule suite $(\Gamma_i)_{i\ge1}$. En conditionnant encore par $(\Gamma_i)_{i\ge p+1}$ pour un $p>0$ dépendant de la fonction f limite, on réexprime les fonctionnelles comme des polynômes R_n à plusieurs indéterminées de $(\Gamma_1,\dots,\Gamma_p|\Gamma_{p+1})$. Il reste alors à justifier la convergence en variation des lois de ces fonctionnelles stochastiques polynomiales. Pour cela, on applique la méthode de superstructure sur $(\mathbb{R}^+)^p$ avec $G_c(x)=x+cv$, où $v\in\mathbb{R}^p$ est tel que $R(v)\neq 0$, l'existence de v étant assurée par le choix de l'indice p dans le conditionnement par le futur de la suite $(\Gamma_i)_{i\ge1}$. En effet, par un argument d'uniformité, la méthode de superstructure permet, plutôt que d'étudier l'absolue continuité des lois, de déduire la convergence en variation de celle des mesures image de la mesure de Lebesgue par $R_n(x+\cdot v)$ vers celle de la même mesure de Lebesgue par $R(x+\cdot v)$, pour presque chaque $x\in(\mathbb{R}^+)^p$. Finalement, la convergence en variation de ces mesures image s'obtiennent en montrant celle des coefficients des polynômes $R_n(x+\cdot v)$ (explicitement connus) vers ceux de $R(x+\cdot v)$. $\square$

Pour l'étude des lois jointes d'intégrales stables multiples $(I_{d_1}(f_1^n),\dots,I_{d_p}(f_p^n))$, on a repris l'approche utilisée pour l'étude de l'absolue continuité et les notations de la page 3. En particulier, le résultat de convergence en variation des lois jointes reprend l'hypothèse $\mathbf{H_{p,d}}$ du théorème 1.2. On prouve ainsi dans [B-13] :

Théorème 1.4 *Soit, pour chaque $1\le i\le p$, $(f_i^n)_{n\ge1}$ une suite de fonctions convergeant dans $L^\alpha(\ln_+)^{d_i-1}([0,1]^{d_i})$ vers f_i. On suppose de plus que les fonctions $f_1,\dots,f_p$ satisfont la condition $\mathbf{H_{p,d}}$. Alors $\mathscr{L}(I_{d_1}(f_1^n),\dots,I_{d_p}(f_p^n))\xrightarrow{var}\mathscr{L}(I_{d_1}(f_1),\dots,I_{d_p}(f_p))$ quand $n\to+\infty$.*

Notons pour commencer qu'en lisant attentivement la preuve du théorème 1.1, on peut voir que sous les conditions du théorème 1.4, on a déjà la convergence en probabilité :

$$(I_{d_1}(f_1^n),\dots,I_{d_p}(f_p^n))\xrightarrow{\mathbb{P}}(I_{d_1}(f_1),\dots,I_{d_p}(f_p)).\tag{1.1.6}$$

Comme pour le théorème 1.2, par la représentation (1.1.2) et en considérant le processus stable $\eta_t=M([0,t])$, la loi jointe de $(I_{d_1}(f_1),\dots,I_{d_p}(f_p))$ s'écrit $F(\eta)$ avec $F=(F_1,\dots,F_p)$ où F_i est une fonctionnelle sur les sauts de $x\in\mathbb{D}([0,1])$ définie presque sûrement par

$$F_i(\eta)=C_\alpha^{d_i/\alpha}\sum_{\mathbf{k}>0}[\gamma_{\mathbf{k}}][\Gamma_{\mathbf{k}}^{-1/\alpha}]\ f_i(\mathbf{V_k}).$$

De même, on associe $F^n=(F_1^n,\dots,F_p^n)$ à $(f_1^n,\dots,f_p^n)$ et il faut montrer $P(F^n)^{-1}\xrightarrow{var}PF^{-1}$ quand $n\to+\infty$. Le problème se réduit par approximation et par localisation en montrant :

Proposition 1.5 (Approximation) *Si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\mathbb{D}(\varepsilon)$ mesurable dans $\mathbb{D}$ avec $P(\mathbb{D}(\varepsilon)) > 1 - \varepsilon$ et*

$$P_{\mathbb{D}(\varepsilon)}(F^n)^{-1} \xrightarrow{var} P_{\mathbb{D}(\varepsilon)}F^{-1}, \quad n \to +\infty \tag{1.1.7}$$

alors $P(F^n)^{-1} \xrightarrow{var} PF^{-1}$.

Et

Proposition 1.6 (Localisation) *Si pour tout $x \in \mathbb{D}(\varepsilon)$, il existe un voisinage $V(x)$ de x tel que*

$$P_{V(x)}(F^n)^{-1} \xrightarrow{var} P_{V(x)}F^{-1}, \quad n \to +\infty$$

alors on a (1.1.7).

On réalise l'étape d'approximation en choisissant un point de Lebesgue $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_N)$ de $A_{\bar{\phi}_\mathbf{b}} = \{x \in \mathbb{R}^N \ : \ \bar{\phi}_\mathbf{b} \neq 0\}$ avec $t_i \neq t_j$, $i \neq j$; on fixe un voisinage $V_\varepsilon = U_1^\varepsilon \times \cdots \times U_N^\varepsilon$ avec $U_i^\varepsilon \cap U_j^\varepsilon = \emptyset$, $i \neq j$ et $\lambda^N(V_\varepsilon \cap A_{\bar{\phi}_b})/\lambda^N(V_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$. On introduit alors

$$\begin{aligned}\mathbb{D}_\varepsilon = \{x \in \mathbb{D} \,:\, x \text{ a un unique saut maximal sur chaque } U_i^\varepsilon \text{ en } T_{U_i^\varepsilon}(x) \\ \text{avec } T_\varepsilon(x) := (T_{U_1^\varepsilon}(x), \dots, T_{U_d^\varepsilon}(x)) \in A_{\bar{\phi}_\mathbf{b}}\}.\end{aligned}$$

Grâce au choix de V_ε et comme $T_\varepsilon(\eta)$ est uniforme sur V_ε, on montre que $P(\mathbb{D}_\varepsilon) = PT_\varepsilon^{-1}(A_{\bar{\phi}_\mathbf{b}}) \geq 1 - \varepsilon$.

On localise ensuite par séparabilité en prenant en compte des contraintes techniques qu'on ne détaille pas. En notant P^x la restriction de P à $V(x)$, on cherche à montrer $P^x(F^n)^{-1} \xrightarrow{var} P^xF^{-1}$. Pour cela, on utilise maintenant la méthode de superstructure avec $\mathcal{X}_\epsilon = V(x) \times [0, \epsilon]^p$, $Q_\epsilon^x = \epsilon^{-p}(P^x \otimes \lambda_{[0,\epsilon]^p})$ et $F_\epsilon(\mathbf{c}, y) = F(G_\mathbf{c}(y))$ où $G_\mathbf{c}(y) = y + \langle \mathbf{c}, \mathbf{l}_y \rangle$ avec $\mathbf{l} = (l^1, \dots, l^p)$ et $l^i = (l_x^i)_{x \in \mathbb{D}}$ des champs locaux définis par des paramètres soigneusement déterminés par les contraintes techniques évoquées de l'étape de localisation. Le voisinage $V(x)$ a été choisi dans un un ouvert $A(\mathbf{l})$ de $\mathbb{D}([0,1])$, bien adapté à l'étude de $\mathbf{l}$ (*i. e.* $A(\mathbf{l})$ est stable par $G_\mathbf{c}$). De plus, comme il se doit pour la méthode de superstructure, on a $P^xG_\mathbf{c} \xrightarrow{var} P^x$ quand $\mathbf{c} \to 0$ (uniformément en $x \in A(\mathbf{l})$). Comme

$$\begin{aligned}&\|P^xF^{-1} - P^x(F^n)^{-1}\|_{var} \\ \leq \quad &\|P^xF^{-1} - Q_\epsilon^xF_\epsilon^{-1}\|_{var} + \|Q_\epsilon^xF_\epsilon^{-1} - Q_\epsilon^x(F_\epsilon^n)^{-1}\|_{var} + \|Q_\epsilon^x(F_\epsilon^n)^{-1} - P^x(F^n)^{-1}\|_{var}\end{aligned}$$

et que les premier et troisième termes sont majorés par $\displaystyle\frac{1}{\epsilon^p}\int_{[0,\epsilon]^p} \|P^x - P^xG_\mathbf{c}^{-1}\|_{var}\, d\mathbf{c} \to 0$, $\epsilon \to 0$. Il reste à étudier le deuxième terme qu'on réécrit

$$\|Q_\epsilon^xF_\epsilon^{-1} - Q_\epsilon^x(F_\epsilon^n)^{-1}\|_{var} \leq \frac{1}{\epsilon^p}\int_{V(x)} \|\lambda_{[0,\epsilon]^p}\varphi_y^{-1} - \lambda_{[0,\epsilon]^p}\varphi_{n,y}^{-1}\|_{var}\, dP$$

avec $\varphi_{n,y}(\mathbf{c}) = (\varphi_{n,y}^1(\mathbf{c}), \dots, \varphi_{n,y}^p(\mathbf{c})) = F^n(G_\mathbf{c}(y))$ et de même pour φ_y. Pour cela, on utilise le résultat suivant de Alexandrova *et al.* [2, Corollaire 2.7] sur la convergence en variation de mesures image par des applications multidimensionnelles. Il généralise un résultat dû à Davydov [35] pour des mesures image par des fonctions en dimension 1.

Proposition 1.7 *Soit F_j, F des fonctionnelles d'un espace de Sobolev local $W_{loc}^{p,1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ avec $p \geq n$, Si F_j converge vers F pour la norme de Sobolev $\|\cdot\|_{p,1}$ sur chaque boule et si $E \subset \{\det DF \neq 0\}$ est de mesure (de Lebesgue) finie, alors $\lambda_{|E}F_j^{-1} \xrightarrow{var} \lambda_{|E}F^{-1}$.*

En fait les composantes $\varphi_y^i(\mathbf{c})$ de $\varphi_y(\mathbf{c})$ sont des polynômes (à plusieurs indéterminées) en $\mathbf{c}$ dont les coefficients s'expriment explicitement. On notera $B(\mathbf{a}^i, y)$ celui de $\mathbf{c}^{\mathbf{a}^i} = 1^{a_0^i}c_1^{a_1^i} \dots c_p^{a_p^i}$, $\mathbf{a}^i = (a_0^i, a_1^i \dots, a_p^i)$. En particulier, comme pour le théorème 1.2, on a :

Proposition 1.8 *Sous l'hypothèse $\mathbf{H_{p,d}}$, pour P-presque chaque $y \in V(x)$, le jacobien $J_y(\mathbf{c}) := \det\left(\frac{\partial \varphi_y^i}{\partial c_j}(\mathbf{c})\right)_{1\le i,j\le p}$ de φ_y est non nul pour presque chaque $\mathbf{c} \in (\mathbb{R}^+)^p$.*

On vérifie la convergence de $\varphi_{n,y}$ vers φ_y dans le sens de la proposition 1.7 en montrant la convergence des coefficients $B(\mathbf{a}^i, y, n)$ de chaque $\varphi_{n,y}^i$ vers leur analogue $B(\mathbf{a}^i, y)$ pour φ_y^i. Comme l'étude est très compliquée, on commence par le cas spécial où $y = x$, le point de référence de l'étape de localisation. Dans ce cas, on a

$$B(\mathbf{a}^i, x) = \sum_{\substack{\{I_k\} \text{ partition de} \\ \{1,\dots,d_i\},\ \text{card } I_k = a_k^i}}^{(1)} \ \sum_{\substack{A(\mathbf{a}^i) \text{ choix de} \\ t_{a_0^i+1},\dots,t_{d_i}}}^{(2)} \pm \tau^{a_1^i+\cdots+a_p^i} \sum_{t_1,\dots,t_{a_0^i}} \Big(\prod_{j\in I_0} \delta_x(t_j)\Big)\, f_i(t_1,\dots,t_{d_i}).$$

On observe que les sommes extérieures $\sum^{(1)}$ et $\sum^{(2)}$ sont finies et, en considérant $t_{a_0^i+1}, \dots, t_{d_i}$ comme des paramètres fixés, la somme intérieure $\sum_{t_1,\dots,t_{a_0^i}} \Big(\prod_{j\in I_0} \delta_x(t_j)\Big)\, f_i(t_1,\dots,t_{d_i})$ s'interprète grâce à la représentation (1.1.2) comme l'intégrale stable multiple $I_{a_0^i}(f_i^{n'}(\cdot, t_{a_0^i+1}, \dots, t_{d_i}))$ en dimension a_0^i. Mais alors comme $f_i^n \to f_i$ in $L^\alpha(\ln_+)^{d_i-1}([0,1]^{d_i})$ assure la convergence $f_i^{n'}(\cdot, t_{a_0^i+1}, \dots, t_{d_i}) \longrightarrow f(\cdot, t_{a_0^i+1}, \dots, t_{d_i})$ au moins pour une sous-suite (n') dans $L^\alpha(\ln_+)^{a_0^i-1}([0,1]^{a_0^i})$ pour presque chaque $t_{a_0^i+1}, \dots, t_{d_i}$, la convergence (1.1.6) assure celle de

$$\sum_{t_1,\dots,t_{a_0^i}} \Big(\prod_{j\in I_0} \delta_x(t_j)\Big)\, f_i^n(t_1,\dots,t_{d_i})$$

en probabilité et donc aussi la convergence des sommes extérieures en probabilité. Finalement, on a :

Lemme 1.9 *Dans $\mathbb{D}(\varepsilon)$, on a $B(\mathbf{a}^i, x, n) \xrightarrow{P} B(\mathbf{a}^i, x)$ quand $n \to +\infty$.*

En fait le même résultat est vrai pour tout $y \in V(x)$, comme en notant $(s_j)_j$ la liste des instants de saut de y, on a :

$$\begin{aligned} & B(\mathbf{a}^i, y, n) \\ = & \sum_{\substack{\{I_k\} \text{ partition de} \\ \{1,\dots,d_i\},\ \text{card } I_k = a_k^i}} \ \sum_{s_1,\dots,s_{d_i}} \Big(\prod_{j\in I_0} \delta_y(s_j)\Big)\Big(\prod_{j\in I_1} w_y^1(s_j)\Big)\cdots\Big(\prod_{j\in I_p} w_y^p(s_j)\Big)\, f_i^n(s_1,\dots,s_{d_i}) \end{aligned}$$

où les w^i sont associés aux champs locaux l^i (cf. après (1.1.4)). Une analyse précise des sauts de y, qu'on peut contrôler grâce à la localisation $y \in V(x)$, permet de réécrire encore

$$\begin{aligned} & B(\mathbf{a}^i, y, n) \\ = & \sum_{\substack{\{I_k\} \text{ partition de} \\ \{1,\dots,d_i\},\ \text{card } I_k = a_k^i}} \ \sum_{\substack{A(\mathbf{a}^i) \text{ choix de} \\ s_{a_0^i+1},\dots,s_{d_i}}} \pm\tau^{a_1^i+\cdots+a_p^i} \sum_{s_1,\dots,s_{a_0^i}} \Big(\prod_{j\in I_0} \delta_x(s_j)\Big)\, f_i^n(s_1,\dots,s_{d_i}) \end{aligned}$$

où $A(\mathbf{a}^i)$ est un produit de nombres d'arrangement $A(\mathbf{a}^i) = A_{b_1}^{a_1^i} \times \cdots \times A_{b_p}^{a_p^i}$. On peut alors étudier $B(\mathbf{a}^i, y, n)$ comme $B(\mathbf{a}^i, x, n)$. On obtient le même résultat que le lemme 1.9 pour P-presque chaque $y \in V(x)$ et donc la convergence des $\varphi_{n,y}$ vers φ_y. Finalement (en passant par des sous-suites), la proposition 1.7 assure

$$\lambda_{[0,\epsilon]^p} \varphi_y^{-1} \xrightarrow{var} \lambda_{[0,\epsilon]^p} \varphi_{n,y}^{-1}$$

et la méthode de superstructure conclut. $\square$

1.2 Intégrales de Wiener-Itô

La plupart des résultats de la section 1.1 pour les intégrales stables multiples étaient déjà bien connus pour les intégrales multiples de Wiener-Itô. Commençons par préciser quelques notations pour cette section. Si $(T, \mathcal{T}, \tau)$ est un espace mesuré, une mesure gaussienne W contrôlée par τ est un processus gaussien $\{W(A), A \in \mathcal{A}\}$ sur $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{T} \ : \ \tau(A) < +\infty\}$, vérifiant pour tout $A, B \in \mathcal{A}$, $\mathbb{E}[W(A)] = 0$ et $\mathbb{E}[W(A)W(B)] = \tau(A \cap B)$. On définit alors les intégrales multiples de Wiener-Itô

$$J_d(f) = \int_{T^d} f(t_1, \dots, t_d)\, dW(t_1) \cdots dW(t_d)$$

sur H_d l'espace de Hilbert des fonctions $f : T^d \to \mathbb{R}$ telles que $\|f\|_{H_d}^2 = \int_{T^d} |f(\mathbf{t})|^2 \tau^d(d\mathbf{t}) < +\infty$ en commençant par les fonctions simples et en prolongeant les propriétés suivantes $J_d(f) = J_d(S_d(f))$ et $\mathbb{E}[J_d(f) J_{d'}(g)] = \mathbf{1}_{\{d=d'\}} \langle S_d(f), S_d(g) \rangle_{H_d}$ où $S_d(f)$ est la symétrisée de $f \in H_d$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_d}$ est le produit scalaire de H_d.

La régularité des lois de ces intégrales a été étudiée il y a longtemps déjà. Par exemple, l'absolue continuité des lois de $J_d(f)$ quand $\|f\|_{H_d} \neq 0$ est obtenue par Shigekawa [117] avec un calcul de type Malliavin, par Kusuoka [81] par des méthodes algébriques ou par Davydov [34] par les méthodes que nous utilisons (stratification). De même, les lois jointes $(J_{d_1}(f_1), \dots, J_{d_p}(f_p))$ sont aussi absolument continues sous la condition $\mathbf{H_{d,p}}$, cf. [34].

Une version uni-dimensionnelle du théorème 1.3 existe pour les intégrales $J_d(f)$: Davydov et Martynova prouvent en effet le résultat suivant :

Théorème 1.10 *Soit $f \in L^2(T^d)$ symétrique non nulle. Alors il existe une constante $C := C(d, f)$ telle que pour toute suite $f_n \in L^2(T^d)$ convergeant vers f, on ait*

$$\|\mathscr{L}(I_d(f)) - \mathscr{L}(I_d(f_n))\|_{var} \leq C \|f - f_n\|_{L^2(T^d)}^{1/d}. \tag{1.2.1}$$

Ce résultat servira en section 3.2 pour obtenir des bornes de type Berry-Esséen pour la convergence des q-variations du mouvement brownien fractionnaire. Soulignons que pour la convergence en variation d'intégrales multiples $I_d(f_n)$ vers la loi $\mathscr{N}(0,1)$, des conditions optimales ont été données par [101], [100]. De plus, [96] montre que pour les intégrales multiples, la convergence en loi vers $\mathscr{N}(0,1)$ est équivalente à la convergence en variation totale. Dans [B-9], on a prouvé un vrai analogue du théorème 1.3 (c'est à dire en dimension quelconque), et donc une vraie généralisation du théorème 1.10 :

Théorème 1.11 *Soit $(f_1^n, \dots, f_p^n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $H_{d_1} \times \cdots \times H_{d_p}$ convergeant vers $(f_1, \dots, f_p)$. Si la condition $\mathbf{H_{d,p}}$ est satisfaite alors on a la convergence suivante, quand $n \to +\infty$,*

$$\mathscr{L}\big(J_{d_1}(f_1^n), \dots, J_{d_p}(f_p^n)\big) \xrightarrow{var} \mathscr{L}\big(J_{d_1}(f_1), \dots, J_{d_p}(f_p)\big). \tag{1.2.2}$$

Remarque 1.12

- Les mêmes exemples que ceux de la page 4 sont valables. Avec 1., on retrouve en particulier qu'une loi normale est non dégénérée si sa variance est non nulle, le 3. retrouvent la convergence de Davydov-Martynova. Enfin, noter que le 4. a été proposé dans [34] pour l'étude de l'absolue continuité des lois doubles.

- Une vraie généralisation du théorème 1.10 donnerait aussi la vitesse de convergence dans (1.2.2). Malheureusement, notre méthode ne permet pas de conserver une estimation de cette vitesse.

La preuve du théorème 1.11 reprend en l'adaptant au cas gaussien (plus simple) l'argument du théorème 1.3 : on écrit les intégrales $J_d(f)$ sous la forme de fonctionnelles stochastiques de processus gaussien auxquelles on va appliquer la méthode de superstructure. Les familles de transformations G_c à utiliser seront maintenant dirigées par des directions admissibles pour le processus gaussien.

En notant $\mathcal{W}$ l'application qui à $\omega \in \Omega$ associe la trajectoire de W dans $\mathcal{X} = \mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ et $F(x) = \displaystyle\int f d_d x$, on a $J_d(f(\omega)) = F(\mathcal{W}(\omega))$. Les directions admissibles de la loi $P = \mathbb{P}\mathcal{W}^{-1}$ de $\mathcal{W}$ sur $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ sont donnée par $\nu_h(A) = \int_A h d\tau$, $A \in \mathcal{A}$, pour $h \in H_1$, cf. [34, Prop. 2]. Remarquons qu'en notant $\widehat{P}_h$ la loi du translaté $W + \nu_h$, on a

$$\frac{d\widehat{P}_h}{dP}(x) = \exp\left\{\int h d_1 x - \frac{1}{2}\int h^2 d\tau\right\}. \tag{1.2.3}$$

De la même façon, on peut introduire $F_n = (F_1^n, \dots, F_p^n)$ et $F = (F_1, \dots, F_p)$ à partir respectivement de $f_1^n, \dots, f_p^n$ et de $f_1, \dots, f_p$ pour écrire

$$PF_n^{-1} = \mathscr{L}\big(J_{d_1}(f_1^n), \dots, J_{d_p}(f_p^n)\big), \quad PF^{-1} = \mathscr{L}\big(J_{d_1}(f_1), \dots, J_{d_p}(f_p)\big).$$

On applique la méthode de superstructure sur $\mathcal{X}_\epsilon = \mathcal{X} \times [0, \epsilon]^p$ et $Q_\epsilon = \epsilon^{-p}\lambda_{[0,\epsilon]^p} \otimes P$, $F_\epsilon(\mathbf{c}, x) = F(G_{\mathbf{c}}(x))$ et $F_{n,\epsilon}(\mathbf{c}, x) = F_n(G_{\mathbf{c}}(x))$ où $G_{\mathbf{c}}(x) = x + \langle \mathbf{c}, \nu\rangle = x + c_1\nu_1 + \dots + c_p\nu_p$, $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_p)$, avec $d\nu_i = h_i d\tau$ avec $h_i \in H_1$, $1 \le i \le p$. Noter que la condition $PG_{\mathbf{c}}^{-1} \xrightarrow{var} P$ quand $\mathbf{c} \to 0$ est satisfaite car pour tout $x \in \mathcal{X}$, $(dPG_{\mathbf{c}}^{-1}/dP)(x) \to 1$ en appliquant (1.2.3) à la translation $\langle \mathbf{c}, \nu\rangle$.

En raisonnant comme pour le théorème 1.11, il suffit de voir, pour P-presque chaque x, $\lambda_{[0,\epsilon]^p}\varphi_x^{-1} \xrightarrow{var} \lambda_{[0,\epsilon]^p}\varphi_{n,x}^{-1}$ où $\varphi_{n,x}(\mathbf{c}) = F_n(G_{\mathbf{c}}(x))$ et $\varphi_x(\mathbf{c}) = F(G_{\mathbf{c}}(x))$.

Pour cela, on applique à nouveau la proposition 1.7. Les $\varphi_{n,x}^i$ sont des polynômes (à plusieurs indéterminées) en $\mathbf{c}$

$$\varphi_{n,x}^i(\mathbf{c}) = \sum_{|\mathbf{a}| = d_i} \mathbf{c}^{\mathbf{a}} B_{\mathbf{a}} \int f_i^n \, d_{\mathbf{a}}\nu$$

avec $\int f^n d_{\mathbf{a}}\nu = \int \big(\int f^n d_{a_1}\nu_1 \dots d_{a_p}\nu_p\big) d_{a_0}x$ et $B_{\mathbf{a}}$ une constante. Il faut donc voir la convergence des intégrales $\int \big(\int f_i^n d_{a_1}\nu_1 \dots d_{a_p}\nu_p\big) d_{a_0}x = \int \Big(\int f_i^n h_1^{\otimes a_1} \dots h_p^{\otimes a_p} d_{d_i - a_0}\tau\Big) d_{a_0}x$. Les intégrales intérieures convergent car

$$\begin{aligned}
&\left\|\int f_i^n h_1^{\otimes a_1} \dots h_p^{\otimes a_p} d_{d_i - a_0}\tau - \int f_i h_1^{\otimes a_1} \dots h_p^{\otimes a_p} d_{d_i - a_0}\tau\right\|_{H_{a_0}}^2 \\
\le \quad & \|h_1\|_{H_1}^{2a_1} \dots \|h_p\|_{H_1}^{2a_p} \times \|f_i^n - f_i\|_{H_{d_i}}^2.
\end{aligned}$$

et les intégrales extérieures convergent aussi car la fonctionnelle F associée à f pour réécrire $J_d(f)$ dépend continument de $f \in H_d$, cf. [34]. Cela assure la convergence quand $n \to +\infty$ des intégrales $\int f^n d_{\mathbf{a}}\nu$ et finalement la proposition 1.7 conclut la preuve du théorème 1.11. $\square$

À titre d'application élémentaire du théorème 1.11, on donne un résultat pour les fonctionnelles de Wiener carré-intégrables $F \in L^2(\Omega, \mathcal{M}, \mathbb{P})$ où $\mathcal{M} = \sigma(W(A),\ A \in \mathcal{A})$. Il est bien connu que ces fonctionnelles ont une décomposition chaotique en somme d'intégrales multiples de Wiener-Itô :

$$F = \mathbb{E}[F] + \sum_{d=1}^{+\infty} I_d(f_d), \quad f_d \in K_d \tag{1.2.4}$$

où $K_d = S_d(H_d)$. Sous certaines hypothèses sur les intégrales du développement, on déduit dans [B-9] des convergences en variation de ces intégrales une convergence en variation pour les lois des fonctionnelles de Wiener quadratiques :

Corollaire 1.13 *Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $(F_n)_{n \ge 0}$ une suite de fonctionnelle quadratique de Wiener dont le k-ième terme $I_k(f_k^n)$ dans la décomposition* (1.2.4) *est indépendant des autres $I_d(f_d^n)$, $d \neq k$. Si $F_n \to F$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{M}, \mathbb{P})$ avec $f_k \neq 0$ dans la décomposition* (1.2.4) *de F, alors*

$$\mathscr{L}(F_n) \xrightarrow{var} \mathscr{L}(F), \quad n \to +\infty.$$

Comme $F_n \to F$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{M}, \mathbb{P})$, on montre (avec des notations évidentes) que $f_k^n \to f_k$ dans $L^2(T^k, \mathcal{T}^{\otimes k}, \tau^k)$ et donc, d'après le théorème 1.10, $\mathscr{L}(I_k(f_k^n)) \xrightarrow{var} \mathscr{L}(I_k(f_k))$ quand $n \to +\infty$ avec $\mathscr{L}(I_k(f_k)) \ll \lambda_k$. On conclut alors avec le résultat suivant dû à Parthasarathy et Steerneman [103, Th. 2.1] :

Proposition 1.14 *Soit $(X_n, Y_n), n \geq 1$, une suite de vecteurs aléatoires dans $\mathbb{R}^2$ tels que pour tout n, Y_n est indépendante de X_n, $X_n \xrightarrow{var} X$ et Y_n converge en loi vers Y. Alors $X_n + Y_n \xrightarrow{var} X + Y$ pourvu que la loi de X soit absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.*

Remarque 1.15

- On peut donner une estimation de la vitesse dans le corollaire 1.13 en utilisant un résultat de Davydov [36] sur la variation totale des convolutions. On a ainsi :

$$\|\mathscr{L}(F_n) - \mathscr{L}(F)\|_{var} \leq C\|F_n - F\|_{L^2(\Omega)}^{1/k} + w_{\mathscr{L}(I_k(f_k))}\left(\|F_n - F\|_{L^2(\Omega)}^{2/3}\right)$$

  pour une constante $C < +\infty$ et où $w_\mu(t) = \sup_{|x|\leq t} \|\mu - \mu T_x^{-1}\|_{var}$ désigne le module de régularité de μ (avec $T_x(y) = x + y$). Cependant, il faut davantage d'information sur f_k pour déterminer exactement l'ordre de l'estimation.

- Pour vérifier la condition d'indépendance entre $I_k(f_k^n)$ et les autres termes du développement chaotique, on peut appliquer le critère de Üstunel et Zakaï [127], voir aussi [70] : $I_k(f)$ et $I_l(g)$ sont indépendantes *ssi* $f \otimes_1 g = 0$ presque partout, où $\otimes_1$ est l'opérateur de contraction donné pour $f \in H_k$ et $g \in H_l$ par la fonction $f \otimes_1 g \in L^2(T^{k+l-2})$ définie par

$$f \otimes_1 g(s_1, \dots, s_{k-1}, t_1, \dots, t_{l-1}) = \int_T f(s_1, \dots, s_{k-1}, u) g(t_1, \dots, t_{l-1}, u)\, \tau(du).$$

1.3 Intégrales de Poisson

On observe que l'efficacité de la méthode de stratification pour les intégrales stables repose (notamment) sur la représentation discrète de ces intégrales par séries de type LePage. En effet, en simplifiant l'idée, ces représentations permettent de tirer des propriétés (absolue continuité, continuité pour la variation totale) d'un terme prépondérant en conditionnant par le reste qu'on contrôle. Cela nous a amené à nous intéresser dans [B-17] à d'autres intégrales stochastiques à représentation discrète, les intégrales de Poisson et plus généralement les « *shot noise series* »(ou séries de bruit de grenaille).

Étant données $(\Delta_i)_{i\geq 1}$ une suite de vecteurs *iid* dans $\mathbb{R}^d$ de loi σ, sans atome en 0 et, indépendamment, $(T_i)_{i\geq 1}$ la suite des sommes partielles de variables exponentielles de paramètre α, on considère une *shot noise* série

$$I = \sum_{i=1}^{+\infty} h(T_i, \Delta_i) \tag{1.3.1}$$

où h est mesurable de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$. La série I est bien définie presque sûrement *ssi*

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} (|h(t,x)|^2 \wedge 1) dt \sigma(dx) < +\infty \tag{1.3.2}$$

et la limite suivante existe

$$a(h) := \lim_{s \to +\infty} \int_0^s \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} h(t,x) \mathbf{1}_{|h(t,x)|\leq 1} dt \sigma(dx) \tag{1.3.3}$$

cf. [111, Th. 4.1]. En particulier, (1.3.2)–(1.3.3) sont vérifiées si $h \in L^1(\lambda \otimes \sigma)$ et dans ce cas $\mathbb{E}[|I|] \leq \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} |h(t,x)| dt \sigma(dx)$. De plus, les lois des it shot noises series sont infiniment divisibles de fonctions caractéristiques

$$\phi_I(u) = \exp\left(ia(h)u + \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}}\left(e^{iuh(t,x)} - 1 - iuh(t,x)\mathbf{1}_{|h(t,x)|\leq 1}\right) dt\sigma(dx)\right).$$

Leur appelation vient de leur interprétation comme effet cumulé d'un signal répété Δ filtré : on voit alors $h(T_i,\Delta_i)$ comme l'effet à une date de référence du signal Δ_i émis T_i unité de temps avant et filtré par h ; I représente alors l'effet cumulé. Selon cette interprétation, il est d'usage de supposer que, pour tout x, $|h(\cdot,x)|$ est décroissante, de sorte que l'amplitude de l'effet décroît avec le temps. On renvoie à [111] pour une description plus détaillée des *shot noise series*. Signalons qu'avec ce type d'interprétation ces séries sont utilisées pour modéliser le traffic internet. Dans de tels modèles, les sessions internet sont supposées aléatoirement ouvertes selon un processus de Poisson de dates d'arrivée $(T_i)_i$ et pour des durées aléatoires $(\Delta_i)_i$. La série I représente alors le flux agrégé généré par les sessions aléatoires, on renvoie à [8] pour une analyse par *shot noise series* de Poisson du traffic internet. On renvoie également à la section 3.3 pour l'étude d'autres modèles liés à des réseaux de communications sans fil.

Ces séries s'interprètent aussi comme des intégrales de Poisson et en fonction du choix de h, on retrouve plusieurs cas. Considérons une mesure de Poisson N sur $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d$ compensée par $dt\nu(dx)$ et notons Δ_i les sauts du processus ponctuel de Poisson (multidimensionnel) $Z(t) = \int_0^t\int_{|x|\geq 1} xN(ds,dx)$ dans $B_1^c = \{x\in\mathbb{R}^d : |x|\geq 1\}$ et T_i leur date, alors avec les choix

$$h(t,x) = f(t,x)\mathbf{1}_{|x|\geq 1},\quad \alpha = 1/\nu(B_1^c),\quad \sigma = \nu(\cdot\cap B_1^c)/\nu(B_1^c),$$

la *shot noise* série (1.3.1) est une représentation de

$$\int_0^{+\infty}\int_{|x|\geq 1} f(t,x)N(dt,dx). \tag{1.3.4}$$

Dans le cas particulier où $f(t,x) = xg(t)$ en dimension $d=1$, (1.3.4) est l'intégrale non compensée de l'intégrale de type Lévy

$$\int_0^{+\infty} g(s)dY_s = \int_0^{+\infty}\int_{|x|<1} xg(s)\widetilde{N}(ds,dx) + \int_0^{+\infty}\int_{|x|\geq 1} xg(s)N(ds,dx) \tag{1.3.5}$$

où Y est le processus de Lévy donné par $Y_t = \int_0^t\int_{|x|<1} x\widetilde{N}(ds,dx) + \int_0^t\int_{|x|\geq 1} xN(ds,dx)$ et $\widetilde{N}(ds,dx) = N(ds,dx) - ds\nu(dx)$ est la mesure de Poisson compensée. Dans ce cas, l'étude de (1.3.1) donne un éclairage sur les lois d'intégrale de Lévy.

Si la mesure ν du compensateur de N est finie sur $\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$, alors on peut calculer l'intégrale de Poisson directement sur $\mathbb{R}^+\times(\mathbb{R}^d\setminus\{0\})$ plutôt que $\mathbb{R}^+\times B_1^c$. Dans ce cas, on définit T_i comme les dates des sauts Δ_i de Z (sans restriction de taille). Avec les choix

$$h(t,x) = f(t,x),\quad \alpha = 1/\nu(\mathbb{R}^d\setminus\{0\}),\quad \sigma = \nu(\cdot\cap(\mathbb{R}^d\setminus\{0\}))/\nu((\mathbb{R}^d\setminus\{0\})$$

la *shot noise* série (1.3.1) représente

$$\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} f(t,x)N(dt,dx). \tag{1.3.6}$$

Des problèmes spécifiques apparaissent dans le cas où les intégrales de Poisson (1.3.4) et (1.3.6) sont calculées en temps sur $[0,t]$ (c'est à dire respectivement $h(s,x) = f(s,x)\mathbf{1}_{[0,t]\times B_1^c}(s,x)$ et $h(s,x) = f(s,x)\mathbf{1}_{[0,t]\times(\mathbb{R}^d\setminus\{0\})}(s,x)$), puisque dans ce cas, la *shot noise* série est une série tronquée $I(t) = \sum_{i\geq 1\,:\,T_i\leq t} h(T_i,\Delta_i)$. Noter que selon l'interprétation des *shot noise series*, la série tronquée $I(t)$ donne l'effet cumulé seulement des plus récents signaux.

Dans [B-17], nous proposons des conditions de régularité (absolue continuité, convergence en variation totale) des lois des *shot noise series* en fonction du « filtre » h et du compensateur σ.

Typiquement, nos conditions sont exprimées en termes de mesures image du type $\lambda_{\mathbb{R}^+} \otimes \sigma$. Notons qu'une littérature abondante s'intéresse à l'absolue continuité des lois de processus dans des cadres proches de celui considérés dans [B-17]. Ainsi, des résultats généraux d'absolue continuité sont donnés pour des lois infiniment divisibles par Sato, cf. [116], pour des solutions d'équations différentielles stochastiques dirigées par une mesure de Poisson dans, par exemple, [27], [38], [43], [94]. Pour les processus de Lévy, des phénomènes de transition dans le temps (passage de lois continues singulières à des lois absolument continues) sont décrits dans [128]. Plus récemment, des résultats d'absolue continuité ont été proposés pour des processus de Lévy avec *drift* non linéaire dans [94], pour des intégrales de processus de Lévy dans [14], ou pour des fonctionnelles de processus de Poisson dans [24] et [80]. Les résultats de [24] sont obtenus par le calcul de Malliavin dans un contexte de formes de Dirichlet. Les arguments de [94] et [14] sont fondés sur la méthode de stratification tandis que [80] en utilise une généralisation, appellée la méthode d'« étirement en temps » (*time-stretching method*). En la simplifiant, la méthode de Kulik dans [80] consiste à considérer une transformation T_h, $h \in L^2(\mathbb{R}^+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^+)$, sur l'espace des configurations d'une mesure ponctuelle de Poisson en étirant chaque intervalle temporel infinitésimal $[t, t+dt)$ d'un facteur $e^{h(t)}$. Kulik propose alors des résultats d'absolue continuité et de convergence en variation pour les fonctionnelles sur l'espace de configurations lorsqu'elles vérifient une certaine régularité pour une dérivabilité par rapport à cette transformation, cf. Th. 2.1, 2.2, 2.3 de [80].

Pour un processus de Poisson, l'action de ces tranformations consiste à perturber le saut T_i du processus, les résultats de [80] s'appliquent alors quand la fonction h est régulière en temps t. Cette méthode demande donc, en particulier, que h soit dérivable en temps. Nos résultats sont moins généraux mais plus directs et ne requièrent pas de régularité pour h puisqu'on exprime nos conditions en termes de mesure image. Cependant lorsque h est assez régulière, on peut proposer des conditions suffisantes plus explicites. Pour cela, on dispose par exemple du théorème 4.3 dans [37], de la proposition 1.7 pour l'absolue continuité, cf. [2], ou de [35] pour la variation totale.

Comme pour les sections 1.1 et 1.2, le point clef de nos preuves se résume à déduire les propriétés cherchées de la loi de I de celles d'un seul terme de la série (1.3.1) par des conditionnements. Pour cela, une étape cruciale est donc de conditionner, pour un $p > 1$, par l'instant de saut T_{p+1} et de déduire la régularité de la loi de I de celle des premiers termes de la série. En nous inspirant de l'application de la méthode de stratification dans [94], nous travaillons ainsi (sans qu'il n'y ait de restriction) avec l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désintégré :

$$\left(\bar{\Omega}_{p+1} \times [0, T_{p+1}(\bar{\omega})]^p \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\}), \mathcal{F}^*_{p+1} \times \mathcal{B}([0, T_{p+1}(\bar{\omega})]^p) \times \mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\}), \bar{\mathbb{P}}_{p+1} \otimes \bar{\lambda}^{stat}_{[0, T_{p+1}(\bar{\omega})]} \otimes \sigma\right) \tag{1.3.7}$$

où $\mathcal{F}^*_{p+1} = \sigma(T_i, \Delta_i : i \geq p+1)$ et $\bar{\lambda}^{stat}_{[0, T_{p+1}(\bar{\omega})]}$ est la loi de la statistique d'ordre uniforme de dimension p sur $[0, T_{p+1}(\bar{\omega})]$. Dans ce cas, les lois des fonctionnelles F sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ se réécrivent pour tout mesurable A :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(F \in A) &= \mathbb{P}(F(\bar{\omega}, T_1, \Delta_1, \dots, T_p, \Delta_p) \in A) \\ &= \bar{\mathbb{E}}_{p+1}\left[\frac{1}{T_{p+1}(\bar{\omega})^p} \int_{(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})^p} \int_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_p \leq T_{p+1}(\bar{\omega})} \mathbf{1}_{\{F(\bar{\omega}, t_1, x_1, \dots t_p, x_p) \in A\}} \prod_{i=1}^p dt_i \sigma(dx_i)\right] \end{aligned}$$

où $\bar{\mathbb{E}}_{p+1}$ est l'espérance par rapport à $\bar{\mathbb{P}}_{p+1}$.

On commence par proposer des résultats d'absolue continuité de la loi de I. Notons que, comme la loi de chaque T_i est équivalente à $\lambda_{\mathbb{R}^+}$, la condition $(\lambda_{\mathbb{R}_+} \otimes \sigma)h^{-1} \ll \lambda$ donne l'absolue continuité de chaque terme mais comme ils sont dépendants, cela n'implique pas directement l'absolue continuité de la série I. Cependant, on a quand même :

Proposition 1.16 *Si pour un* $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, *on a*

$$((\lambda_{\mathbb{R}_+} \otimes \sigma)h^{-1})^{*p} \ll \lambda \tag{1.3.8}$$

alors la loi de I *défini en* (1.3.1) *admet une densité.*

Sur l'espace désintégré $\bar{\Omega}_{p+1} \times [0, T_{p+1}(\bar{\omega})]^p \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})^p$ donné en (1.3.7), la loi de I se réécrit comme le mélange $\mu = \int_{\bar{\Omega}_{p+1}} \mu_{\bar{\omega}} \, \bar{\mathbb{P}}_{p+1}(d\bar{\omega})$ de mesures conditionnelles $\mu_{\bar{\omega}} = \mathscr{L}(I|\mathcal{F}^*_{p+1})(\bar{\omega})$ dont il suffit de voir l'absolue continuité pour $\bar{\mathbb{P}}_{p+1}$-presque chaque $\bar{\omega}$. Mais en conditionnant par $\mathcal{F}^*_{p+1}$, $\mu_{\bar{\omega}}$ est la loi de $\sum_{i=1}^p h(T'_i, \Delta_i) + \Sigma_{p+1}(\bar{\omega})$ où $\Sigma_{p+1}(\bar{\omega}) = \sum_{i \geq p+1} h(T_i, \Delta_i)$ est fixé (par le conditionnement). On étudie donc en fait la loi de $\sum_{i=1}^p h(U_i, \Delta_i)$ où $(U_i)_{1 \leq i \leq p}$ sont des variables uniformes *iid* sur $[0, T_{p+1}(\bar{\omega})]$. L'hypothèse (1.3.8) conclut. □

Remarque 1.17 (Comparaison avec Sato [116], Kulik [80], Bertoin *et al.* [14])
Des conditions assurant l'absolue continuité de loi infiniment divisible sans partie gaussienne sont données par exemple dans le livre de Sato [116, Th. 27.7] ou par Kulik [80] pour des fonctionnelles de processus ponctuel de Poisson. Le cas d'intégrale de processus de Lévy est considéré par Bertoin *et al.* dans [14].

- Ainsi dans [116, Th. 27.7], $\tilde{\nu}^{*p} \ll \lambda$ pour un $p > 0$ est montré comme suffisante pour l'absolue continuité de I (où on a noté $\tilde{\nu}(dx) = (x^2 \wedge 1)(\lambda \otimes \sigma)h^{-1}(dx)$). En general $\tilde{\nu}^{*p} \ll ((\lambda_{\mathbb{R}_+} \otimes \sigma)h^{-1})^{*p}$ et la condition dans [116] est plus faible que (1.3.8). Cependant quand pour un $p > 0$ $((\lambda_{\mathbb{R}_+} \otimes \sigma)h^{-1})^{*p}$ n'a pas d'atome en zéro, alors $\tilde{\nu}^{*p} \asymp (\lambda_{\mathbb{R}_+} \otimes \sigma)h^{-1})^{*p}$ et les conditions se valent.
- Comme expliqué précedemment, les résultats de Kulik dans [80] par la *time-stretching method* s'applique avec un comportement régulier de h le long de sa variable temporelle.
- Des arguments proches de ceux utilisés dans [B-17] permettent de donner des critères d'absolue continuité pour les lois de $\int_{(0,+\infty)} g(\xi_t) dY_t$ où $\xi = (\xi_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Lévy transcient et Y un processus à variations bornées et à trajectoires *càdlàg*, cf. [14, Th. 3.9]. Notons que les intégrales étudiées dans [14] sont plus générales ; cependant nos résultats, avec des conditions exprimées facilement en fonction des intégrants et des mesures de contrôle, sont plus directs. De plus, nous considérons ci-dessous l'absolue continuité des lois quand on isole un possible atome en zéro et la régularité des lois en variation totale.

Dans le cas de *shot noise series* $I(t)$ tronquées, il y a un atome évident de la loi en 0 et la proposition 1.16 ne s'applique pas. En travaillant plus, on propose dans [B-17] le résultat suivant pour l'absolue continuité sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Nous l'énonçons pour une série I générale même si nous pensons d'abord aux séries tronquées $I(t)$:

Proposition 1.18 *Supposons que*

$$((\lambda_{\mathbb{R}_+} \otimes \sigma)h^{-1})_{|\mathbb{R}\setminus\{0\}} \ll \lambda, \tag{1.3.9}$$

alors la loi de I dans (1.3.1) *est absolument continue par rapport à λ sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (avec possiblement un atome en* 0*).*

En la simplifiant, la preuve de la proposition 1.18 se résume à se ramener, après avoir au préalable isoler par conditonnement le possible atome de la loi en 0, à l'étude de $h(T_{N_1}, \Delta_{N_1})$ où N_1 est l'indice du premier terme non nul dans la série I. Pour cela, on conditionne par le deuxième terme présent dans la série (s'il est présent, sinon on s'arrange autrement) et on utilise l'indépendance (conditionnelle) entre le premier terme et les termes restants. Les propriétés de la loi de I se déduisent alors de celles de la loi (conditionnelle) du premier terme présent dans la série, pour lequel la condition (1.3.9) conclura. □

On a déjà indiqué que le cas spécial $h(t, x) = xg(t)$ permettait de s'intéresser à des intégrales de type Lévy cf. (1.3.5). Dans ce cas, les propositions 1.16 et 1.18 peuvent se préciser avec des conditions en termes de g :

Corollaire 1.19 *On considère la shot noise série I donnée en* (1.3.1) *mais avec $h(t, x) = xg(t)$ où $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$.*

1. $\mathscr{L}(I) \ll \lambda$ *sur* $\mathbb{R}$ *si* $\lambda_{\mathbb{R}_+} g^{-1} \ll \lambda$.
2. $\mathscr{L}(I) \ll \lambda$ *sur* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *si* $(\lambda_{\mathbb{R}_+} g^{-1})_{|\mathbb{R}\setminus\{0\}} \ll \lambda$.

On propose ensuite des résultats de régularité de la loi de la *shot noise* série par rapport au « filtre » pour la variation totale. Une nouvelle fois, notre approche (bien que moins générale) est plus directe que celle de Kulik (cf. théorème 2.2 dans [80]) et surtout n'exige a priori aucune régularité des filtres. On renvoie à la proposition 1.7 ou [35] pour obtenir des conditions plus explicites. Dans le cas où les densités existent (c'est le cas sous les confitions des propositions 1.16, 1.18), les convergences en variation sont des convergences dans $L^1(\mathbb{R})$ des densités.

Proposition 1.20 *Soient* h_n, h *vérifiant* (1.3.2)–(1.3.3). *Supposons que*

1. $\lim_{n\to+\infty} a(h_n) = a(h)$,
2. $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} (|h_n(t,x) - h(t,x)|^2 \wedge 1) dt\sigma(dx) = 0$,
3. $(\lambda_{\mathbb{R}_+} \otimes \sigma) h^{-1} \ll \lambda$,
4. *et pour tout* $t > 0$ *:*
$$(\lambda_{[0,t]} \otimes \sigma) h_n^{-1} \xrightarrow{var} (\lambda_{[0,t]} \otimes \sigma) h^{-1}. \tag{1.3.10}$$

Alors $\mathscr{L}(I_n) \xrightarrow{var} \mathscr{L}(I)$ *quand* $n \to +\infty$.

La condition principale est (1.3.10) qui permet d'avoir

$$\tilde{\mu}_{n,1} := \mathscr{L}(h_n(U, \Delta_1)) \xrightarrow{var} \tilde{\mu}_1 := \mathscr{L}(h(U, \Delta_1)) \tag{1.3.11}$$

pour toute variable U uniforme sur $[0,t]$ indépendante de Δ_1, d'où la proposition 1.20 va venir. Avec l'espace désintégré comme en (1.3.7) (en prenant $p = 2$), la variation totale s'écrit

$$\|\mu_n - \mu\|_{var} = \int_{\bar{\Omega}_0} \|\mu_{n,\bar{\omega}} - \mu_{\bar{\omega}}\|_{var}\ \bar{\mathbb{P}}_2(d\bar{\omega}). \tag{1.3.12}$$

On constate que la mesure $\mu_{n,\bar{\omega}}$ est la loi de $h_n(T_1', \Delta_1) + \Sigma_2^n$ où $T_1' \stackrel{\mathscr{L}}{=} \mathscr{L}(T_1 | T_2(\bar{\omega}))$ est uniforme sur $[0, T_2(\bar{\omega})]$ et où on rappelle que $\Sigma_2(\bar{\omega}) = \sum_{i\geq 2} h_n(T_i, \Delta_i)$ est fixé (par le conditionnement). Le résultat vient alors de (1.3.11) quand on montre en plus grâce aux autres hypothèses (en particulier 2.) que $\Sigma_2^n \xrightarrow{\bar{\mathbb{P}}} \Sigma_2$. En effet la convergence $\tilde{\mu}_{n,1} \xrightarrow{var} \tilde{\mu}_1$ combinée avec $\Sigma_2^n \xrightarrow{\bar{\mathbb{P}}} \Sigma_2$ permet d'en déduire la convergence des mesures $\tilde{\mu}_{n,1}$ translatée par Σ_2^n vers $\tilde{\mu}_1$ translatée par Σ_2. Notez que pour cela, il faut garantir l'absolue continuité de $\tilde{\mu}_1$ (pour appliquer la continuité de l'opérateur de translation dans $L^1(\mathbb{R})$) ce qui est assuré par la condition 3. Notez aussi qu'on a effectivement besoin de la condition (1.3.10) pour tout $t > 0$ (c'est insuffisant de la supposer par exemple seulement pour $t = +\infty$) car on se sert de (1.3.11) pour une loi uniforme T_1' *a priori* sur n'importe quel intervalle $[0,t]$. □

Si $h_n, h \in L^1(\lambda_{\mathbb{R}_+} \otimes \sigma)$ alors les conditions (1.3.2)–(1.3.3) sont assurées. Si de plus $\lim_{n\to+\infty} h_n = h$ dans $L^1(\lambda_{\mathbb{R}_+} \otimes \sigma)$, alors les conditions 1 et 2 de la proposition sont satisfaites. Par ailleurs, en adaptant la preuve, on pourrait supposer $((\lambda_{\mathbb{R}_+} \otimes \sigma) h^{-1})^{*p} \ll \lambda$ et $((\lambda_{\mathbb{R}_+} \otimes \sigma) h_n^{-1})^{*p} \xrightarrow{var} ((\lambda_{\mathbb{R}_+} \otimes \sigma) h^{-1})^{*p}$ pour un $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ dans les Conditions 3 et 4. Dans le cas $d = 1$ et $h_n(t,x) = x g_n(t)$, la proposition se réécrit :

Corollaire 1.21 *On considère les shot noise series* $I_n = \sum_{k\geq 1} \Delta_k g_n(T_k)$ *associées à une loi* σ *avec un moment d'ordre* 1 *et* $g_n \in L^1(\lambda_{\mathbb{R}_+})$. *Si* $g_n \to g$ *dans* $L^1(\lambda_{\mathbb{R}_+})$, $\lambda_{\mathbb{R}_+} g^{-1} \ll \lambda$ *et pour tout* $t > 0$

$$\lambda_{[0,t]} g_n^{-1} \xrightarrow{var} \lambda_{[0,t]} g^{-1}. \tag{1.3.13}$$

Alors $\mathscr{L}(I_n) \xrightarrow{var} \mathscr{L}(I)$ *quand* $n \to +\infty$.

Enfin, pour les séries tronquées $I(t)$, il y a nécessairement un atome en 0 et la proposition 1.20 ne peut pas s'appliquer. Cependant, comme pour la proposition 1.18, on peut proposer un résultat pour les séries tronquées :

Proposition 1.22 *Soient f_n et f telles que les shot noise series $I_n(t)$, $I(t)$ soient bien définies pour un $t > 0$ fixé. Supposons que*

$$(\lambda_{[0,t]} \otimes \sigma) f_n^{-1} \xrightarrow{var} (\lambda_{[0,t]} \otimes \sigma) f^{-1}. \tag{1.3.14}$$

Alors $\mathscr{L}(I_n(t)) \xrightarrow{var} \mathscr{L}(I(t))$ quand $n \to +\infty$.

Comme les séries tronquées sont finies, on se ramène au cas de sommes finies $\sum_{k=1}^{i} f_n(U_k, \Delta_k)$ et $\sum_{k=1}^{i} f(U_k, \Delta_k)$ où les U_k $(1 \le k \le i)$ sont des variables *iid* uniformes sur $[0,t]$. Comme les lois de ces sommes sont des convolutions de loi du type $(\lambda_{[0,t]} \otimes \sigma) f_n^{-1}$, on déduit le résultat de (1.3.14) par convolution. □

Finalement, pour des fonctions $f(s,x) = xg(s)$, la proposition 1.22 se réécrit :

Corollaire 1.23 *Soit pour un $t > 0$ fixé, g_n telle que la shot noise série $I(t)$ associées à $h_n(s,x) := xg_n(s)$ est bien définie. On suppose que*

$$\lambda_{[0,t]} g_n^{-1} \xrightarrow{var} \lambda_{[0,t]} g^{-1}, \quad n \to +\infty. \tag{1.3.15}$$

Alors les lois $\mathscr{L}(I_n(t))$ convergent en variation totale vers $\mathscr{L}(I(t))$ quand $n \to +\infty$.

Chapitre 2

Concentration et comparaison

Dans cette partie, nous nous intéressons à certains contrôles de lois de fonctionnelles stochastiques. Nous proposons d'abord des inégalités de concentration, *i. e.* des bornes en x sur $P(F - a_F \geq x)$ pour une fonctionnelle F et où a_F est une valeur de référence (en général, l'espérance $E[F]$ ou la médiane $m(F)$). On propose de telles bornes en section 2.1 pour des fonctionnelles F sur l'espace de Poisson lorsque qu'un gradient aux différences DF est correctement contrôlé. Nos résultats sont fondés sur des identités de représentation de la covariance et nous les déclinons dans différents cas (intégrales de Poisson, vecteurs infiniment divisibles, fonctionnelles de Wiener quadratiques). Le cas stable pour lequel les arguments de type L^2 deviennent invalides est spécifiquement étudié : on montre qu'en remplaçant le contrôle strict du gradient par un contrôle de son grossissement, des inégalités de concentration subsistent.

Dans la section 2.2, ce sont des contrôles par comparaison convexe qu'on propose pour des processus de diffusion avec sauts : grâce à des techniques *forward-backward* développées par Klein, Ma et Privault, on montre en effet que de bonnes comparaisons des caractéristiques de diffusion d'une part et des caractéristiques de sauts d'autre part assurent une comparaison convexe des processus. Dans le cas d'exponentielles stochastiques, les processus considérés sont des processus de prix et la comparaison convexe s'interprète comme des bornes sur les prix d'options financières.

2.1 Inégalités de concentration

Nous parlerons d'inégalités de concentration pour une loi μ lorsqu'on borne les probabilités du type $\mathbb{P}(f(X) - \mathbb{E}[f(X)] \geq x)$ où $X \sim \mu$ et f est une fonction lipschitzienne. Ce type de phénomène est motivé par des questions théoriques (en géométrie, en analyse fonctionnelle et bien sûr en probabilité) et fournit un outil utile dans de nombreux arguments. Typiquement, ces bornes quantifient la concentration d'une variable aléatoire autour d'une valeur particulière (en général son espérance ou sa médiane) et de façon générale, même si la loi de $f(X)$ est inconnue, l'inégalité de concentration donne un éclairage sur la loi de $f(X)$. Nous rappelons que certaines bornes pour la concentration sont typiques de certaines lois : ainsi on parle de concentration gaussienne quand la borne est du type $C\exp(-cx^2)$, poissonienne quand elle est en $C\exp(-cx\ln x)$ et stable pour C/x^α ($0 < c,\ C < +\infty$ sont des constantes génériques).

Dans cette section, nous proposons des inégalités de concentration pour des fonctionnelles stochastiques F sur l'espace de Poisson $\Omega^{\mathcal{X}}$ (muni d'une mesure de Poisson d'intensité ν) à valeurs réelles lorsqu'un gradient aux différences DF est bien contrôlé. Commençons par décrire quelques approches classiques pour obtenir des inégalités de concentration pour une loi μ. Une approche féconde consiste à utiliser des inégalités de Sobolev logarithmiques

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2) \leq C_\mu \mathcal{E}_\mu(f, f) \tag{2.1.1}$$

où, en notant $\mathbb{E}_\mu$ l'espérance par rapport à μ, $\mathrm{Ent}_\mu(g) = \mathbb{E}_\mu[g \ln g] - \mathbb{E}_\mu[g]\mathbb{E}_\mu[\ln g]$ est l'entropie de g, $\mathcal{E}_\mu(g, g) = \mathbb{E}_\mu[(\nabla g)^2]$ est l'énergie de g et C_μ est une constante qui ne dépend que de μ. Il s'agit de déduire d'inégalites (2.1.1), appliquées à e^{tf}, des inégalités différentielles pour la transformée de Laplace $\mathbb{E}_\mu[e^{tf}]$. On obtient alors un contrôle de $\mathbb{E}_\mu[e^{tf}]$ et des probabilités de concentration pour μ en appliquant l'inégalité (exponentielle) de Tchebychev (argument de Herbst), voir [85].

Dans cette approche, la difficulté est d'obtenir des inégalités du type (2.1.1) pour bon nombre de lois μ. L'idée est de passer de mesures simples μ à des mesures plus compliquées ν en tensorisant (si possible) l'inégalité pour μ (ce qui permet de passer de (2.1.1) pour μ à (2.1.1) $\mu^{\otimes n}$) et d'utiliser une procédure limite (type TCL), c'est ainsi que procède Gross [47] pour la loi normale à partir de la loi de Bernoulli symétrique. Cependant souvent les inégalités (2.1.1) ne sont pas tensorisables et on manipule plutôt des inégalités de Sobolev logarithmiques *modifiées* qui deviennent tensorisables. Bobkov et Ledoux [20] obtiennent les premiers (1998) ce type d'inégalités modifiées et des inégalités de concentration pour des lois de Poisson. Dans un cadre poissonien des généralisations ont été proposées par Ané et Ledoux [3] et Wu [129] pour des fonctionnelles stochastiques F. En particulier, [129] montre que les conditions $DF \leq K$, $P \otimes \nu$-p.p. et $\|DF\|_{L^\infty(\Omega^{\mathcal{X}}, L^2\mathcal{X},\nu))} \leq \alpha$ pour $0 \leq \alpha, K < +\infty$ assurent un contrôle poissonien de la concentration de F. En suivant la même approche, Kontoyiannis et Madiman donnent des bornes de concentration polynomiales pour les lois de Poisson composé (avec suffisamment d'intégrabilité), cf. [74].

Une autre approche qui retrouve le même type de borne, voir par exemple [54, Cor. 4.3], est fondée sur des identités de représentation de la covariance. Ce sont des identités de ce type (voir (2.1.3) ci-dessous) qu'on utilise dans cette section pour établir des inégalités de concentration pour des fonctionnelles stochastiques sur l'espace de Poisson. Plusieurs identités de représentation de la covariance sont établies et utilisées par Houdré et ses co-auteurs : par exemple, les cadres Wiener et Poisson sont étudiés dans [50], infiniment divisibles (ID) dans [51], [52], gaussien et Bernoulli dans [21] et le cadre infini-dimensionnel est considéré dans [54]. À titre d'exemple, dans un cadre gaussien standard en dimension n (avec $X \sim \mathscr{N}(0, I_n)$), on a l'identité de covariance :

$$\mathrm{Cov}(F, G) = \int_0^{+\infty} \mathbb{E}[\langle \nabla F(X), \nabla (P_t G)(X)\rangle] dt \tag{2.1.2}$$

où $P_t G(x) = \mathbb{E}[G(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}X)]$ est le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$, cf. [21].

En appliquant (2.1.2) à F et $G = e^{tF}$, on obtient une inéquation différentielle qui donne une borne sur la tranformée de Laplace $\mathbb{E}[e^{tF}]$ de F puis, à nouveau par l'inégalité de Tchebychev, une inégalité de concentration pour F (voir l'esquisse de preuve de la Prop. 2.1). Cette stratégie remonte à [52] et à [21]. Des inégalités de concentration sont ainsi données pour des vecteurs infiniment divisibles (sans composante gaussienne) à mesure de Lévy à support borné dans [53], pour des vecteurs stables dans [55]. Enfin, notons que ces identités permettent d'obtenir des inégalités libres de la dimension pour des vecteurs ID à moment exponentiel fini dans [56].

Signalons encore l'analogie entre les identités de covariance (2.1.2) et l'approche récente de Nourdin et Viens qui proposent dans [97] des inégalités de concentration pour les fonctionnelles gaussiennes centrées assez régulières pour le calcul de Malliavin ($F \in \mathbb{D}^{1,2}$). Leurs résultats reposent sur un contrôle d'une fonction $g_F(x) = \mathbb{E}[\langle DF, -DL^{-1}F\rangle | F = x]$ pour F centrée (où, ici, D est la dérivée de Malliavin, L^{-1} l'inverse du générateur d'Ornstein-Uhlenbeck L). Encore une fois, ce contrôle permet d'obtenir une inégalité différentielle pour la transformée de Laplace de F. En fait, la quantité $\langle DF, -DL^{-1}F\rangle$ (analogue à celle qui est dans (2.1.2)) apparaît dans [96] dont on discutera en section 3.2.

Dans [BHP-10] (avec Christian Houdré et Nicolas Privault) et dans [BH-11] (avec Christian Houdré) nous donnons des inégalités pour des fonctionnelles sur l'espace de Poisson qui retrouvent notamment des résultats de [129]. Ce cadre est adapté à l'étude d'intégrales de Poisson auxquelles on s'intéresse ensuite. En fait comme les vecteurs infiniment divisibles (sans partie gaussienne) peuvent se représenter sous forme d'intégrales de Poisson, on spécialise nos résultats pour des fonctionnelles (lipschitziennes) de vecteurs infiniment divisibles. Quand la norme considérée sur $\mathbb{R}^2$ est ℓ^2, on montre en suivant [56] que des inégalités libres de la dimension s'obtiennent (section 2.1.1) et on propose en particulier des inégalités libres de la dimension qui généralisent celles de [56] (section 2.1.1). On retrouve certains résultats connus pour les fonctionnelles de Wiener quadratiques [60], [91], [23], [83], [90] (section 2.1.2). Comme nous travaillons dans un contexte sans variance, il ne semble plus possible *a priori* de disposer d'une covariance à laquelle appliquer une représentation. Cependant, en suivant [55] des troncatures astucieuses permettent d'obtenir des inégalités de concentration. Il faut alors remplacer le contrôle du gradient DF par des hypothèses de croissance de ce gradient (section 2.1.3), on discutera en particulier du cas stable généralisant ainsi [55] (section 2.1.4). Dans ce cas, on proposera aussi des inégalités pour les « petites » déviations des fonctionnelles de Poisson stable autour de leur médiane (ou moyenne).

Commençons par préciser les notations sur l'espace de Poisson. Étant donné un espace $\mathcal{X}$ métrique (muni d'une distance $d_{\mathcal{X}}$) σ-compact muni d'une mesure de Radon ν diffuse sur $\mathcal{X}$, on considère l'espace $\Omega^{\mathcal{X}}$ des mesures de Radon

$$\Omega^{\mathcal{X}} = \left\{ \omega = \sum_{i=1}^{N} \epsilon_{t_i} \ : \ (t_i)_{i=1}^N \subset \mathcal{X}, \ t_i \neq t_j, \ \forall i \neq j, \ N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\} \right\}$$

où ϵ_t désigne la mesure de Dirac en $t \in X$. Sur $\Omega^{\mathcal{X}}$, on considère P la mesure de Poisson d'intensité ν (*i. e.* $\omega \in \Omega^{\mathcal{X}}$ sous P est une mesure de Poisson de compensateur ν : pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ et $k \in \mathbb{N}$, $P(\omega(A) = k) = e^{-\nu(A)}\nu(A)^k/k!$ et pour des A disjoints, les $\omega(A)$ sont indépendants) et on définit le gradient de différence finie $D : L^2(\Omega^{\mathcal{X}}, P) \longrightarrow L^2(\Omega^{\mathcal{X}} \times \mathcal{X}, P \otimes \nu)$ (linéaire, fermable) par

$$D_x F(\omega) = F(\omega \cup \{x\}) - F(\omega), \quad dP \otimes \nu(d\omega, dx)\text{-p.p.}$$

en identifiant (par convention) $\omega \in \Omega^{\mathcal{X}}$ et son support. On renvoie par exemple à [98], [105], [106], [107] pour des descriptions et utilisations de calculs stochastiques poissoniens et à [1] pour une étude de la géométrie (intrinséque) de l'espace de configuration. On note $\mathrm{Dom}\,(\mathrm{D})$ le domaine de D, *i. e.* l'espace des fonctionnelles $F \in L^2(\Omega^{\mathcal{X}}, P)$ telle que $DF \in L^2(\Omega^{\mathcal{X}} \times \mathcal{X}, P \otimes \nu)$.

On considère des intégrales de Poisson multiples $I_n(f_n)$ définies pour $f_n \in L^2(X, \nu)^{\circ n}$ (produit tensoriel symétrique) par

$$I_n(f_n)(\omega) = \int_{\Delta_n} f_n(y_1, \dots, y_n)(\omega(dy_1) - \nu(dy_1)) \cdots (\omega(dy_n) - \nu(dy_n))$$

où $\Delta_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n \ : \ x_i \neq x_j \text{ quand } i \neq j\}$ si $n \geq 1$ et, pour une constante f_0, $I_0(f_0) = f_0$, si $n = 0$. On dispose de l'isométrie $\mathbb{E}[I_n(f_n)I_m(g_m)] = n!\mathbf{1}_{\{n=m\}}\langle f_n, g_m\rangle_{L^2(X,\nu)^{\circ n}}$, cf. [98], et toute fonctionnelle $F \in L^2(\Omega^{\mathcal{X}}, P)$ admet une décomposition chaotique de Wiener-Poisson $F = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n(f_n)$. Par ailleurs, rappelons que le gradient aux différences agit naturellement sur les intégrales de Poisson par $D_x I_n(f_n)(\omega) = nI_{n-1}(f_n(\cdot, x))(\omega)$, $P(d\omega) \otimes \nu(dx)$-p.p. pour $n \in \mathbb{N}$, en particulier $D_x I_1(f)(\omega) = f(x)$, $\nu(dx)$-p.p. Enfin, nous introduisons le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ défini par $P_t I_n(f_n) = e^{-nt} I_n(f_n)$ pour $f_n \in L^2(X, \nu)^{\circ n}$, $n \in \mathbb{N}$. Ce semi-groupe nous permet d'exprimer la formule clef pour les résultats de cette section : l'identité de représentation de la covariance sur l'espace de Poisson. Pour $F, G \in \mathrm{Dom}\,(\mathrm{D})$, nous avons

$$\mathrm{Cov}(F, G) = E\left[\int_0^{+\infty} e^{-s} \int_{\mathcal{X}} D_y F \ P_s D_y G \ \nu(dy) ds\right]. \tag{2.1.3}$$

En effet, par orthogonalité des intégrales multiples de différents ordres et par continuité de P_s, $s \in \mathbb{R}_+$, sur $L^2(\Omega^{\mathcal{X}}, P)$, il suffit de voir l'identité pour $F = I_n(f_n)$ et $G = I_n(g_n)$. Dans ce cas, elle vient facilement des expressions de D et de P_s pour les intégrales de Poisson. □

L'inégalité de concentration la plus générale que nous proposons dans [BHP-10] est alors :

Proposition 2.1 *Soit* $F \in \mathrm{Dom}\,(\mathrm{D})$ *telle que* $e^{sF} \in \mathrm{Dom}\,(\mathrm{D})$ *pour tout* $0 \leq s \leq t_0$ *où* $t_0 > 0$. *Alors*

$$P(F - E[F] \geq x) \leq \exp\left(\min_{0<t<t_0} \int_0^t h(s)\, ds - tx\right), \quad x > 0,$$

où

$$h(s) = \sup_{(\omega,\omega')\in\Omega^{\mathcal{X}}\times\Omega^{\mathcal{X}}} \left| \int_X (e^{sD_yF(\omega)} - 1)\, D_yF(\omega')\nu(dy) \right|, \quad s \in [0, t_0). \tag{2.1.4}$$

De plus, si h est croissante et finie sur $[0, t_0)$ alors

$$P(F - E[F] \geq x) \leq \exp\left(- \int_0^x h^{-1}(s)ds \right), \qquad 0 < x < h(t_0^-), \tag{2.1.5}$$

où $h^{-1}(x) = \inf\{t > 0 \ : \ h(t) \geq x\}$ est l'inverse à gauche de h définie pour $0 < x < h(t_0^-)$.

Comme déjà expliqué en introduction, il s'agit d'établir une inégalité différentielle pour la transformée de Laplace $L(t) = E[e^{t(F-E[F])}]$ de F : $E[(F - E[F])e^{s(F-E[F])}] \leq h(s)E[e^{s(F-E[F])}]$, $0 \leq s \leq t_0$. Cela vient de l'identité de covariance appliquée à F et $G = e^{s(F-E[F])}$, combinée avec une représentation intégrale du semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck, cf. [120]. On en déduit alors $L(t) \leq \exp(\int_0^t h(s)ds)$. L'inégalité (exponentielle) de Tchebychev implique $P(F - E[F] \geq x) \leq \exp(-tx + \int_0^t h(s)ds)$ pour tout $t \in (0, t_0)$ et on conclut par une minimisation standard en t. □

Pour expliciter la borne de concentration (2.1.5) qu'on propose, on majore h par d'autres fonctions $\tilde{h}$ croissantes pour lesquelles le calcul de $\int_0^t \tilde{h}^{-1}(s)ds$ est plus explicite (dans la suite, pour simplifier, on gardera la même notation h quand on remplacera h par un de ses majorants $\tilde{h}$). Par exemple, avec la majoration immédiate de (2.1.4), $h(t) \leq \int_{\mathcal{X}} \|D_yF\|_\infty \left\|e^{t|D_yF|} - 1\right\|_\infty \nu(dy)$, la proposition 2.1 retrouve la Prop. 3.3 dans [54] obtenue par une formule de Clark. En général pour pouvoir majorer h et expliciter (2.1.5), il faut plus d'information sur le gradient DF de F. Dans la suite, on propose différents résultats en fonction du contrôle de DF dont on dispose. On a d'abord :

Proposition 2.2 *Soient $F \in L^1(\Omega^{\mathcal{X}}, P)$ et $K : X \to \mathbb{R}_+$ telle que $D_yF(\omega) \leq K(y)$, $y \in X$, $\omega \in \Omega^{\mathcal{X}}$ avec $\int K(y)^2\nu(dy) < +\infty$. Alors*

$$P(F - E[F] \geq x) \leq \exp\left(\min_{t>0} \int_0^t h(s)\, ds - tx \right), \quad x > 0$$

où

$$h(t) = \sup_{\omega\in\Omega^{\mathcal{X}}} \int_{\mathcal{X}} \frac{e^{tK(y)} - 1}{K(y)} |D_yF(\omega)|^2\nu(dy), \quad t > 0 \tag{2.1.6}$$

et $(e^{tK} - 1)/K := t$ si $K = 0$. De plus, si h est finie sur $[0, t_0)$ alors

$$P(F - E[F] \geq x) \leq \exp\left(- \int_0^x h^{-1}(s)ds \right), \qquad 0 < x < h(t_0^-). \tag{2.1.7}$$

En particulier, si $K(y) = 0$, $y \in X$, alors $P(F - E[F] \geq x) \leq \exp(-x^2/(2\tilde{\alpha}^2))$, $x > 0$, avec $\tilde{\alpha}^2 = \sup_{\omega\in\Omega^{\mathcal{X}}} \int_{\mathcal{X}} |D_yF(\omega)|^2\nu(dy)$.

On se contente d'observer que pour appliquer la proposition 2.2, on commence par tronquer F en $F_n = \max(-n, \min(F, n))$ pour lequel on a $e^{sF_n} \in \mathrm{Dom}\,(\mathrm{D})$ et toujours $D_yF_n(\omega) \leq K(y)$, $\omega \in \Omega^{\mathcal{X}}$, $y \in Y$ (car $K(y) \geq 0$). Une fois le résultat obtenu pour F_n, un passage à la limite $(n \to +\infty)$ par convergence dominée conclura pour F (car $F \in L^1(\Omega^{\mathcal{X}}, P)$). □

Notons que la condition $\int K(y)^2\nu(dy) < +\infty$ ci-dessus garantit $e^{sF_n} \in \mathrm{Dom}\,(\mathrm{D})$. Dans la suite, la fonction K sera souvent prise de la forme $K(y) = K|y|$ et dans ce cas, il faut travailler avec des mesures ν sur $\mathcal{X}$ qui ont une variance finie. Pour des mesures ν sans variance, on verra en section 2.1.3 qu'on peut adapter les conditions sur le gradient en des conditions de grossissement du gradient.

On a une borne entièrement explicite lorsque l'on dispose d'un contrôle du gradient par des constantes. On obtient alors un contrôle poissonien des queues des lois (en $\exp(-x \ln x)$), retrouvant la proposition 3.1 dans [129] et le Corollaire 4.3 dans [54]. Quand les fonctionnelles sont

« décroissantes pour D » (cas $K=0$), le contrôle est gaussien (en $\exp(-x^2)$). Notez que dans la proposition 2.2 et le corollaire 2.3 ci-dessous, le contrôle du gradient DF n'est que par valeurs supérieures (pas de minoration).

Corollaire 2.3 *Soit $F \in L^2(\Omega^{\mathcal{X}}, P)$ telle que, pour une constante $K \in \mathbb{R}^+$, $DF \leq K$, $P \otimes \nu$-p.p., et $\|DF\|_{L^\infty(\Omega^{\mathcal{X}}, L^2\mathcal{X},\nu))} \leq \alpha$. Alors si $K>0$:*

$$P(F - E[F] \geq x) \leq e^{x/K}\left(1 + \frac{xK}{\alpha^2}\right)^{-\frac{x}{K} - \frac{\alpha^2}{K^2}}, \quad x > 0, \tag{2.1.8}$$

et si $K=0$:

$$P(F - E[F] \geq x) \leq \exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha^2}\right), \quad x > 0. \tag{2.1.9}$$

Guidés par des applications à venir (en section 2.1.1) à des vecteurs infiniment divisibles, on spécialise nos résultats dans le cas où l'espace de Poisson est de type produit : on considère $\mathcal{X} = \{1, \dots, n\} \times \mathcal{Y}$ muni d'une mesure ν et où $\mathcal{Y}$ est un espace linéaire normé de norme $|\cdot|_{\mathcal{Y}}$. Avec les identifications : $\Omega^{\mathcal{X}} \simeq \Omega_{\mathcal{Y}} \times \cdots \times \Omega_{\mathcal{Y}}$, $d\nu(i,y) = d\nu_i(y)$, $i = 1, \dots, n$, $y \in Y$, et en notant $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega^{\mathcal{X}}$, le gradient D se réécrit $\Omega^{\mathcal{X}}$:

$$D_{(i,y)}F(\omega) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{\{i=j\}} \left(F(\omega_1, \dots, \omega_{i-1}, \omega_i \cup \{y\}, \omega_{i+1}, \dots, \omega_n) - F(\omega_1, \dots, \omega_n)\right),$$

pour $i = 1, \dots, n$, $y \in Y$. Dans ce contexte, la proposition 2.1 s'applique par exemple avec la fonction

$$h(t) = \left\| \sum_{i=1}^{n} \int_Y \|D_{(i,y)}F\|_\infty (e^{t|D_{(i,y)}F|} - 1)\nu_i(dy) \right\|_\infty, \tag{2.1.10}$$

qui, lorsque $\nu_1 = \cdots = \nu_n = \nu$, se simplifie en $h(t) = \tilde{\beta} \int_Y |y|_{\mathcal{Y}} (e^{t\beta|y|_{\mathcal{Y}}} - 1)\nu(dy)$, avec

$$\tilde{\beta} = \sup_{\omega, y \neq 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{|D_{(i,y)}F(\omega)|}{|y|_{\mathcal{Y}}} \quad \text{et} \quad \beta = \sup_{i,\omega,y\neq 0} \frac{|D_{(i,y)}F(\omega)|}{|y|_{\mathcal{Y}}}.$$

La proposition 2.2 s'applique aussi dans ce contexte, on la réécrit sous forme d'un corollaire qui sera reutilisé dans la suite :

Corollaire 2.4 *Soient $F : \Omega^{\mathcal{X}} \to \mathbb{R}$ et $\beta_i \geq 0$ tel que $D_{(i,y)}F(\omega) \leq \beta_i |y|_{\mathcal{Y}}$, $i = 1, \dots, n$, $y \in Y$, $\omega \in \Omega^{\mathcal{X}}$. Alors $P(F - E[F] \geq x) \leq \exp\left(\min_{t>0} \int_0^t h(s)\, ds - tx\right)$, pour $x > 0$ avec*

$$h(t) = \sup_{\omega \in \Omega^{\mathcal{X}}} \sum_{i=1}^{n} \int_Y \frac{e^{t\beta_i |y|_{\mathcal{Y}}} - 1}{\beta_i |y|_{\mathcal{Y}}} (D_{(i,y)}F(\omega))^2 \nu_i(dy), \quad t > 0. \tag{2.1.11}$$

Si h est finie sur $[0, t_0)$ alors

$$P(F - E[F] \geq x) \leq \exp\left(-\int_0^x h^{-1}(s)ds\right), \qquad 0 < x < h(t_0^-).$$

Si tous les $\beta_i = 0$ alors on récupère une borne de type gaussien. Par ailleurs, notons que si $\nu_1 = \cdots = \nu_n$, la fonction h se simplifie en

$$h(t) = \frac{\alpha^2}{\beta} \int_Y |y|_{\mathcal{Y}} (e^{t\beta|y|_{\mathcal{Y}}} - 1)\nu_1(dy), \quad t \in [0, t_0], \tag{2.1.12}$$

avec

$$\alpha^2 = \sup_{\omega \in \Omega^{\mathcal{X}},\ y \neq 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{|D_{(i,y)}F(\omega)|^2}{|y|_{\mathcal{Y}}^2} \quad \text{et} \quad \beta = \sup_{i,\omega,y\neq 0} \frac{|D_{(i,y)}F(\omega)|}{|y|_{\mathcal{Y}}}$$

et qu'en prenant, à partir de (2.1.12)

$$h(t) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \int_Y |y|_{\mathcal{Y}} (e^{t\beta_i |y|_{\mathcal{Y}}} - 1) \nu_i(dy), \quad t \in [0, t_0] \tag{2.1.13}$$

on retrouve la conclusion de la proposition 2.1 avec la fonction donnée par (2.1.10). Le corollaire 2.3 se réécrit aussi dans ce cadre « produit ».

2.1.1 Fonctionnelles de vecteurs infiniment divisibles (ID)

On spécialise maintenant les résultats précédents pour des fonctionnelles lipschitziennes de vecteurs $ID_n(0,\nu)$, c'est à dire infiniment divisibles dans $\mathbb{R}^n$ sans composante gaussienne et de mesure de Lévy ν. Dans la suite, on note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et g ℓ^p-Lipschitz(c) pour indiquer que g est lipschitzienne de constante c pour la norme $|x|_p = (\sum_{i=1}^n |x|_i^p)^{1/p}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $1 \le p < +\infty$, et pour la norme $|x|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|$ si $p = +\infty$.

Pour commencer, observons qu'en considérant l'espace de Poisson $X = \mathbb{R}^n$ muni de la mesure ν, on récupère facilement des résultats connus. En effet, en remarquant qu'un tel vecteur $F = (F_1, \dots, F_n) \sim ID_n(0,\nu)$ se représente pour un $b \in \mathbb{R}^n$

$$F = \left(\int_{\{|y|_2 \le 1\}} y_k \, (\omega(dy) - \nu(dy)) + \int_{\{|y|_2 > 1\}} y_k \, \omega(dy) + b_k \right)_{1\le k\le n} \tag{2.1.14}$$

pour toute $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lipschitz(c), on a $|D_x f(F)(\omega)| = c|x|$ où $|\cdot|$ désigne une norme de $\mathbb{R}^n$. Ainsi quand ν a un support borné, le corollaire 2.3 retrouve le corollaire 1 de [53] avec $K = \inf\{r > 0 \ : \ \nu(\{x \in X \ : \ |x| > r\}) = 0\}$ et $\tilde{\alpha}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |y|^2 \nu(dy)$.

Néanmoins pour faire émerger la dépendance en la dimension de nos inégalités de concentration, on travaille avec l'espace $\Omega^{\mathcal{X}} \simeq \Omega_{\mathcal{Y}} \times \cdots \times \Omega_{\mathcal{Y}}$ où $X = \{1, \dots, n\} \times Y$. Le corollaire 2.4 donne alors pour $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$P(g(F_1, \dots, F_n) - E[g(F_1, \dots, F_n)] \ge x) \quad \le \quad \exp\left(- \int_0^x h^{-1}(s) \, ds \right),$$

$0 < x < h(t_0^-)$, si

$$h(t) = \left\| \sum_{i=1}^n \int_Y \Big(D_{(i,y)} g(F_1(\omega), \dots, F_n(\omega)) \Big)^2 \frac{e^{t\beta_i |y|_{\mathcal{Y}}} - 1}{\beta_i |y|_{\mathcal{Y}}} \, \nu_i(dy) \right\|_{L^\infty(\Omega^{\mathcal{X}}, P)}, \quad t \in [0, t_0],$$

est finie sur $[0, t_0)$ avec les mêmes β_i que dans le corollaire 2.4. On discute maintenant de cette borne dans quelques cas particuliers :

Vecteurs de fonctionnelles $F_1, \dots, F_n$ indépendantes. On considère que $F = (F_1, \dots, F_n)$ est définie sur $\Omega^{\mathcal{X}} = \Omega_{\mathcal{Y}} \times \cdots \times \Omega_{\mathcal{Y}}$ avec $F_i = F_i(\omega_i)$, $i = 1, \dots, n$. Pour $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction ℓ^1-Lipschitz(c), la fonction h en (2.1.11) se simplifie et le corollaire 2.4 s'applique alors avec

$$h(t) \le c^2 \sup_{\omega \in \Omega^{\mathcal{X}}} \sum_{i=1}^n \int_Y \frac{e^{ct\beta_i |y|_{\mathcal{Y}}} - 1}{c\beta_i |y|_{\mathcal{Y}}} (D_y F_i(\omega))^2 \nu_i(dy), \quad t \in [0, t_0]$$

où

$$\beta_i = \sup_{y \in Y, \ \omega_i \in \Omega_{\mathcal{Y}}} \frac{|D_y F_i(\omega_i)|}{|y|_{\mathcal{Y}}}.$$

De plus si $\nu_1 = \cdots = \nu_n$ (cas *iid*), h en (2.1.12) se simplifie de la même façon. Notons quand nous avons affaire avec des fonctionnelles F_i indépendantes, il est équivalent de considérer g ℓ^p-Lipschitz pour n'importe quel $p \in [1, +\infty]$, mais il est plus général de supposer seulement g ℓ^1-Lipschitz.

Vecteurs d'intégrales de Poisson indépendantes. En considérant un espace vectoriel normé $(\mathcal{Y}, |\cdot|_{\mathcal{Y}})$ et des mesures de Lévy ν_i, $1 \leq i \leq n$, on spécialise le cas précédent en prenant $g : Y^n \to \mathbb{R}$ et

$$F_i(\omega_i) = \int_{\{|y|_{\mathcal{Y}} \leq 1\}} y\,(\omega_i(dy) - \nu_i(dy)) + \int_{\{|y|_{\mathcal{Y}} > 1\}} y\omega_i(dy) + b_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Le corollaire 2.4 s'applique alors avec

$$h(t) = \sup_{x \in Y^n} \sum_{i=1}^n \int_Y \frac{e^{t\beta_i |y|_{\mathcal{Y}}} - 1}{\beta_i |y|_{\mathcal{Y}}} (g(x + ye_i) - g(x))^2 \nu_i(dy),$$

et on retrouve le théorème 1 de [56] comme cas particulier. Dans le cas *iid* ($\nu = \nu_1 = \cdots = \nu_n$), on peut aussi prendre h donnée en (2.1.12) avec

$$\alpha^2 = \sup_{x, y \neq 0} \sum_{i=1}^n \frac{|g(x + ye_i) - g(x)|^2}{|y|_{\mathcal{Y}}^2} \quad \text{et} \quad \beta = \sup_{i, x, y \neq 0} \frac{|g(x + ye_i) - g(x)|}{|y|_{\mathcal{Y}}} \tag{2.1.15}$$

et même $\beta = c$ si $g : Y^n \to \mathbb{R}$ est ℓ^1-Lipschitz(c). Par exemple, sur $Y = \mathbb{R}$, avec $g(x) = \sup(x_1, \dots, x_n)$ pour lequel $\beta = 1$, on utilise $h(t) = \sum_{i=1}^n \int_0^{+\infty} y(e^{ty} - 1)\nu_i(dy)$ (dans le cas non *id*).

Inégalités libres de la dimension pour les fonctionnelles indépendantes. En général, les inégalités proposées ci-dessus ne sont pas libres de la dimension puisque les constantes (par exemple α^2 et β dans (2.1.15)) dépendent de la dimension. Cependant, quand on considère des fonctions ℓ^2-lipschitziennes, on peut les rendre libres de la dimension en suivant [56]. Cela s'explique par le fait que la norme $|\cdot|_2$ dérive d'un produit scalaire et que dans ce cas des recombinaisons s'opèrent. Ainsi, pour la fonction $\phi(x) = \sqrt{E[|x - F|_2^2]}$, de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ on a une majoration du type

$$\begin{aligned} |\phi(x + ue_i) - \phi(x)|^2 &\leq \left(\frac{E[2u(x_i - F_i)] + u^2}{\sqrt{E[|x - F|_2^2]} + \sqrt{E[|x + ue_i - F|_2^2]}} \right)^2 \\ &\leq \frac{8u^2 E[(x_i - F_i)^2]}{E[|x - F|_2^2]} + \frac{2u^4}{\sum_{k=1}^n \mathrm{Var} F_k}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.1.16}$$

En bornant $D_{(i,y)}\phi(F)$ par (2.1.16) dans (2.1.11), on obtient d'abord pour $f = |\cdot|_2$ puis pour toute fonction f ℓ^2-lipschitziennes l'extension suivante de [56] pour les fonctionnelles sur l'espace de Poisson :

Proposition 2.5 *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction ℓ^2-Lipschitz(c) et soit $F = (F_1, \dots, F_n)$ un vecteur de fonctionnelles indépendantes. On pose*

$$\beta_i = \sup_{y \in Y, \omega \in \Omega^{\mathcal{X}}} \frac{|D_y F_i(\omega)|}{|y|_{\mathcal{Y}}}, \quad i = 1, \dots, n,$$

et on suppose que

$$\begin{aligned} h(t) &= 8 \max_{i=1,\dots,n} \left(\beta_i \int_Y |y|_{\mathcal{Y}} (e^{t\beta_i |y|_{\mathcal{Y}}} - 1) \nu_i(dy) \right) \\ &\quad + \frac{2n}{E[|F - E[F]|_2^2]} \max_{i=1,\dots,n} \left(\beta_i^3 \int_Y |y|_{\mathcal{Y}}^3 (e^{t\beta_i |y|_{\mathcal{Y}}} - 1) \nu_i(dy) \right) \end{aligned} \tag{2.1.17}$$

est finie pour $t \in [0, t_0)$. Alors, pour $0 < x < h(t_0^-)$,

$$P\left(f(F_1, \dots, F_n) \geq E[f(F_1, \dots, F_n)] + c\sqrt{2\sum_{i=1}^n \mathrm{Var} F_i + cx} \right) \leq \exp\left(-\int_0^x h^{-1}(s) ds \right). \tag{2.1.18}$$

Notez qu'on a toujours

$$n \min_{1\le k\le n} (E[|F_k|])^2 \le E[|F|_2^2] \le n \max_{1\le k\le n} E[|F_k|^2].$$

Cette observation justifie l'appelation « libre de la dimension » pour l'inégalité (2.1.18) puisque dans le cas identiquement distribué, la fonction h en (2.1.17) ne dépend plus de la dimension n (ou en tout cas, se borne indépendamment de n).

Dans le cas particulier où la fonction f est la norme euclidienne elle-même, on peut améliorer la proposition 2.5 et ainsi étendre de la même façon le corollaire 3 de [56] pour les fonctionnelles sur l'espace de Poisson. On obtient, comme précédemment, une inégalité libre de la dimension n quand les fonctionnelles sont *iid*, cf. Prop. 3.2 dans [BHP-10]. Dans le cas de n fonctionnelles ID *iid* sur $\mathcal{Y}$ avec une mesure de Lévy à support bornée, on peut préciser h et intégrer explicitenent son inverse. On obtient alors une inégalité de concentration explicite, libre de la dimension :

Corollaire 2.6 *Soient $\nu = \nu_1 = \dots = \nu_n$ de support borné dans $B_{\mathcal{Y}}(0, R)$ et $F = (F_1, \dots, F_n)$ un vecteur à composantes iid. Alors pour tout $x > 0$,*

$$P(|F|_2 \ge x + 2E[|F|_2]) \le \exp\left(\frac{x}{\beta R} - \left(\frac{x}{\beta R} + \frac{\tilde{\alpha}_R^2}{\beta^2 R^2}\right) \ln\left(1 + \frac{x\beta R}{\tilde{\alpha}_R^2}\right)\right), \qquad (2.1.19)$$

où

$$\tilde{\alpha}_R^2 = 8\beta^2 R \int_Y |y|_{\mathcal{Y}} \nu_1(dy) + \frac{2\beta^4 R^2}{(E[|F_1|])^2} \int_Y |y|_{\mathcal{Y}}^2 \nu(dy).$$

et $\beta_i = \sup_{y\in Y,\ \omega\in\Omega^X} \frac{|D_y F_i(\omega)|}{|y|_{\mathcal{Y}}}$, $1 \le i \le n$.

On peut noter qu'en fait dans la probabilité majorée dans (2.1.19), le 2 en facteur de $E[|F|_2]$ peut être remplacé par $1 + \varepsilon$ pour n'importe quel $\varepsilon > 0$.

Une conséquence intéressante des inégalités de concentration libre de la dimension est l'obtention de propriétés d'intégrabilité exponentielle libres de la dimension. Ainsi par exemple pour la norme euclidienne d'un vecteur ID $F = (F_1, \dots, F_n)$ comme dans le corollaire 2.6 (sur $Y = \mathbb{R}$), on a

$$E\left[\exp\left(\frac{|F|_2}{\beta R} \ln_+ \frac{\lambda |F|_2}{\beta R}\right)\right] < +\infty$$

où $\ln_+ x = \max(\ln x, 0)$, pour tout $\lambda \in (0, \beta^2 R^2/(e\tilde{\alpha}_R^2))$, ce qui étend une nouvelle fois des résultats de [56] et, par exemple, dans le cas spécial d'intégrales de Poisson, on récupère la borne supérieure de [110, Cor. 4].

Vecteurs de fonctionnelles non-indépendantes. Bien sûr, on peut proposer aussi des inégalités de concentration pour des vecteurs de fonctionnelles **non**-indépendantes en contrôlant la somme de leur gradient. Cependant, dans ce cas, les résultats ne sont évidemment pas libres de la dimension du vecteur. On ne détaille pas ces résultats et on renvoie aux corollaires 3.6, 3.7, 3.8 de [BHP-10].

2.1.2 Fonctionnelles de Wiener quadratiques

Les fonctionnelles de Wiener quadratiques ont des lois infiniment divisibles qu'on peut représenter sous forme d'intégrales de Poisson (voir [89]). Nous appliquons donc dans cette section les résultats précédents à ces fonctionnelles et on retrouve alors des résultats existants de la littérature pour les fonctionnelles de Wiener quadratiques, cf. [60] mais aussi [91], [23], [83], [90] et on propose en plus des résultats libres de la dimension pour les vecteurs de telles fonctionnelles.

Commençons par considérer un vecteur $(J_2^1(f_2^1), \dots, J_2^n(f_2^n))$ d'intégrales doubles de Wiener-Itô mutuellement indépendantes pour des fonctions $f_2^1, \dots, f_2^n \in L^2(\mathbb{R}_+^2)$ et contre des mouvements browniens possiblement différents. À chaque $J_2^i(f_2^i)$ est associé un opérateur symétrique $A : L^2(\mathbb{R}_+) \to L^2(\mathbb{R}_+)$ de Hilbert-Schmidt dont on note $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite des valeurs propres et

$(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite des vecteurs propres, formant un système orthogonal de $L^2(\mathbb{R}_+)$. Pour la suite, notons

$$a_+ = \max_{1\le i\le n}\max_{k,a_k^i>0} a_k^i, \quad a_- = \max_{1\le i\le n}\max_{k,a_k^i<0}(-a_k^i), \quad a = \max_{1\le i\le n}\max_{k\in\mathbb{N}}|a_k^i|,$$

les maxima des rayons spectraux associés à $J_2^1(f_2^1),\dots,J_2^n(f_2^n)$. Une observation déterminante pour appliquer nos résultats est fournie par le théorème 2 de [89] qui permet de représenter $J_2^i(f_2^i)$ sous la forme d'une intégrale de Poisson $J_2^i(f_2^i)(\omega_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(\omega_i(dy)-\nu_i(dy))$, avec la mesure de Lévy

$$\nu_i(dy) = \mathbf{1}_{\{y>0\}}\sum_{k\,:\,a_k^i>0}\frac{1}{2|y|}e^{-y/a_k^i}dy + \mathbf{1}_{\{y<0\}}\sum_{k\,:\,a_k^i<0}\frac{1}{2|y|}e^{-y/a_k^i}dy, \tag{2.1.20}$$

En appliquant le corollaire 2.4, on obtient une inégalité de concentration pour les fonctionnelles ℓ^1-Lipschitz de fonctionnelles ds Wiener quadratiques :

Proposition 2.7 *Soient $(J_2^1(f_2^1),\dots,J_2^n(f_2^n))$ un vecteur d'intégrales doubles de Wiener indépendantes. Pour toute fonction g ℓ^1-Lipschitz(c), on a :*

$$P(g(J_2^1(f_2^1),\dots,J_2^n(f_2^n)) - E[g(J_2^1(f_2^1),\dots,J_2^n(f_2^n))] \ge x) \le \exp\left(-\int_0^x h^{-1}(s)ds\right),$$

pour $x>0$, où h^{-1} est l'inverse de

$$h(t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{tc^2(a_k^i)^2}{1-ct|a_k^i|}, \quad t\in[0,(ca)^{-1}). \tag{2.1.21}$$

De plus,

$$\begin{aligned} & P(g(J_2^1(f_2^1),\dots,J_2^n(f_2^n)) - E[g(J_2^1(f_2^1),\dots,J_2^n(f_2^n))] \ge x) \\ \le\ & \exp\left(-\frac{x}{ac} + \frac{2\sum_{i=1}^n |f_2^i|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}}{a^2}\ln\left(1+\frac{ax}{2c\sum_{i=1}^n |f_2^i|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}}\right)\right) && (2.1.22) \\ \le\ & \exp\left(-\frac{1}{c}\left(1-\frac{\ln 3}{2}\right)\min\left(\frac{x}{a}, \frac{x^2}{4c\sum_{i=1}^n |f_2^i|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}}\right)\right), \quad x>0. && (2.1.23) \end{aligned}$$

La preuve vient du corollaire 2.4 et d'un calcul explicite de h connaissant, par (2.1.20), les ν_i. En majorant les a^i par a, on obtient un majorant de h pour lequel les calculs sont réalisables et mènent à (2.1.22). Finalement, (2.1.23) vient de l'inégalité élémentaire $\left(1-\frac{\ln 3}{2}\right)\min\left(Ax, \frac{A^2x}{4B}\right) \le Ax - B\ln\left(1+\frac{Ax}{B}\right)$ pour tout $A,B>0$. $\square$

Notons que pour le sup d'intégrales doubles de Wiener, c'est à dire avec $g(x_1,\dots,x_n) = \sup(x_1,\dots,x_n)$, on a un résultat du même type mais avec une fonction h comme en (2.1.21) obtenue en ne conservant dans la somme que les termes avec $a_k^i>0$, cf. Prop. 4.2 dans [BHP-10]. En dimension 1, ce cas particulier retrouve l'exemple 5.1 de [90].

Notons que dans certains cas (avec d'autres arguments), on obtient une minoration des probabilités de déviation :

Proposition 2.8 *Soit $(J_2^1(f_2^1),\dots,J_2^n(f_2^n))$ un vecteur d'intégrales doubles de Wiener mutuellement indépendantes Pour tout $b\in(0,1)$, il existe $x_b>0$ tel que*

$$P(|(J_2^1(f_2^1),\dots,J_2^n(f_2^n))|_\infty \ge x) \ge \frac{1-b}{2x}\sum_{i=1}^n a^i e^{-x/a^i}, \quad x>x_b$$

où $a^i = \max_{k\in\mathbb{N}}|a_k^i|$, $1\le i\le n$.

Le même résultat est vrai pour la fonctionnelle sup à la place de $|\cdot|_\infty$ en remplaçant les a^i par $a^i_+ = \max_{k\in\mathbb{N},a^i_k>0} a^i_k$. Dans les deux cas, des minorations (moins bonnes, mais du même genre) restent possibles si les intégrales ne sont pas mutuellement indépendantes.

Nous ne précisons pas la preuve et nous nous contentons d'indiquer qu'on utilise des minorations $P(|(F_1,\dots,F_n)|_\infty \geq x) \geq 1-\prod_{i=1}^n P(|F_i|<x)$ et qu'on majore les facteurs $P(|F_i|<x)$ grâce à des estimations précises sur les queues des mesures de Lévy ν_i de F_i. On renvoie à la proposition 4.3 de [BHP-10] pour les détails. □

On déduit alors des propositions 2.7 et 2.8, l'estimation exacte des queues des normes ℓ^p de vecteurs de fonctionnelles de Wiener quadratiques indépendantes. On retrouve ainsi certains résultats de [4] et de [23, Th. 2.2] pour les intégrales doubles, voir aussi [84, Cor. 3.9].

Corollaire 2.9 *Soient $p\in[1,\infty]$, et $(J_2^1(f_2^1),\dots,J_2^n(f_2^n))$ un vecteur de fonctionnelles de Wiener quadratiques indépendantes. Alors*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln P(|(J_2^1(f_2^1),\dots,J_2^n(f_2^n))|_p\geq x)}{x} = -\frac{1}{a}.$$

De la même façon,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln P(\sup(J_2^1(f_2^1),\dots,J_2^n(f_2^n))\geq x)}{x} = -\frac{1}{a_+}.$$

On peut proposer des résultats analogues pour les queues à gauche des fonctionnelles inf. Enfin, comme dans la section 2.1.1, on peut proposer dans le cas de la norme euclidienne des inégalités de concentration libres de la dimension en appliquant la Proposition 2.5 avec $\beta=1$ (en fait son amélioration pour $g=|\cdot|_2$) :

Proposition 2.10 *Soient $(J_2^1(f_2),\dots,J_2^n(f_2))$ un vecteur d'intégrale double de Wiener iid et $b\in(0,1)$. Alors*

$$P(|(J_2^1(f_2),\dots,J_2^n(f_2))|_2 - 2E[|(J_2^1(f_2),\dots,J_2^n(f_2))|_2]\geq x)\leq \exp(-(1-b)\frac{x}{a}+K_b,$$

pour $x>0$ et

$$P(|(J_2^1(f_2),\dots,J_2^n(f_2))|_2 - 2E[|(J_2^1(f_2),\dots,J_2^n(f_2))|_2]\geq x)\leq \exp(-(1-b)\frac{x}{a}),$$

pour $x\geq \frac{2a}{b}K_{b/2}$ où $K_b =$

$$-\frac{16|f_2|^2_{L^2(\mathbb{R}^2_+)}}{a^2}\ln b - 8|f_2|^2_{L^2(\mathbb{R}^2_+)}\left(\frac{2}{a^2}+\frac{1}{(E[|J_2(f_2)|])^2}\right)(1-b)+\frac{4|f_2|^2_{L^2(\mathbb{R}^2_+)}}{(E[|J_2(f_2)|])^2}\left(\frac{1-b^2}{b^2}\right).$$

On peut observer que la borne de concentration est d'autant meilleure que b est proche de 0 et qu'alors K_b varie en $1/b^2$.

Tous les résultats sur les fonctionnelles de Wiener quadratiques sont explicites dès qu'on considère des exemples concrets. En utilisant la description de leur mesure de Lévy dans [89] ou [116], on a ainsi proposé dans [BHP-10] des résultats explicites pour les vecteurs de norme carré des trajectoires browniennes sur $[0,T]$ ($\mathfrak{h}_T=\int_0^T(B(t))^2dt-\frac{T^2}{2}$), de variance empirique du brownien sur $[0,T]$ ($\mathfrak{v}_T=\int_0^T\left(B(t)-\frac{1}{T}\int_0^T B(s)ds\right)^2dt-\frac{T^2}{6}$), d'aire de Lévy ($S_T=\frac{1}{2}\int_0^T\left(B^1(t)dB^2(t)-B^2(t)dB^1(t)\right)$ où B^1, B^2 sont deux browniens indépendants). Ainsi, à titre d'exemple pour $p\in[1,+\infty]$, on a :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln P(|(\mathfrak{h}_T^1,\dots,\mathfrak{h}_T^n)|_p\geq x)}{x}=-\frac{\pi^2}{4T^2},\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln P(|(\mathfrak{v}_T^1,\dots,\mathfrak{v}_T^n)|_p\geq x)}{x}=-\frac{\pi^2}{T^2},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln P(|(S_T^1,\dots,S_T^n)|_p\geq x)}{x}=-\frac{\pi}{T}.$$

2.1.3 Cas sans variance

Dans cette section, nous proposons des inégalités de concentration quand la mesure ν contrôlant la mesure de Poisson P est sans variance. Dans ce cas, il est plus difficile de contrôler le gradient DF et on montre qu'en fait un contrôle du grossissement du gradient permet de conserver des inégalités de concentration (avec un ordre de grandeur qui dépend du grossissement).

L'idée vient de Houdré et Marchal qui proposent dans [55] des inégalités de concentration pour les fonctionnelles lipschitziennes de vecteurs stables. En décomposant la mesure de Lévy stable (une partie sur $B(0,R)$, l'autre sur $B(0,R)^c$), ils contrôlent la contribution de la partie de la mesure de Lévy sur $B(0,R)$ grâce aux résultats de [53] pour les vecteurs ID à mesures de Lévy tronquées, tandis que la contribution de la queue de la mesure de Lévy, interprétée en termes de Poisson compensé, est facilement contrôlée.

On généralise ces arguments sur l'espace de Poisson en évaluant nos fonctionnelles sur des configurations $\omega_R \in \Omega^{\mathcal{X}}$ tronquées. Un cadre d'application typique, étudié en section 2.1.4, est lorsque l'espace de Poisson est muni d'une mesure de Lévy stable ce qui généralisera les résultats de [55]. Précisons nos notations : pour A in $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, on pose $\nu_R(A) = \nu(A \cap B_{\mathcal{X}}(0,R))$ où 0 désigne un point arbitrairement fixé dans $\mathcal{X}$. Pour $R > 0$ et $\omega \in \Omega^{\mathcal{X}}$, on définit

$$\omega_R = \omega \cap B_{\mathcal{X}}(0,R), \quad \omega_R^c = \omega \cap B_{\mathcal{X}}(0,R)^c = \{x \in \omega \ : \ d_{\mathcal{X}}(0,x) > R\}$$

et pour une fonctionnelle stochastique F, on considèrera la fonctionnelle tronquée donnée par $F_R(\omega) = F(\omega_R)$. Enfin on contrôlera la troncature par une fonction γ vérifiant

$$P\big(\omega \in \Omega^{\mathcal{X}} \ : \ \omega \cap B_{\mathcal{X}}(0,R)^c \neq \emptyset\big) \leq \gamma(R). \tag{2.1.24}$$

Dans la suite, l'existence de l'espérance n'étant pas garantie pour les fonctionnelles considérées F, on énonce des résultats de concentration par rapport aux médianes $m(F)$. Cela exige de contrôler la médiane d'une fonctionnelle tronquée F_R par rapport à celle de la fonctionnelle non tronquée. Un tel contrôle est donné par le lemme suivant :

Lemme 2.11 *Soit F une fonctionnelle stochastique sur $\Omega^{\mathcal{X}}$ telle qu'il existe une fonction $\tilde{\beta}$ positive croissante (resp. une fonction $\tilde{\gamma}$ décroissante) sur $\mathbb{R}^+$, telle que pour R plus grand qu'un R_0 $P\big(F_R - m(F_R) \geq \tilde{\beta}(R)\big) \leq \tilde{\gamma}(R)$. Alors on a $m(F_R) - m(F) \leq \tilde{\beta}(R)$ pour tout*

$$R \geq \max\left(R_0, \inf_{0<\delta<1/2} \max\left(\gamma^{-1}(\delta), \tilde{\gamma}^{-1}\left(\frac{1}{2} - \delta\right)\right)\right).$$

En remplaçant alors les contrôles du gradient DF des sections précédentes par des conditions de grossissement, on obtient des inégalités de concentration dans ce contexte sans variance :

Théorème 2.12 *Soit F une fonctionnelle stochastique sur $\Omega^{\mathcal{X}}$ telle qu'il existe une fonction β : $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ croissante et une constante $C > 0$ telle que pour R plus grand qu'un R_0*

(i) $\sup_{y \in B_{\mathcal{X}}(0,R)} |D_y F(\omega)| \leq \beta(R)$, $\quad P(d\omega)$*-p.p.,*

(ii) $\|DF\|^2_{L^\infty(\Omega^{\mathcal{X}}, L^2(\nu_R))} \leq C\beta^2(R)\gamma(R)$.

Alors

$$P(F - m(F) \geq x) \leq (1 + Ce)\gamma \circ \beta^{-1}(x/4),$$

pour tout

$$x \geq 2\,\beta\left(\gamma^{-1}\left(\frac{1}{2(1+Ce)}\right)\right).$$

L'idée générale de la preuve consiste en tronquer les configurations ω, appliquer les résultats précédents pour la contribution de ω_R et contrôler la contribution de ω_R^c avec γ. Plus précisément, on a

$$\begin{aligned} & P(F - m(F) \geq x) \\ = \; & P\big(F - m(F) \geq x,\ \omega_R^c = \emptyset\big) + P\big(F - m(F) \geq x,\ \omega_R^c \neq \emptyset\big) \\ \leq \; & P\big(F_R - m(F_R) \geq x - (m(F) - m(F_R)\big) + P\big(\omega \in \Omega^{\mathcal{X}} \ :\ \omega_R^c \neq \emptyset\big). \qquad (2.1.25) \end{aligned}$$

Le second terme est majoré par $\gamma(R)$ (par choix de γ en (2.1.24)). Pour contrôler le premier terme, on introduit la fonction $g(x) = (x - m(F_R))^+ \wedge r$, $x \in \mathbb{R}$ Lipschitz(1) et on utilise

$$P(F_R - m(F_R) \geq r) \leq P(g(F_R) \geq r) \leq P(g(F_R) - E[g(F_R)] \geq r/2). \qquad (2.1.26)$$

Comme on contrôle $Dg(F_R)$ avec $(i) - (ii)$, on majore (2.1.26) en appliquant le corollaire 2.3 à $g(F_R)$ et en reliant la borne de concentration et le niveau de troncature ($x = 2\beta(R)$), on obtient, après calcul,

$$P(F_R - m(F_R) \geq 2\beta(R)) \leq eC\gamma(R),$$

Pour utiliser cette borne dans le premier terme de (2.1.25), on contrôle la différence $m(F_R) - m(F)$ grâce au lemme 2.11. Il reste ensuite à reexprimer la probabilité de concentration en terme de x puis à optimiser le domaine de validité sur x comme dans [55] (preuve du théorème 1). □

Dans les situations classiques, on applique le théorème 2.12 avec $\beta(R) = R$ et avec $\gamma(R) = 1 - \exp(-\nu(y \in X : d_{\mathcal{X}}(0, y) > R))$. Ainsi sur $\mathbb{R}^n$, pour toute fonctionnelle $G = f(F)$ ℓ^2-Lipschitz(c) d'un vecteur $F = (F_1, \dots, F_n)$ infiniment divisible (sans composante gaussienne) et de mesure de Lévy ν en passant par une représentation par intégrale de Poisson comme en (2.1.14), on a :

$$P(f(F) - m(f(F)) \geq x) \leq (1 + Ce)\left(1 - \exp\left(-\nu\left(u \in \mathbb{R}^n \ :\ |u|_2 > \frac{x}{4c}\right)\right)\right).$$

On montre en plus que lorsque $f = |\cdot|_2$, la borne obtenue donne l'ordre exact de la probabilité de concentration (cf. Lemme 5.4 dans [BHP-10]). Dans d'autres exemples, on peut proposer une fonction γ explicite : ainsi pour

$$\nu_1(B) = \int_{S^{n-1}} \sigma(d\xi) \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_B(r\xi) \frac{|\ln r|}{r^2} dr$$

sur $X = \mathbb{R}^n$, on peut prendre $\gamma_1(R) = 2\sigma(S^{n-1}) \frac{\ln R}{R}$. Pour

$$\nu_2(B) = \int_{S^{n-1}} \sigma(d\xi) \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_B(r\xi) \frac{e^{-1/(2r^2)}}{r^2\sqrt{2\pi}} dr$$

sur $X = \mathbb{R}^n$, on peut prendre $\gamma_2(R) = \sigma(S^{n-1})/(\sqrt{2\pi}R)$. Le cas stable sera spécifiquement discuté dans la section 2.1.4. On peut encore noter que le théorème 2.12 s'applique si la fonction f est h-höldérienne ($0 < h < 1$). Dans ce cas, on prend $\beta(R) = R^h$ et pour les exemples précédents $\gamma_1(R) = \frac{\ln R}{R}$, $\gamma_2(R) = \frac{\exp(-1/(2R^2))}{R\sqrt{2\pi}}$.

Dans tous ces exemples, on obtient des inégalités de concentration polynomiale. Dans le cas de loi de Poisson composé sur $\mathbb{N}$, [74] obtiennent aussi des inégalités de concentration polynomiales d'ordres liés à l'intégrabilité (de la loi composée). Cependant le cadre typique où de la concentration polynomiale est obtenue est traité dans la section suivante avec l'espace de Poisson stable.

2.1.4 Fonctionnelles de Poisson stables

Dans cette section, on spécifie nos résultats « sans variance » de la section 2.1.3 au cas où $X = \mathbb{R}^d$ est muni de la norme euclidienne $|\cdot|$ et d'une mesure de Lévy stable

$$\nu(B) = \int_{S^{d-1}} \sigma(d\xi) \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_B(r\xi) r^{-1-\alpha} dr, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),$$

où σ est une mesure finie sur la sphère unité S^{d-1} de $\mathbb{R}^d$. On parle alors de fonctionnelles de Poisson stables. Dans ce cas, le théorème 2.12 s'applique avec $\beta(R) = R$ et $\gamma(R) = \frac{\sigma(S^{d-1})}{\alpha R^\alpha}$, pour $f(F)$ où f est ℓ^2-Lipschitz(c) et F un vecteur stable de mesure de Lévy ν. Il donne

$$P(f(F) - m(f(F)) \geq x) \leq \left(1 + \frac{2e}{2-\alpha}\right) \frac{\sigma(S^{d-1})}{\alpha} \left(\frac{x}{4c}\right)^{-\alpha}, \tag{2.1.27}$$

pour tout $x \geq 2c\gamma^{-1}\left(1/(2(1+2e/(2-\alpha)))\right)$, ce qui donne une version du théorème 1 de [55] pour les fonctionnelles de Poisson stable. L'ordre de grandeur $1/x^\alpha$ dans la borne (2.1.27) est très bon puisque avec $f(x) = x$ on retrouve l'ordre bien connu des queues des lois stables (voir par exemple la proposition 1.2.15 de [115]). Cependant, comme dans [55], on observe que la constante dans (2.1.27) explose quand α est proche de 0 ou de 2. En comparant avec l'asymptotique des queues stables [115, Prop. 1.2.15], on constate que si l'explosion en 0 est intrinsèque à la loi stable, celle en 2 ne l'est pas. Le résultat suivant résout ce problème en proposant une constante non-explosive pour α proche de 2. Il généralise le théorème 2 de [55] aux fonctionnelles sur $\Omega^{\mathcal{X}}$ muni d'une mesure de Lévy stable et est en plus valable pour tout $\alpha \in (0,2)$:

Théorème 2.13 *Soient $\alpha \in (0,2)$ et $F : \Omega^{\mathcal{X}} \to \mathbb{R}$ telle que $|D_yF(\omega)| \leq c|y|_{\mathcal{X}}$, $P(d\omega)\otimes\nu(dy)$-p.p. pour $c > 0$. Alors on a*

$$P(F - m(F) \geq x) \leq \sigma(S^{d-1}) \left(\frac{3}{2}e^2 + \frac{1}{\alpha}\right) \left(\frac{x}{4c}\right)^{-\alpha}, \tag{2.1.28}$$

pour

$$x \geq 4c\sigma(S^{d-1})^{1/\alpha} \left(\left(\frac{3}{2}\left(1 + \frac{4}{2-\alpha}\ln\frac{2}{2-\alpha}\right)\ln\left(1 + \frac{8}{2-\alpha}\ln\frac{2}{2-\alpha}\right)\right) \vee \frac{4}{\alpha} \vee (6e^2)\right)^{1/\alpha}.$$

Ce résultat améliore la constante mais détériore le domaine de validité de la borne puisque (en ordre de grandeur) (2.1.27) est valable pour $x^\alpha \geq \frac{\sigma(S^{d-1})}{2-\alpha}$ tandis que (2.1.28) est valable pour $x^\alpha \geq \frac{\sigma(S^{d-1})}{2-\alpha}\left(\ln\frac{\sigma(S^{d-1})}{2-\alpha}\right)^2$. Pour la résumer, la preuve du théorème 2.13 est une adaptation de la preuve du théorème 2.12, on applique à la partie tronquée le lemme suivant (qui généralise le lemme 2 de [55] :

Lemme 2.14 *Soit $F : \Omega^{\mathcal{X}} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, K > 0$, telle que*

(i) $\sup_{y\in X} |D_yF(\omega)| \leq K < +\infty$, *$P(d\omega)$-p.s.*

(ii) $\|DF\|^k_{L^\infty(\Omega^{\mathcal{X}}, L^k(\nu))} \leq \alpha_k < +\infty$, $k = 2, 3, 4$.

De plus, on suppose que $\alpha_3 \leq 2\alpha_4/K$ et $K^2\alpha_2/\alpha_4 > 2$ et on note s_0 l'unique solution positive de $s\left(\alpha_2 - \frac{\alpha_4}{K^2}\right) = \frac{\alpha_4}{K^3}(e^{sK} - 1)$ et $x_0 = 3s_0(\alpha_2 - \alpha_4/K^2)$. Alors pour tout $x \leq x_0$,

$$P(F - E[F] \geq x) \leq \exp\left(-\frac{x^2}{6(\alpha_2 - \alpha_4/K^2)}\right),$$

et pour $x \geq x_0$,

$$P(F - E[F] \geq x) \leq K_0 \exp\left(\frac{x}{K} - \left(\frac{x}{K} + \frac{3\alpha_4}{K^4}\right)\ln\left(1 + \frac{K^3x}{3\alpha_4}\right)\right),$$

avec

$$K_0 = \exp\left(-\frac{x_0}{K} + \left(\frac{x_0}{K} + \frac{3\alpha_4}{K^4}\right)\ln\left(1 + \frac{K^3x_0}{3\alpha_4}\right) - \frac{x_0^2}{6(\alpha_2 - \alpha_4/K^2)}\right).$$

La preuve du lemme repose sur la proposition 2.1. Comme $|D_yF| \leq K$, on injecte dans (2.1.6) la majoration

$$e^{su} - 1 \leq su + \frac{s^2}{2}u^2 + \frac{e^{sK} - 1 - sK - s^2K^2/2}{K^3}u^3, \qquad 0 \leq u \leq K,\ s \geq 0,$$

À coup d'inégalités de Hölder, on déduit la majoration

$$h(s) \leq s\left(\alpha_2 - \frac{\alpha_4}{K^2}\right) + \frac{s^2}{2}\left(\alpha_3 - \frac{\alpha_4}{K}\right) + \frac{\alpha_4}{K^3}(e^{sK} - 1)$$

et on termine en comparant les trois termes obtenus (en s, en s^2 et exponentiel). □

Le théorème 2.13 justifie que les queues des lois des fonctionnelles de Poisson stables ont un comportement typique des lois stables en $1/x^\alpha$. Plus précisément, cet ordre est vrai dès que x^α est d'ordre au moins $\sigma(S^{d-1})\frac{1}{2-\alpha}\left(\ln\frac{1}{2-\alpha}\right)^2$. Dans [87], Marchal montre que dans un domaine fini (mais asymptotique), un régime en $\exp(-cx^\alpha)$ apparaît pour la concentration des fonctionnelles lipschitziennes des vecteurs stables quand α est proche de 2, ce qui, comme il le souligne, rappelle une concentration gaussienne. On généralise ce résultat au cas de fonctionnelles de Poisson stables dans le théorème 6.3 de [BHP-10]. Plus généralement, on propose dans [BH-11] des inégalités de concentration pour des fenêtres de x finies glissantes pour tout $\alpha \in (0,2)$ en traitant le cas des fonctionnelles de Poisson stables et de fonctionnelles lipschitziennes de vecteurs stables. On se contente ici d'évoquer les résultats pour les vecteurs α-stables pour $\alpha \in (1,2)$ (ce qui permet d'exprimer la concentration par rapport à l'espérance et d'éviter les difficultés techniques liées au contrôle des médianes, cf. lemme 2.11) on renvoie à la section 3 de [BH-11] pour le cas des fonctionnelles sur l'espace de Poisson muni d'une mesure de Lévy α-stable avec $\alpha \in (0,2)$.

En substance, en prenant $\sigma(S^{d-1})$ comme valeur de référence, on montre pour les fonctionnelles de vecteur stable X que les probabilités de concentration sont d'ordre au plus $\exp(-cx^{\alpha/(\alpha-1)})$ pour x petit, d'ordre au plus $\exp(-cx^\alpha)$ pour x de l'ordre de $\sigma(S^{d-1})^{1/\alpha}$, et d'ordre au plus $1/x^\alpha$ pour x grand, d'après le théorème 2.13. Les domaines de validité des inégalités dépendent de paramètres qui permettent de faire « glisser » ces domaines au prix d'une détérioration de la borne quand on se déplace vers $+\infty$.

Comme pour le théorème 2.12, l'idée est de tronquer la mesure de Lévy pour appliquer les résultat de [53] à des ID à mesure de Lévy avec un support borné en contôlant la contribution des termes de queue de la mesure de Lévy. Le choix de la troncature R en fonction du niveau x de concentration n'est pas le même selon l'ordre de x considéré (petit, moyen, grand) et mène à différents ordres de concentration.

On note ν la mesure de Lévy stable de $X \sim ID(b,0,\nu)$, on décompose le vecteur stable $X = Y_R + Z_R$ où $Y_R \sim ID(\tilde{b},0,\nu(\cdot \cap B(0,R)))$ et $Z_R \sim ID(0,0,\nu(\cdot \cap B(0,R)^c))$ sont indépendants avec $\tilde{b} = b - \int_{||y||>R} y\mathbf{1}_{||y||\leq 1}\nu(dy)$. Comme dans [55] pour f Lipschitz(1), on a

$$\begin{aligned}
& P(f(X) - E[f(X)] \geq x) \\
\leq\ & P(f(Y_R) - E[f(X)] \geq x) + P(Z_R \neq 0) \\
\leq\ & P\big(f(Y_R) - E[f(Y_R)] \geq x - |E[f(X)] - E[f(Y_R)]|\big) + P(Z_R \neq 0) \\
\leq\ & P\big(f(Y_R) - E[f(Y_R)] \geq x - E[||Z_R||]\big) + P(Z_R \neq 0).
\end{aligned} \tag{2.1.29}$$

On montre sans difficulté que $P(Z_R \neq 0) \leq \sigma/(\alpha R^\alpha)$ et $E[||Z_R||] \leq \frac{\sigma}{\alpha-1}R^{1-\alpha}$. Pour contrôler le premier terme de (2.1.29), on applique une version du lemme 2.14 pour les vecteurs ID à mesure de Lévy à support fini (cf. Lemme 1, [BH-11]), soit dans un cas simplifié :

$$P(f(Y_R) - E[f(Y_R)] \geq x) \leq \exp\left(-\frac{(2-\alpha)x^2}{2\sigma(S^{d-1})R^{2-\alpha}}\right).$$

Il reste alors à relier la troncature R au niveau de concentration x et à comparer la contribution des deux termes dans (2.1.29). Par exemple avec le choix $x = \lambda/R^{\alpha-1}$, on a

Théorème 2.15 *Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction Lipschitz(1). Alors pour n assez grand et λ dans un intervalle fini explicite, il existe $x_1(n, \alpha, \lambda) > 0$ tel que pour $0 \le x \le x_1(n, \alpha, \lambda)$,*

$$\begin{aligned} & P(f(X) - E[f(X)] \ge x) \\ \le \quad & \exp\left(-\frac{2-\alpha}{2n\sigma(S^{d-1})^{1/(\alpha-1)}} \left(\lambda - \frac{\sigma(S^{d-1})}{\alpha - 1} \right)^2 \left(\frac{x}{\lambda} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right) + \frac{\sigma(S^{d-1})}{\alpha} \left(\frac{x}{\lambda} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \le 1 \end{aligned} \quad (2.1.30)$$

Le terme prépondérant dans (2.1.30) est donné par l'exponentielle et pour tout $\varepsilon > 0$, (2.1.30) se réécrit en particulier pour x assez petit

$$P(f(X) - E[f(X)] \ge x) \le (1 + \varepsilon) \exp\left(-\frac{2-\alpha}{2n\sigma(S^{d-1})^{1/(\alpha-1)}} \left(\lambda - \frac{\sigma(S^{d-1})}{\alpha - 1} \right)^2 \left(\frac{x}{\lambda} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right).$$

La borne n'a d'intérêt bien sûr que si elle est plus petite que 1, ce qu'affirme le théorème 2.15 pour x assez petit. La borne indique un ordre de petite concentration au plus en $\exp(-cx^{\alpha/(\alpha-1)})$. Par ailleurs, il y a plusieurs paramètres en jeu (n, α) et on peut passer à la limite pour chacun d'eux $\alpha \to 2$, $n \to +\infty$. En particulier, quand on considère $X^{(\alpha)}$ un vecteur α-stable avec une mesure de Lévy dont la composante sphérique est uniforme de poids $\sigma(S^{d-1}) = d(2 - \alpha)$, on a $X^{(\alpha)} \Rightarrow W$, vecteur gaussien standard. En passant convenablement à la limite en α et en n, on montre qu'on récupère la concentration gaussienne (sous-optimale si $d > 1$, optimale si $d = 1$) :

$$P(f(W) - E[f(W)] \ge x) \le \exp\left(-x^2/(2d)\right)$$

sur le domaine $x \in (0, +\infty)$. Malheureusement, le facteur d empêche la borne d'être entièrement optimale en dimension $d > 1$, cf. Remarque 4 dans [BH-11].

Avec d'autres choix de troncature, on propose d'autres inégalités de concentration dans des domaines glissants en fonction des paramètres. On renvoie à la section 2 de [BH-11] et par exemple au théorème 2 où on fait le choix $R\left(1 + \frac{\sigma(S^{d-1})}{(\alpha-1)R^\alpha}\right) = x$.

2.2 Comparaison convexe

Dans la suite de cette deuxième partie consacrée au contrôle de lois de fonctionnelles stochastiques, nous proposons des inégalités de concentration convexe pour des processus de diffusion à sauts. Commençons par rappeler que pour des vecteurs aléatoires X, Y de $\mathbb{R}^d$, on dit que X est convexement dominé par Y (noté $X \preceq_{\text{cx}} Y$) si pour toute fonction $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ convexe, suffisamment intégrable, on a :

$$\mathbb{E}[\phi(X))] \le \mathbb{E}[\phi(Y)]. \qquad (2.2.1)$$

Notons que la comparaison (2.2.1) implique (lorsque X, Y sont suffisamment intégrables) $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$ et $\text{Var}(X) \le_{psd} \text{Var}(Y)$ où $\text{Var}(X)$, $\text{Var}(Y)$ sont les matrices de covariance de X, Y et $\le_{psd}$ désigne l'ordre usuel pour les matrices semi-définies positives. De plus, ces conditions nécessaires sont suffisantes lorsque X, Y sont gaussiens (nous renvoyons à [52] et à ses références pour des comparaisons de vecteurs gaussiens). Notons encore qu'avec $\phi(x) = \exp(\lambda\|x\|)$, $\lambda > 0$, (2.2.1) entraîne un contrôle des probabilités de déviation de X, $\mathbb{P}(\|X\| \ge x)$, par la transformée de Laplace de Y.

Des comparaisons convexes (2.2.1) pour des sommes de martingales *forward* et *backward* sont établies par Klein, Ma et Privault dans [71] à partir du contrôle de leurs caractéristiques. Leurs résultats sont fondés sur un calcul stochastique *forward-backward* et déclinés ensuite pour des processus de diffusion à sauts avec plusieurs types de sauts.

Avec Nicolas Privault, nous proposons dans [BP-12] des comparaisons convexes pour des produits de martingales exponentielles *forward* et *backward* en fonction des caractéristiques de leur logarithme stochastique. Un des domaines d'utilisation des martingales exponentielles est les mathématiques financières où ces martingales modélisent les processus de prix d'options financières.

Aussi dans [BP-14], nous proposons, avec Nicolas Privault, des résultats analogues pour des modèles financiers avec sauts, retrouvant ou complétant des résultats obtenus dans [11], [12], [13], [49]. Enfin, dans [ABP-16] avec Marc Arnaudon et Nicolas Privault, la généralisation de [71] à un cadre multidimensionnel est l'occasion de donner des inégalités de comparaison convexe pour des vecteurs possédant une représentation prévisible. On donne dans cette section un échantillon des résultats obtenus dans [BP-12], [BP-14], [ABP-16].

Notons que notre approche est fondée sur un calcul *forward-backward* tandis que les résultats de [11], [12], [13], [49] reposent sur la propagation de la convexité dans les modèles (d'options européennes). Décrivons cette propagation, en dimension 1, lorsque l'on compare les prix $\mathbb{E}[\phi(S_T)]$, $\mathbb{E}[\phi(S^*_T)]$ de processus de prix S, S^* à une date d'échéance T pour une fonction d'utilité ϕ (convexe). La propagation de la convexité concerne l'opérateur $\mathcal{G}(t,x) = \mathbb{E}[\phi(S^*_T)|S^*_t = x]$: comme $\mathcal{G}(T,x) = \phi(x)$, $\mathcal{G}(T,\cdot)$ est convexe et on parle de propagation de la convexité quand $\mathcal{G}(t,\cdot)$ est convexe pour tout t (la convexité se propage *backward*). Si tel est le cas, par une formule d'Itô (quand $\mathcal{G}(t,\cdot)$ est de classe $\mathcal{C}^2$, ce qui est vrai sous de bonnes conditions), on montre que $\mathcal{G}(t,S_t)$ est une sur-martingale (essentiellement parce qu'alors $\frac{\partial^2\mathcal{G}(t,x)}{\partial x^2} \geq 0$). Finalement, la propriété de sur-martingale donne :

$$\mathbb{E}[\phi(S_T)] = \mathbb{E}[\mathcal{G}(T,S_T)] \leq \mathcal{G}(0,1) = \mathbb{E}[\phi(S^*_T)]$$

(avec, pour simplifier, $S^*_0 = 1$). La propagation de la convexité est prouvée dans les modèles de diffusion par El Karaoui, Jeanblanc et Shreve [42] qui en déduisent ainsi des comparaisons de prix. Bellamy et Jeanblanc [11] puis Gushchin et Mordecki [48] proposent de telles comparaisons dans des modèles avec sauts sous l'hypothèse de propagation de la convexité. Ces comparaisons sont généralisées dans un cadre multidimensionnel par Bergenthum et Rüschendorf [12], qui donnent dans [13] des comparaisons générales de semi-martingales pour différents ordres stochastiques (sous une hypothèse de propagation *backward* de cet ordre). Dans tous ces travaux, le processus S^* (du prix majorant) doit être markovien. De façon générale, la propagation de la convexité dans les modèles markoviens est étudiée par Martini [88]. Toutefois dans les cadres non markoviens, la propagation de la convexité peut être en défaut, cf. [41, Th. 4.4]. Enfin, notons qu'Henderson et Hobson proposent des comparaisons de prix par un couplage des processus en S et S^* [49]. Cependant, leurs résultats s'appliquent pour des processus de diffusion à saut de paramètres déterministes ou alors avec une seule hauteur de saut possible.

Dans les réultats qui suivent et à part pour les applications du théorème 3.2 dans [BP-14] (page 37), on ne suppose pas la propagation de la convexité.

Nous commençons par quelques notations pour les martingales *forward*/*backward*. Étant données deux filtrations, $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, croissante, et $\mathcal{F}^* = (\mathcal{F}^*_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, décroissante, sur l'espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},P)$, on considère $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ une martingale $\mathcal{F}$-*forward*, continue à droite avec des limites à gauche avec $X_0 = 0$ et $(X^*_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ une martingale $\mathcal{F}^*$-*backward*, continue à gauche, avec des limites à droite avec $X^*_\infty = 0$. On note $(X^c_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ et $(X^{*c}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ leur partie continue et $\Delta X_t = X_t - X_{t^-}$, $\Delta^* X^*_t = X^*_t - X^*_{t^+}$ leurs sauts (*forward* et *backward*, respectivement). Notons encore

$$\mu(dt,dx) = \sum_{s>0} 1_{\{\Delta X_s\neq 0\}}\delta_{(s,\Delta X_s)}(dt,dx),$$

et

$$\mu^*(dt,dx) = \sum_{s>0} 1_{\{\Delta^* X^*_s\neq 0\}}\delta_{(s,\Delta^* X^*_s)}(dt,dx),$$

leur mesure de sauts et $\nu(dt,dx)$, $\nu^*(dt,dx)$ leur compensateur, *i. e.* leur projection $\mathcal{F}$- et $\mathcal{F}^*$-dual prévisibles. Enfin, on note $[X,X]_t$, $[X^*,X^*]_t$ et $\langle X^c,X^c\rangle_t$, $\langle X^{*c},X^{*c}\rangle_t$, $t\in\mathbb{R}_+$, leurs variations quadratiques optionnelles et prévisibles. On renvoie à [64] pour des détails sur ces caractéristiques locales (au moins dans le cas *forward*). Dans la suite, nous supposons que les martingales X et X^* satisfont la condition suivante d'adaptibilité :

$$X \text{ est } \mathcal{F}^*\text{-adapté et } X^* \text{ est } \mathcal{F}\text{-adapté.} \tag{2.2.2}$$

On dispose alors d'une formule d'Itô (cf. [71, Th. 8.1] :

Proposition 2.16 *Pour toute fonction $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et X, X^* des martingales forward, backward satisfaisant* (2.2.2), *on a la formule de changement de variables :*

$$\begin{aligned} f(X_t, X_t^*) - f(X_0, X_0^*) &= \int_{0^+}^t \partial_1 f(X_{u^-}, X_u^*) dX_u + \frac{1}{2}\int_0^t \partial_1^2 f(X_u, X_u^*) d\langle X^c, X^c\rangle_u \qquad (2.2.3) \\ &+ \sum_{0<u\leq t} (f(X_u, X_u^*) - f(X_{u^-}, X_u^*) - \Delta X_u \partial_1 f(X_{u^-}, X_u^*)) \\ &- \int_0^{t^-} \partial_2 f(X_u, X_{u^+}^*) d^* X_u^* - \frac{1}{2}\int_0^t \partial_2^2 f(X_u, X_u^*) d\langle X^{*c}, X^{*c}\rangle_u \\ &- \sum_{0\leq u<t} (f(X_u, X_u^*) - f(X_u, X_{u^+}^*) - \Delta X_u^* \partial_2 f(X_u, X_{u^+}^*)). \end{aligned}$$

Dans la suite, on suppose que les martingales ont des caractéristiques absolument continues, c'est à dire ont des variations quadratiques prévisibles de la forme

$$d\langle X^c, X^c\rangle_t = |\sigma_t|^2 dt \quad \text{et} \quad d\langle X^{*c}, X^{*c}\rangle_t = |\sigma_t^*|^2 dt, \qquad (2.2.4)$$

et des intensité de sauts de la forme

$$\nu(dt, dx) = \nu_t(dx)dt \qquad \text{et} \qquad \nu^*(dt, dx) = \nu_t^*(dx)dt, \qquad (2.2.5)$$

où $(\sigma_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, $(\nu_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ et $(\sigma_t^*)_{t\in\mathbb{R}_+}$, $(\nu_t^*)_{t\in\mathbb{R}_+}$ sont respectivement $\mathcal{F}$- et $\mathcal{F}^*$- prévisibles.

Nos résultats concernent des martingales exponentielles $M = \mathcal{E}(X)$ et $M^* = \mathcal{E}^*(X^*)$ (respectivement *forward* et *backward*) définies par les équations différentielles stochastiques (EDS)

$$dM_t = M_{t^-} dX_t \quad \text{et} \quad d^* M_t^* = M_{t^+}^* d^* X_t^*,$$

avec les conditions initiales et finales M_0 et M_∞^*. Elles sont explicitement données par

$$\begin{aligned} M_t &= M_0 \exp\left(X_t - \frac{1}{2}[X, X]_t\right) \prod_{0\leq s\leq t} \left((1 + \Delta X_{s^-}) e^{-\Delta X_{s^-} + \frac{1}{2}|\Delta X_{s^-}|^2}\right), \\ M_t^* &= M_\infty^* \exp\left(X_t^* - \frac{1}{2}\int_t^{+\infty} d[X^*, X^*]_s\right) \prod_{t\leq s<\infty} \left((1 + \Delta^* X_{s^+}^*) e^{-\Delta^* X_{s^+}^* + \frac{1}{2}|\Delta^* X_{s^+}^*|^2}\right), \end{aligned}$$

Notez que $(M_t)_{t\geq 0}$ et $(M_t^*)_{t\geq 0}$ ne sont pas nécessairement indépendantes. On pose

$$\bar{\nu}_t(dx) := x\nu_t(dx), \quad \bar{\nu}_t^*(dx) := x\nu_t^*(dx), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

et

$$\tilde{\nu}_t(dx) := |x|^2 \nu_t(dx) + |\sigma_t|^2 \delta_0(dx), \quad \tilde{\nu}_t^*(dx) := |x|^2 \nu_t^*(dx) + |\sigma_t^*|^2 \delta_0(dx), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Un premier résultat général est :

Théorème 2.17 *Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. On suppose que X, X^* satisfont* (2.2.2), (2.2.4), (2.2.5), *et l'une des conditions suivantes*

1. $|\sigma_t| \leq |\sigma_t^*|$, *$dPdt$-p.p., ν_t et ν_t^* sont portées par $\mathbb{R}_+$, $M_0, M_\infty^* \geq 0$ p.s. et*

$$\bar{\nu}_t([x, \infty) \leq \bar{\nu}_t^*([x, \infty)) < +\infty, \quad x \in \mathbb{R}, \ t \in \mathbb{R}_+,$$

2. $\tilde{\nu}_t([x, \infty)) \leq \tilde{\nu}_t^*([x, \infty)) < +\infty$, *$x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}_+$ et ϕ' est convexe.*

Alors, on a :

$$\mathbb{E}[\phi(M_t M_t^*)] \leq \mathbb{E}[\phi(M_s M_s^*)], \qquad 0 \leq s \leq t. \qquad (2.2.6)$$

Si, de plus,

3. $\mathbb{E}[M_t^*|\mathcal{F}_t^X] = 1$, $t \in \mathbb{R}_+$,

alors

$$\mathbb{E}[\phi(M_t)] \leq \mathbb{E}[\phi(M_s M_s^*)], \qquad 0 \leq s \leq t. \tag{2.2.7}$$

Par des approximations standard, on peut supposer que ϕ est de classe $\mathcal{C}^2$. On peut alors appliquer la formule d'Itô (2.2.3) à $f(x,y) = \phi(xy)$. En prenant l'espérance, il ne reste que les intégrales par rapport à $d\langle X^c, X^c\rangle_t = |\sigma_t|^2 dt$ et $d\langle X^{*c}, X^{*c}\rangle_t = |\sigma_t^*|^2 dt$ (contribution des parties « diffusion ») et celles par rapport à $\nu_u(dx)du$ et $\nu_u^*(dx)du$ (contribution des parties « saut »).

Sous l'hypothèse 1., on peut comparer directement les intégrales issues des diffusions entre elles et celles issues des sauts entres elles. Pour ces dernières, l'intégrant se réécrit sous une forme qui permet de comparer les intégrales grâce à la condition sur les queues de $\bar{\nu}_t$, $\bar{\nu}_t^*$, pour cela il faut que ν_u et ν_u^* soient portées par $\mathbb{R}^+$.

Sous l'hypothèse 2., en réécrivant les intégrales issues des sauts (grâce à une formule de Taylor exacte), on peut reformuler les intégrales issues de la diffusion et celles issues des sauts comme une seule intégrale par rapport à $\tilde{\nu}_u(dx)du$ (pour la contribution *forward*) et par rapport à $\tilde{\nu}_u^*(dx)du$ (pour la contribution *backward*). Une nouvelle fois, on se ramène à comparer les queues de $\tilde{\nu}_t$ et de $\tilde{\nu}_t$ si l'intégrant à de bonnes propriétés, ce qui exige que ϕ' soit convexe.

Enfin, la conclusion (2.2.7) s'obtient facilement par l'inégalité de Jensen appliquée à (2.2.6) avec l'hypothèse 3. □

On peut observer que sous l'hypothèse 2., les conditions de comparaison mélangent le comportement de la diffusion et le comportement des sauts. Ainsi, il est possible de compenser une mauvaise comparaison des comportements diffusion par une comparaison très bonne des comportements de saut (ou vice versa).

Avec la conclusion (2.2.7), on peut découpler l'inégalité de comparaison. C'est le cas par exemple quand on prend $s = 0$ et que $M_0 = 1$, on a $M_t \preceq_{\mathrm{cx}} M_0^*$.

En prenant un compensateur *backward* de la forme $\nu_t^*(dx) = \lambda_t^* \delta_k(dx)$ où $(\lambda_t^*)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est $\mathcal{F}^*$-prévisible et $k \in \mathbb{R}$, on considère une martingale X^* à sauts de taille k fixe, *i. e.* par exemple

$$M_t^* = 1 + \int_t^{+\infty} \sigma_s^* M_s^* d^*W_s^* + k \int_t^{+\infty} M_{s^+}(d^* Z_s^* - \lambda_s^* ds)$$

où $(W_t^*)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un mouvement brownien *backward* et $(Z_t^*)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus ponctuel *backward* d'intensité $(\lambda_t^*)_{t\in\mathbb{R}_+}$. Dans ce cas, on interprète les conditions de comparaison des sauts dans le théorème 2.21 comme des conditions de sauts bornés et ce théorème donne :

Corollaire 2.18 *On suppose que* (2.2.2), (2.2.4) *et* (2.2.5) *sont vérifiées, que* $\nu_t^*(dx) = \lambda_t^* \delta_k(dx)$ *et que l'une des conditions suivantes est satisfaites :*

1. $0 \leq \Delta X_t \leq k$, *dPdt-p.p. et*

$$|\sigma_t| \leq |\sigma_t^*|, \qquad \int_0^k x\nu_t(dx) \leq k\lambda_t^*, \quad dPdt - p.p.$$

2. $\Delta X_t \leq k$, *dPdt-p.p. et*

$$|\sigma_t| \leq |\sigma_t^*|, \quad \int_{-\infty}^k |x|^2 \nu_t(dx) \leq k^2 \lambda_t^*, \quad dPdt - p.p.$$

3. $\Delta X_t \leq 0 \leq k$, *dPdt-p.p. et*

$$|\sigma_t|^2 + \int_{-\infty}^0 |x|^2 \nu_t(dx) \leq |\sigma_t^*|^2 + k^2 \lambda_t^*, \quad dPdt - p.p.$$

4. $0 \leq \Delta X_t \leq k$, *dPdt-p.p.* $\int_0^k |x|^2 \nu_t(dx) \leq k^2 \lambda_t^*$ *et*

$$|\sigma_t|^2 + \int_0^k |x|^2 \nu_t(dx) \leq |\sigma_t^*|^2 + k^2 \lambda_t^*, \qquad dPdt - p.p.$$

Alors, on a :

$$\mathbb{E}[\phi(M_t)] \leq \mathbb{E}[\phi(M_s M_s^*)], \quad 0 \leq s \leq t, \tag{2.2.8}$$

pour toute fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *convexe, avec en plus* ϕ' *convexe dans les cas* 2.–5..

La preuve consiste en une discussion de tous les cas possibles. La condition $0 \leq \Delta X_t \leq k$, resp. $\Delta X_t \leq k$, est équivalente à $\nu_t([0,k]^c) = 0$, resp. $\nu_t((k,\infty)) = 0$. En utilisant :

$$\begin{aligned} \bar{\nu}_t^*([x,+\infty[) &= k\lambda_t^* \mathbf{1}_{]-\infty,k]}(x), \\ \tilde{\nu}_t^*([x,+\infty[) &= k^2\lambda_t^* \mathbf{1}_{]-\infty,k]}(x) + |\sigma_t^*|^2 \delta_0([x,+\infty[), \end{aligned}$$

on montre que les hypothèses 1. (resp. 2.) du théorème 2.21 sont satisfaites dans le cas 1. (resp. 2.–5.) □

À nouveau, on observe que dans 1. et 4., la même condition ($0 \leq \Delta X_t \leq k$) sur les sauts est supposée. Toutefois, dans le cas 4., la condition sur les paramètres mélange σ_t et ν_t, autorisant une sorte de compensation, par contre il faut en plus ϕ' convexe dans ce cas. Notons que le cas $\Delta X_t \leq k \leq 0$, $dPdt$-p.p. $|\sigma_t| \leq |\sigma_t^*|$, $dPdt$-p.p. et

$$|\sigma_t|^2 + \int_{-\infty}^k |x|^2 \nu_t(dx) \leq |\sigma_t^*|^2 + k^2 \lambda_t^*, \qquad dPdt - p.p.$$

qui fait naturellement suite au cas 1.–4. est en fait contenu dans 3.

En prenant des martingales X et X^* avec des parties diffusion et saut explicites, on peut donner des conditions entièrement explicites sur les différents paramètres (coefficients de diffusion, intensité de sauts) pour garantir la comparaison convexe (2.2.6). Sous des conditions supplémentaires d'indépendance, on peut découpler la comparaison.

On considère les martingales *forward* et *backward* données par

$$X_t = \int_0^t \sigma_s dW_s + \int_0^t J_{s^-}(dZ_s - \lambda_s ds), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

et

$$X_t^* = \int_t^{+\infty} \sigma_s^* d^*W_s^* + \int_t^{+\infty} J_{s^+}^*(d^*Z_s^* - \lambda_s^* ds), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

où $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un mouvement brownien standard, $(Z_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un processus ponctuel, générant ensemble une filtration $\mathcal{F}^X$. On suppose que W est un $\mathcal{F}$-mouvement brownien et que Z a pour compensateur $(\lambda_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ par rapport à $\mathcal{F}$ (on ne demande pas d'indépendance entre W et Z) et $(W_t^*)_{t\in\mathbb{R}_+}$ et $(Z_t^*)_{t\in\mathbb{R}_+}$ sont, indépendamment de $\mathcal{F}^X$, un mouvement brownien standard *backward* et un processus ponctuel *backward* d'intensité déterministe $(\lambda_t^*)_{t\in\mathbb{R}_+}$. On suppose que le processus σ_t est carré-intégrable, $\mathcal{F}_t^X$-prévisible, que $(J_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est $\mathcal{F}_t^X$-prévisible carré-intégrable ou positif intégrable. Les processus $(\sigma_t^*)_{t\in\mathbb{R}_+}$, $(J_t^*)_{t\in\mathbb{R}_+}$ sont supposés $\mathcal{F}_0^X$-mesurables avec les mêmes intégrabilités que $(\sigma_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, $(J_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. Les mesures caractéristiques de X, X^* sont alors

$$\nu_t(dx) = \lambda_t \delta_{J_t}(dx) \quad \text{et} \quad \nu_t^*(dx) = \lambda_t^* \delta_{J_t^*}(dx).$$

On applique le théorème 2.21 avec les filtrations $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^X \vee \sigma(W_s^*, Z_s^* \ : \ s \in \mathbb{R}_+)$, $t \in \mathbb{R}_+$, et $\mathcal{F}_t^* = \mathcal{F}_\infty^X \vee \sigma(W_s^*, Z_s^* \ : \ s \geq t)$, $t \in \mathbb{R}_+$. La restriction $(\sigma_t^*)_{t\in\mathbb{R}_+}$, $(J_t^*)_{t\in\mathbb{R}_+}$ $\mathcal{F}_0^X$-mesurables est nécessaire pour que la condition (2.2.2) soit vérifiée pour la martingale *backward* X^*. En substance, cette condition exige que $(\sigma_t^*)_{t\in\mathbb{R}_+}$, $(J_t^*)_{t\in\mathbb{R}_+}$ soient déterministes ou indépendants de $\mathcal{F}^X$. Le même type de condition est nécessaire pour les corollaires 4.2, 5.1, 5.2, 6.1 et 6.2. On déduit alors un résultat avec des conditions similaires à celles du corollaire 2.18. Les conditions exactes sur σ_t, λ_t, J_t et sur σ_t^*, λ_t^*, J_t^* dépendent des positionnement relatifs de J_t, J_t^* et 0. À titre d'exemple, on a :

Corollaire 2.19 *On suppose que (2.2.2), (2.2.4) et (2.2.5) sont vérifiées. Alors on a* $\mathbb{E}[\phi(M_t)] \leq \mathbb{E}[\phi(M_s M_s^*)]$ *si* $0 \leq s \leq t$ *pour toute fonction convexe* $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *si par exemple*

1. $0 \leq J_t \leq J_t^*$, $\lambda_t dPdt$*-p.p. et*

$$|\sigma_t| \leq |\sigma_t^*|, \qquad \lambda_t J_t \leq \lambda_t^* J_t^*, \qquad dPdt\text{-p.p.},$$

2. $0 \leq J_t \leq J_t^*$, $\lambda_t dPdt$*-p.p. et*

$$\lambda_t |J_t|^2 \leq \lambda_t^* |J_t^*|^2, \quad \text{et} \quad |\sigma_t|^2 + \lambda_t |J_t|^2 \leq |\sigma_t^*|^2 + \lambda_t^* |J_t^*|^2, \qquad dPdt\text{-p.p.},$$

avec en plus ϕ' *convexe.*

Une nouvelle fois, la condition 2. permet une compensation dans la comparaison des caractéristiques entre les comportements diffusion et saut. On renvoie au Corollaire 5.1 de [BP-12] pour la version intégrale de ce résultat avec tous les cas.

Signalons enfin qu'on peut traiter de la même façon le cas où la partie à saut est donnée par une intégrale de Poisson, *i. e.*

$$dM_t = \sigma_t M_t dW_t + \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} J_{t^-,x} M_{t^-} (\omega(dt, dx) - \gamma(dx)dt),$$

où $\omega(dt, dx)$ est une mesure de Poisson de la forme $\omega(dt, dx) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \delta_{(t_i, x_i)}(dt, dx)$ contrôlée par une mesure de Radon diffuse γ sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ vérifiant

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} (|x|^2 \wedge 1)\gamma(dx) < +\infty. \tag{2.2.9}$$

Un résultat analogue aux corollaires 2.18 et 2.19 s'obtient. Dans ce cas, c'est (selon les conditions) la quantité $\int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} |J_{t,y}|\gamma(dy)$ ou $\int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} |J_{t,y}|^2 \gamma(dy)$ qui intervient pour le contrôle de la partie à saut. On renvoie au corollaire 6.1 de [BP-12] pour un énoncé précis.

Dans les modèles financiers, le même type d'arguments que pour le théorème 2.21 permettent, avec la propriété de propagation de la convexité, de donner des bornes pour les prix d'options financières modélisées par des martingales exponentielles. Dans les résultats de [BP-14], nous établissons des bornes inférieure et supérieure qui complètent celles de Bergenthum et Rüschendorf [12]. On complète ainsi [12] et dans le cas sans saut, on retrouve des résultats de [42]. On pourra consulter aussi [11], [48], [49].

On considère un processus de prix $(S_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ donné par le processus de diffusion à sauts solution de l'équation différentielle stochastique (EDS)

$$\frac{dS_t}{S_{t^-}} = r_t dt + \sigma_t dW_t + \int_{-\infty}^{+\infty} y(\mu(dt, dy) - \nu_t(dy)dt),$$

où $(W_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un mouvement brownien par rapport à une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ et avec une mesure de saut (logarithme) $\mu(dt, dy)$ de compensateur $\nu_t(dx)dt$, et où $(r_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ sont $\mathcal{F}$-adaptés (en fait r sera pris déterministe). On définit le pseudo-générateur (aléatoire) $\mathcal{L}$ de S par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f(t, x) &= r_t x \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2} x^2 \sigma_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(f(t, x(1 + y)) - f(t, x) - yx \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right) \nu_t(dy). \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

Ce pseudo-générateur sastisfait une équation de Kolmogorov : en définissant $v \in \mathcal{C}^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R})$ pour $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz par

$$v^*(t, S^*(t)) = \mathbb{E}\left[\phi(S^*(T))\middle|S^*(t)\right], \quad 0 \le t \le T, \tag{2.2.11}$$

on a (en appliquant la formule d'Itô) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v^*}{\partial t}(t,x) + \mathcal{L}^* v^*(t,x) = 0, \\ v^*(T,x) = \phi(x). \end{cases} \tag{2.2.12}$$

Nous allons comparer S à deux valeurs modélisées par des processus de diffusion à sauts $(S_*(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$, $(S^*(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$, solutions des EDS

$$\frac{dS^*(t)}{S^*(t^-)} = r^*(t)dt + \sigma^*(t, S^*(t))dW_t + \int_{-\infty}^{+\infty} y(\mu^*(dt,dy) - \nu^*(t, S^*(t^-), dy)dt)$$

et

$$\frac{dS_*(t)}{S_*(t^-)} = r_*(t)dt + \sigma_*(t, S_*(t))dW_t + \int_{-\infty}^{+\infty} y(\mu_*(dt,dy) - \nu_*(t, S_*(t^-), dy)dt)$$

où $r^*(t)$, $r_*(t)$ sont des taux d'intérêt déterministes, $\sigma^*(t,x)$, $\sigma_*(t,x)$ sont des fonctions de volatilité (lipschitziennes). Ici, $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien et $\mu^*(dt,dy)$, $\mu_*(dt,dy)$ sont des mesures de sauts de $\mathcal{F}$-compensateurs respectifs $\nu^*(t, S^*(t^-), dy)$ et $\nu_*(t, S_*(t^-), dy)$. On associe à S_*, S^* des (pseudo)-générateurs $\mathcal{L}_*$ et $\mathcal{L}^*$ (comme en (2.2.10)), et des fonctions $v_*, v^* \in \mathcal{C}^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R})$ (comme en (2.5)). En utilisant le même type d'EDP que (2.2.12) pour v_* et pour v^* et en utilisant l'unicité de la décomposition d'une sur-(sous-)martingale en somme de martingale et de processus (dé)croissant, on justifie les bornes suivantes pour v :

Proposition 2.20 *Les processus $v_*(t,S_t)$ et $v^*(t,S_t)$ sont (respectivement) des sous- et sur-martingales si*

$$\mathcal{L}_* v_*(t,S_t) \le \mathcal{L} v_*(t,S_t), \quad \textit{resp.} \quad \mathcal{L} v^*(t,S_t) \le \mathcal{L}^* v^*(t,S_t), \quad dtdP\text{-}p.p. \tag{2.2.13}$$

Dans ce cas, on a :

$$v_*(t,S_t) \le \mathbb{E}\left[\phi(S_T)\middle|\mathcal{F}_t\right] \le v^*(t,S_t), \quad 0 \le t \le T, \tag{2.2.14}$$

et en particulier

$$E[\phi(S_*(T)) \mid S_*(0) = x] \le \mathbb{E}\left[\phi(S_T) \mid S_0 = x\right] \le E[\phi(S^*(T)) \mid S^*(0) = x], \quad x > 0.$$

Dans la suite de [BP-14], on suppose que les taux d'intérêt $r_*(t), r_t, r^*(t)$ sont les mêmes et on suppose la propagation de la convexité pour v_* et v^* (*i. e.* $v_*(t,\cdot)$ et $v^*(t,\cdot)$ sont supposées convexes pour tout $t \in [0,T]$ quand la fonction ϕ est convexe). On donne alors des conditions sur les volatilités $\sigma_*, \sigma, \sigma^*$ et sur les compensateurs ν_*, ν, ν^* pour que les conditions (2.2.13) soient satisfaites. Les conditions que nous proposons sont dans le *même esprit* que celles du théorème 2.17 ci-dessus et elles complètent celles de [12] en montrant qu'on peut tester le générateur du processus de diffusion à saut sur les fonctions croissantes, cf. théorème 3.2 dans [BP-14]. Enfin notons que dans [49], les conditions sur la nature des sauts sont plus restrictives. Nous y étudions en particulier le cas d'un processus S à sauts bornés, *i. e.* avec des compensateurs pour S_* et S^* de la forme

$$\nu_*(t,x,dy) = \lambda_*(t,x)\delta_{k_*}(dy) \quad \text{et} \quad \nu^*(t,x,dy) = \lambda^*(t,x)\delta_{k^*}(dy),$$

On renvoie à la Proposition 4.2. dans [BP-14]. À titre d'exemple, citons un des cas possibles : si $\dfrac{\partial v_*}{\partial x}(t,\cdot)$ et $\dfrac{\partial v^*}{\partial x}(t,\cdot)$ sont convexes

$$|\sigma_*(t,S_t)|^2 + |k_*|^2\lambda_*(t,S_t) \le |\sigma_t|^2 + \int_{k_*}^{k^*} |y|^2\nu_t(dy) \le |\sigma^*(t,S_t)|^2 + |k^*|^2\lambda^*(t,S_t),$$

$dPdt$-p.p. et $k_* \le 0 \le k^*$, $k_* \le \Delta X_t \le k^*$, puis

$$|\sigma_*(t,S_t)|^2 \le |\sigma_t|^2 + \int_0^{k^*} |y|^2 \nu_t(dy), \quad \int_0^{k^*} |y|^2 \nu_t(dy) \le |k^*|^2 \lambda^*(t,S_t),$$

$dPdt$-p.p., alors la conclusion (2.2.14) de la proposition 2.20 est vraie.

Un autre cas de processus S étudié est celui où les sauts sont donnés par un processus ponctuel $(Z_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ d'intensité $(\lambda_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, c'est à dire

$$S_t = S_0 + \int_0^t r_u S_u du + \int_0^t \sigma_u S_u dW_u + \int_0^t J_{u^-} S_{u^-}(dZ_u - \lambda_u du), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

où $(\sigma_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, $(J_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ sont prévisibles par rapport à $\mathcal{F}$ (la filtration engendrée par W et Z). Par exemple, les conditions $0 \le J_*(t,S_t) \le J_t \le J^*(t,S_t)$ et

$$|\sigma_*(t,S_t)| \le |\sigma_t| \le |\sigma^*(t,S_t)|, \quad \lambda_*(t,S_t)J_*(t,S_t) \le \lambda_t J_t \le \lambda^*(t,S_t)J^*(t,S_t),$$

$dPdt$-p.p. assurent (2.2.14), cf. Proposition 5.1 dans [BP-14].

Enfin, on considère un processus S dont le saut est donné par une mesure de Poisson ω sur $\mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ d'intensité $\gamma(dx)dt$ avec γ comme en (2.2.9),

$$dS_t = r_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t + \int_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} J_{t^-,x} S_{t^-}(\omega(dt,dx) - \gamma(dx)), \tag{2.2.15}$$

où σ_t est carré-intégrable $\mathcal{F}$-prévisible, $(J_{t,x})_{(t,x)\in[0,T]\times(\mathbb{R}^d\setminus\{0\})}$ est $\mathcal{F}$-prévisible intégrable positive, ou carré-intégrable, et en notant $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_t$ la filtration engendrée par W et ω. Par exemple la proposition 2.20 s'applique si les fonctions $\frac{\partial v_*}{\partial x}(t,\cdot)$ et $\frac{\partial v^*}{\partial x}(t,\cdot)$ sont convexes et

$$|\sigma_*(t,S_t)|^2 + \lambda_*(t,S_t)|J_*(t,S_t)|^2 \le \sigma_t^2 + \int_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} |J_{t,y}|^2 \gamma(dy) \le |\sigma^*(t,S_t)|^2 + \lambda^*(t,S_t)|J^*(t,S_t)|^2,$$

$dPdt$-p.p. puis $0 \le J_*(t,S_t) \le J_{t,x} \le J^*(t,S_t)$ et

$$\lambda_*(t,S_t)|J_*(t,S_t)|^2 \le \int_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} |J_{t,y}|^2 \gamma(dy) \le \lambda^*(t,S_t)|J^*(t,S_t)|^2,$$

$dP\gamma(dx)dt$-p.p. Pour un énoncé intégral, on renvoie à la Proposition 6.1 de [BP-14].

Avec Marc Arnaudon et Nicolas Privault, nous proposons enfin dans [ABP-16] une généralisation de [71] dans un cadre multidimensionnel. Nous considérons des martingales d-dimensionnelles, $(M(t))_{t\in\mathbb{R}_+} = (M_1(t),\dots,M_d(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$, *$\mathcal{F}$-forward*, et $(M^*(t))_{t\in\mathbb{R}_+} = (M_1^*(t),\dots,M_d^*(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$, *$\mathcal{F}^*$-backward*. Nous conservons les notations précédentes (cf. p. 32) : M^c, M^{*c}, ΔM, ΔM^*, $\mu(dt,dx)$, $\mu^*(dt,dx)$, $\nu(dt,dx)$, $\nu^*(dt,dx)$ $[M,M]$, $[M^*,M^*]$, $\langle M,M\rangle$, $\langle M^*,M^*\rangle$ en les adaptant au cadre d-dimensionnel (ainsi les crochets $[M,M]$, $[M^*,M^*]$, $\langle M,M\rangle$, $\langle M^*,M^*\rangle$ sont à valeurs dans $\mathcal{M}^d$, les matrices réelles de taille $d\times d$). Nous supposons en particulier toujours les martingales M et M^* satisfont la condition d'adaptibilité (2.2.2) et ont des caractéristiques locales de la forme (2.2.5)–(2.2.4), c'est à dire

$$\left.\begin{array}{lcl} M \text{ est } \mathcal{F}^*\text{-adapté} & \text{et} & M^* \text{ est } \mathcal{F}\text{-adapté} \\ \nu(dt,dx) = \nu_t(dx)dt & \text{et} & \nu^*(dt,dx) = \nu_t^*(dx)dt \\ d\langle M^c,M^c\rangle_t = H(t)dt & \text{et} & d\langle M^{*c},M^{*c}\rangle_t = H^*(t)dt \end{array}\right\} \tag{2.2.16}$$

où $H(t) = (H_{i,j}(t))_{1\le i,j\le d}$ et $H^*(t) = (H_{i,j}^*(t))_{1\le i,j\le d}$ sont à valeurs dans $\mathcal{M}^d$ et $\mathcal{F}$-prévisible (resp. $\mathcal{F}^*$-prévisible). avec $(H(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$, $(H^*(t))_{t\in\mathbb{R}_+} \in L^2(\Omega\times\mathbb{R}_+)$, et

$$\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+} \|x\|\nu_t(dx)dt\right] < +\infty, \quad \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+} \|x\|\nu_t^*(dx)dt\right] < +\infty. \tag{2.2.17}$$

Quand les martingales satisfont la condition d'adaptabilité dans (2.2.16), on dispose d'une formule d'Itô (extension à la dimension d de la proposition 2.16 pour la dimension $d = 1$). Pour toute $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ de la forme $f(x, y) = f(x_1, \ldots, x_d, y_1, \ldots, y_d)$, on a, pour $0 \leq s \leq t$:

$$\begin{aligned}
&f(M(t), M^*(t)) = f(M(s), M^*(s)) \qquad (2.2.18)\\
&+\sum_{i=1}^d \int_{s^+}^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(M(u^-), M^*(u))dM_i(u) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \int_s^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M(u), M^*(u))d\langle M_i^c, M_j^c\rangle_u\\
&+\sum_{s<u\leq t}\left(f(M(u), M^*(u)) - f(M(u^-), M^*(u)) - \sum_{i=1}^d \Delta M_i(u)\frac{\partial f}{\partial x_i}(M(u^-), M^*(u))\right)\\
&-\sum_{i=1}^d \int_s^{t^-} \frac{\partial f}{\partial y_i}(M(u), M^*(u^+))d^*M_i^*(u) - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \int_s^t \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j}(M(u), M^*(u))d\langle M_i^{*c}, M_j^{*c}\rangle_u\\
&-\sum_{s\leq u<t}\left(f(M(u), M^*(u)) - f(M(u), M^*(u^+)) - \sum_{i=1}^d \Delta^* M_i^*(u)\frac{\partial f}{\partial y_i}(M(u), M^*(u^+))\right),
\end{aligned}$$

où d et d^* désignent les différentielles d'Itô *forward* et *backward*.

Précisons maintenant quelques ordres (sur $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{M}^d$ et sur les mesures sur $\mathbb{R}^d$). Dans la suite, on dira qu'une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est croissante si $f(x_1, \ldots, x_d) \leq f(y_1, \ldots, y_d)$ pour tout $x_1, \ldots, x_d \in \mathbb{R}$ et $y_1, \ldots, y_d \in \mathbb{R}$ tels que $x_i \leq y_i$, $i = 1, \ldots, d$. On rappelle que, pour $A, B \in \mathcal{M}^d$, on note $A \leq_{psd} B$ si $B - A$ est positive semidéfinie (*i. e.* $\langle x, Ax\rangle \leq \langle x, Bx\rangle$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$). L'ordre $\preceq_{\text{cx}}$, défini en (2.2.1) pour des vecteurs aléatoires, se définit pareillement pour des mesures sur $\mathbb{R}^d$, on en définit aussi d'autres dont on aura besoin dans la suite : on note $\mu \preceq_{\text{cx}} \nu$ (resp. $\mu \preceq_{\text{cxp}} \nu$, resp. $\mu \preceq_{\text{cxpi}} \nu$) si

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)\mu(dx) \leq \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)\nu(dx)$$

pour toute toute fonction $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ convexe (resp. convexe positive, resp. convexe positive croissante). On peut noter que si μ et ν sont finies alors aussi bien $\mu \preceq_{\text{cxp}} \nu$ que $\mu \preceq_{\text{cxpi}} \nu$ implique $\mu(\mathbb{R}^d) \leq \nu(\mathbb{R}^d)$, et $\mu \preceq_{\text{cx}} \nu$ est équivalent à $\mu \preceq_{\text{cxp}} \nu$ et $\mu(\mathbb{R}^d) = \nu(\mathbb{R}^d)$.

Avec ces notations, on peut énoncer le résultat suivant qui généralise le théorème 3.3 de [71] :

Théorème 2.21 *On suppose que $H(t) \leq_{\text{psd}} H^*(t)$, $dPdt$-p.p. et que l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :*

i) $\nu_t \preceq_{\text{cxp}} \nu_t^*$ pour presque chaque $t \in \mathbb{R}_+$,

ii) $\nu_t \preceq_{\text{cxpi}} \nu_t^*$ et ν_t, ν_t^* sont portées pas $(\mathbb{R}_+)^d$, pour presque chaque $t \in \mathbb{R}_+$.

Alors, pour toute fonction $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ convexe, on a

$$\mathbb{E}[\phi(M(s) + M^*(s))] \geq \mathbb{E}[\phi(M(t) + M^*(t))], \qquad 0 \leq s \leq t. \qquad (2.2.19)$$

Par des approximations standard, on peut supposer que ϕ est de classe $\mathcal{C}^2$. On peut alors appliquer la formule d'Itô (2.2.18) à $f(x, y) = \phi(x + y)$. En prenant l'espérance, il ne reste que les intégrales par rapport à $d\langle M^c, M^c\rangle_t = H(t)dt$ et $d\langle M^{*c}, M^{*c}\rangle_t = H^*(t)dt$ (contribution des parties « diffusion ») et celles par rapport à $\nu_u(dx)du$ et $\nu_u^*(dx)du$ (contribution des parties « saut »), ainsi

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\phi(M(t) + M^*(t))]\\
= \ &\mathbb{E}[\phi(M(s) + M^*(s))] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_s^t \langle \nabla^2\phi(M(u) + M^*(u)), H(u) - H^*(u)\rangle du\right]\\
&+\mathbb{E}\left[\int_s^t \int_{\mathbb{R}^d} \Psi(x, M(u) + M^*(u))(\nu_u(dx) - \nu_u^*(dx))du\right], \qquad (2.2.20)
\end{aligned}$$

avec, pour $x, y \in \mathbb{R}^d$, $\Psi(x,y) = \phi(x+y) - \phi(y) - \sum_{i=1}^d x_i \frac{\partial \phi}{\partial y_i}(y)$. D'après la condition $H \leq_{psd} H^*$, la contribution du terme de diffusion est négative. Ensuite, selon que ν_t, ν_t^* sont portées par $(\mathbb{R}_+)^d$ ou pas, la fonction Ψ est dans la classe de fonctions tests pour laquelle la condition $i)$ ou $ii)$ garantit la négativité du terme correspondant dans (2.2.20), ce qui prouve (2.2.19). □

Remarque 2.22

- En fait, on peut observer que pour des fonctions ϕ de classe $\mathcal{C}^2$, on peut proposer une condition mixte sur H, H^* et ν, ν^* pour laquelle (2.2.19) reste vraie, cf. (3.13) et la remarque 3.2 dans [ABP-16].
- Par ailleurs, quand $\mathbb{E}[M^*(t) \mid \mathcal{F}_t^M] = 0$, $t \in \mathbb{R}_+$ (par exemple avec de l'indépendance), on peut découpler (2.2.19) par l'inégalité de Jensen. Ainsi, par exemple quand M_0 est déterministe, on a $M(t) - \mathbb{E}[M(t)] \preceq_{cx} M_0^*$, $t \geq 0$.
- Enfin, notons que si $\nu^*(dt, dx) = \lambda^*(t)\delta_k(dx)dt$ où $k \in \mathbb{R}^d$ et $(\lambda^*(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est positif $\mathcal{F}^*$-prévisible. Alors, les conditions (i) (resp. (ii)) du théorème 2.21 deviennent $\nu_t = \lambda(t)\delta_k$ et $\lambda(t) \leq \lambda^*(t)$, resp. $k \in (\mathbb{R}_+)^d$, $\nu_t(\mathbb{R}^d) \leq \lambda^*(t)$ et $\nu_t\left(\mathbb{R}^d \setminus \bigcap_{i=1}^d]-\infty, k_i]\right) = 0$, c'est à dire les sauts $\Delta M_i(t)$ sont p.s. majorés par k_i, $i = 1, \dots, d$.
- Notons que, dans le théorème 2.21 (et ses applications), nos conditions sur les sauts en $i)$ et $ii)$ s'expriment avec un ordre plus faible ($\preceq_{\text{cxp}}$ ou $\preceq_{\text{cxpi}}$) que l'ordre pour lequel la conclusion est valable ($\preceq_{\text{cx}}$) contrairement à [13] (cf. théorèmes 2.2, 2.7).

Typiquement, nous appliquons le théorème 2.21 avec des martingales de la forme

$$\begin{aligned} M(t) &= M_0 + \int_0^t A(s)dW(s) + \int_0^t J(s)(dZ(s) - \lambda(s)ds), \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ M^*(t) &= \int_t^{+\infty} A^*(s)d^*W^*(s) + \int_t^{+\infty} J^*(s)(d^*Z^*(s) - \lambda^*(s)ds), \quad t \in \mathbb{R}_+, \end{aligned}$$

où $(W(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un mouvement brownien standard dans $\mathbb{R}^n$, $(Z(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ un processus ponctuel dans $\mathbb{R}^n$ donné par $Z(t) = (Z_1(t), \dots, Z_n(t))$ avec $(Z_i(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ des processus ponctuels réels d'intensités $(\lambda_i(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$, $1 \leq i \leq n$, et W^*, Z^* sont des analogues *backward* puis $(A(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$, $(J(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$, resp. $(A^*(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$, $(J^*(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ sont à valeurs dans $\mathcal{M}^{d\times n}$, prévisibles par rapport à $\mathcal{F}_t^M := \sigma(W(s), Z(s) : s \leq t)$, resp. $\mathcal{F}_t^{M^*} := \sigma(W^*(s), Z^*(s) : s \geq t)$, $t \in \mathbb{R}_+$. Dans ce cas,

$$\nu_t(dx) = \sum_{j=1}^n \lambda_j(t)\delta_{(J_{1,j}(t),\dots,J_{d,j}(t))}(dx) \quad \text{et} \quad \nu_t^*(dx) = \sum_{j=1}^n \lambda_j^*(t)\delta_{(J_{1,j}^*(t),\dots,J_{d,j}^*(t))}(dx).$$

Le théorème 2.21 permet de déduire des inégalités de comparaison pour des vecteurs qui ont une représentation prévisible : étant donnés $(W(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$, $(\tilde{W}(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$, des mouvements browniens n-dimensionnels et $\mu(dx, dt)$, $\mu(dx, dt)$ des mesures de saut de compensateurs $\nu(dt, dx) = \nu_t(dx)dt$, $\tilde{\nu}(dt, dx) = \tilde{\nu}_t(dx)dt$, W, μ et $\tilde{W}, \tilde{\mu}$ engendrant indépendamment les filtrations $\mathcal{F}^M = (\mathcal{F}_t^M)_{t\in\mathbb{R}_+}$ et $\mathcal{F}^{\tilde{M}} = (\tilde{\mathcal{F}}_t^M)_{t\in\mathbb{R}_+}$, on considère

$$\begin{aligned} F &= \int_0^{+\infty} A(t)dW(t) + \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} B_t(x)(\mu(dt, dx) - \nu_t(dx)dt) \\ G &= \int_0^{+\infty} \hat{A}(t)d\tilde{W}(t) + \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{B}_t(x)(\tilde{\mu}(dt, dx) - \tilde{\nu}_t(dx)dt) \end{aligned}$$

où $(A(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ et $(t, x) \mapsto B_t(x) \in L^1(\Omega \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+, dP\nu_t(dx)dt)$ sont des processus $\mathcal{F}^M$-prévisibles, respectivement de carré intégrable, à valeurs dans $\mathcal{M}^{d\times n}$, et dans $L^1(\Omega \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+, dP\nu_t(dx)dt)$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Les processus $(\hat{A}(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ et $(t,x)\mapsto \hat{B}_t(x)$ sont à valeurs comme $(A(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ et $(t,x)\mapsto B_t(x)$ et avec les mêmes intégrabilités. On considère en plus dans la suite que $\hat{A}$ et $\hat{B}$ sont $\mathcal{F}_0^X$-mesurables (essentiellement, ils sont donc déterministes ou indépendants de la filtration $\mathcal{F}^M$).

Théorème 2.23 *Supposons $A^\dagger(t)A(t) \leq_{\rm psd} \hat{A}^\dagger(t)\hat{A}(t)$, $dPdt$-p.p. et que pour presque chaque $t \in \mathbb{R}_+$, l'une des deux deux conditions suivantes soit satisfaite :*

i) $\nu_t \circ B_t^{-1} \preceq_{\rm cxp} \tilde{\nu}_t \circ \hat{B}_t^{-1}$, P-p.s.,

ii) B_t et $\hat{B}_t$ sont à coordonnées positives et $\nu_t \circ B_t^{-1} \preceq_{\rm cxpi} \tilde{\nu}_t \circ \hat{B}_t^{-1}$, P-p.s.

Alors pour toute fonction $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ convexe, on a :

$$\mathbb{E}[\phi(F)] \leq \mathbb{E}[\phi(G)]. \tag{2.2.21}$$

Il s'agit d'appliquer le théorème 2.21 avec les filtrations $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^M \vee \mathcal{F}_\infty^{\tilde{M}}$ et $\mathcal{F}_t^* = \mathcal{F}_\infty^M \vee \mathcal{F}_t^{\tilde{M}}$, aux martingales

$$\begin{aligned} M(t) &= \int_0^t A(s)dW(s) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} B_s(x)(\mu(ds,dx) - \nu_s(dx)ds), \\ M^*(t) &= \mathbb{E}[G \mid \mathcal{F}_t^*] = \int_t^{+\infty} \hat{A}(s)d\tilde{W}(s) + \int_t^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{B}_s(x)(\tilde{\mu}(ds,dx) - \tilde{\nu}_s(dx)ds), \end{aligned}$$

$t \in \mathbb{R}_+$. Notons que M^* est bien $\mathcal{F}$-adapté parce que $\hat{A}$ et $\hat{B}$ sont $\mathcal{F}_0^X$-mesurables. Par indépendance de $(\hat{A}(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$, $(\hat{B}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ et de $(\tilde{W}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, $\tilde{\mu}(dt,dx)$, les intégrales *forward* dans M^* coïncident avec des intégrales *backward* de sorte que M^* est bien une martingale *backward*. On conclut en prenant $s = 0$ et en faisant tendre t vers $+\infty$. □

Les conditions (i) et (ii) du théorème 2.23 peuvent être explicitées quand les parties à saut des représentations de F, G prennent des formes spéciales. Ainsi, si les parties à saut sont engendrées par des processus ponctuels indépendants $Z(t) = (Z_1(t),\ldots,Z_n(t))$ et $\tilde{Z}(t) = (\tilde{Z}_1(t),\ldots,\tilde{Z}_n(t))$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et de compensateurs respectifs $\sum_{i=1}^n \lambda_i(t)\delta_{e_i}$, $\sum_{i=1}^n \tilde{\lambda}_i(t)\delta_{e_i}$ (en notant $e_i = (0,\ldots,1,\ldots,0)$, $i = 1,\ldots,n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$), les vecteurs F et G sont de la forme

$$\begin{aligned} F &= \int_0^{+\infty} A(t)dW(t) + \int_0^{+\infty} J(t)(dZ(t) - \lambda(t)dt) \\ G &= \int_0^{+\infty} \hat{A}(t)d\tilde{W}(t) + \int_0^{+\infty} \hat{J}(t)(d\tilde{Z}(t) - \tilde{\lambda}(t)dt) \end{aligned}$$

avec $J(t)$, $\hat{J}(t)$ à valeurs dans $\mathcal{M}^{d\times n}$ et respectivement $\mathcal{F}_t^M$-prévisible et $\mathcal{F}_0^M$-mesurable, et les conditions (i) et (ii) du théorème 2.23 deviennent :

i) $\sum_{j=1}^n \lambda_j(t)\delta_{(J_{1,j}(t),\ldots,J_{d,j}(t))} \preceq_{\rm cxp} \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_j(t)\delta_{(\hat{J}_{1,j}(t),\ldots,\hat{J}_{d,j}(t))}$, P-p.s.,

ii) $J_{i,j}(t) \geq 0$ et $\hat{J}_{i,j}(t) \geq 0$, $i = 1,\ldots,d$, $j = 1,\ldots,n$, et

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j(t)\delta_{(J_{1,j}(t),\ldots,J_{d,j}(t))} \preceq_{\rm cxpi} \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_j(t)\delta_{(\hat{J}_{1,j}(t),\ldots,\hat{J}_{d,j}(t))}, \quad P\text{-p.s.}$$

cf. Corollaire 4.2 de [ABP-16].

Si les parties à saut sont données par des intégrales de Poisson, par rapport à des mesures de Poisson ω, $\tilde{\omega}$ contrôlées par $\sigma(dx)dt$, $\tilde{\sigma}(dx)dt$ avec σ, $\tilde{\sigma}$ satisfaisant la même condition qu'en (2.2.9) pour γ, les vecteurs F, G prennent la forme

$$F = \int_0^{+\infty} A(t)dW(t) + \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} J_{t^-,x}(\omega(dt,dx) - \sigma(dx)dt)$$

$$G = \int_0^{+\infty} \hat{A}(t) d\tilde{W}(t) + \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{J}_{t^-,x}(\tilde{\omega}(dt,dx) - \tilde{\sigma}(dx)dt)$$

avec $(J_{t,x})_{(t,x)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n}$, $(\hat{J}_{t,x})_{(t,x)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et respectivement $\mathcal{F}^M$-prévisible, $dt\sigma(dx)$-intégrable et $\mathcal{F}_0^M$-mesurable, $dt\tilde{\sigma}(dx)$-intégrable. Les conditions (i) et (ii) du théorème 2.23 deviennent :

i) $\sigma \circ J_{t^-,\cdot}^{-1} \preceq_{\mathrm{cxp}} \tilde{\sigma} \circ \hat{J}_{t^-,\cdot}^{-1}$, P-p.s.,

ii) $J_{t^-,x} \geq 0$, $\sigma(dx)$-p.p., $\hat{J}_{t^-,x} \geq 0$, $\tilde{\sigma}(dx)$-p.p. et $\sigma \circ J_{t^-,\cdot}^{-1} \preceq_{\mathrm{cxpi}} \tilde{\sigma} \circ \hat{J}_{t^-,\cdot}^{-1}$, P-p.s.

cf. Corollaire 4.3 de [ABP-16].

Nos conditions sur les mesures de saut s'écrivent, par exemple dans le cas processus ponctuel, sous la forme d'une comparaison $\mu \preceq_{cxp} \nu$ pour des mesures μ, ν à supports finis. Une condition nécessaire non suffisante pour que ce type de comparaison soit vérifié est $\mathscr{C}(\mathrm{Supp}\,(\mu)) \subset \mathscr{C}(\mathrm{Supp}\,(\nu))$ où $\mathscr{C}(A)$ désigne l'enveloppe convexe d'un ensemble A. On propose une condition nécessaire plus précise :

Théorème 2.24 *Soient μ, ν deux mesures à supports finis tels que $\mu \preceq_{\mathrm{cxp}} \nu$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $\mu(\{x\}) > \nu(\{x\})$, il existe $y_1, \dots, y_k \in \mathrm{Supp}\,(\nu)$ distincts de x pour $2 \leq k \leq d+1$ tels que*

$$\{x\} \subset \mathscr{C}(\{y_1, \dots, y_k\}) \subset \mathcal{C}_x.$$

La preuve repose sur le théorème de Strassen : *un vecteur F s'écrit $F = E[G|F]$ ssi il existe un noyau probabiliste K tel que la loi ν de G est l'image de la loi μ de F par ce noyau : $\nu = \mu K^{-1}$* (voir [118]) ; et sur l'étude de fonctions de survie $\phi_{\mu,u}(a) = \int_{\mathbb{R}^d} (\langle y, u\rangle - a)^+ \, d\mu(y)$ et d'hyperplans associés. En fait, le théorème 2.24 fournit aussi une première étape pour une preuve constructive du théorème de Strassen en dimension d (la preuve initiale repose sur le théorème de Hahn-Banach ; en dimension $d = 1$, cependant des preuves constructives existent, voir par exemple [93]).

Chapitre 3

Théorèmes limites

Cette partie réunit des contributions dont l'objet est d'étudier le comportement asymptotique des lois de certaines fonctionnelles stochastiques. Dans la section 3.1, ce sont des convergences en variation pour les lois de fonctionnelles supremum de processus empiriques auxquelles nous nous intéressons. C'est aussi pour la variation totale qu'on évalue, en section 3.2, la vitesse de convergence (non normale) des variations d'Hermite du mouvement brownien fractionnaire. En section 3.3, on considère un modèle de boules aléatoires dont on étudie les propriétés macroscopique et microscopique. De telles boules aléatoires modélisent un réseau de communication sans fil et on y étudie des fonctionnelles représentant, en chaque point, le signal reçu, avec interférence. Dans la section 3.4, c'est un modèle de mots écrits à partir d'alphabets aléatoires grossissants qu'on étudie. La fonctionnelle étudiée est un tableau de Young canoniquement associé au mot aléatoirement écrit.

3.1 Supremum de processus empirique

Dans cette section, nous proposons un principe local pour le supremun de processus empiriques. L'origine de notre intérêt pour ce type de question vient de travaux doctoraux où on a étudié le renforcement de la version fonctionnelle du théorème de Donsker à la convergence en variation pour une large classe de fonctionnelles.

Nous rappelons que la variation totale $\|\mu\|_{var}$ d'une mesure μ est définie en (1.1.5) (Section 1.1) et que $\xrightarrow{var}$ désigne la convergence associée à cette norme.

Il est bien connu que pour une suite $(\xi_i)_{i\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (*iid*) avec un moment d'ordre 2 (et, pour simplifier, centrées $\mathbb{E}[\xi_1]=0$, réduites $\mathbb{E}[\xi_1^2]=1$), la suite des processus S_n affines par morceaux (interpolant les points $(k/n, S_n(k/n))$ avec $S_n(k/n)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^k \xi_i$) converge dans l'espace $\mathcal{C}([0,1])$ des fonctions $x:[0,1]\to\mathbb{R}$ continues vers le mouvement brownien : $P_n := \mathscr{L}(S_n) \Rightarrow W$ (théorème de Donsker). La version fonctionnelle de ce résultat est la convergence $P_n f^{-1} \Rightarrow W f^{-1}$ pour toute fonctionnelle $f:\mathcal{C}([0,1])\to\mathbb{R}$ mesurable. On montre alors dans [BD-8] (voir aussi [BD-2]) que si les ξ_i ont un moment d'ordre $\gamma>2$ et une densité à support sans trou alors $P_n f^{-1} \xrightarrow{var} W f^{-1}$ pour une classe $\mathcal{M}_W^1$ de fonctionnelles $f:\mathcal{C}([0,1])\longrightarrow\mathbb{R}$. Ce résultat généralise [37, Th. 20.1]. Dans [BD-8], on montre également que la classe $\mathcal{M}_W^1$ est assez grande et (pour résumer) qu'elle exige de ses fonctionnelles de la régularité dans les directions de Cameron-Martin (direction admissible de W). Par exemple, on montre qu'elle contient des fonctionnelles de type *supremum* $x\in\mathcal{C}([0,1])\mapsto \sup_{t\in[0,1]} x(t)$ ou de type intégrale $x\in\mathcal{C}([0,1])\mapsto \int_0^1 q(x(t))dt$ pour un poids q.

Dans les bons cas (en fait pour la plupart des fonctionnelles $f\in\mathcal{M}_W^1$), les lois $P_n f^{-1}$ et $W f^{-1}$ sont absolument continues et la convergence en variation est équivalente à la convergence dans $L^1(\mathbb{R})$ des densités. C'est cette forme de résultat qui justifie le qualificatif « local » pour ces résultats.

Avec Youri Davydov, nous nous sommes intéressés à des convergences en variation pour des fonctionnelles de processus empiriques. Toujours à une suite $(\xi_i)_{i\geq 1}$ de variables aléatoires *iid*, de distribution commune notée F, on associe maintenant le processus empirique donné par

$$\zeta_n^F(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n \big[\mathbf{1}_{(-\infty,t]}(\xi_i) - F(t)\big].$$

Dans ce cas, le théorème de Donsker est remplacé par $\mathscr{L}(\zeta_n^F) \Longrightarrow \mathscr{L}(W_F^0)$ quand $n\to+\infty$ où W_F^0 est un pont brownien (généralisé) de fonction de covariance $\mathrm{Cov}(W_F^0(t), W_F^0(s)) = F(t)\wedge F(s) - F(t)F(s)$, et où la convergence faible $\Longrightarrow$ a lieu dans l'espace de Skorohod $\mathbb{D}(\mathbb{R})$, cf. [18, Th. 14.3]). Dans la lignée de [BD-8], il est légitime de chercher à en renforcer la version fonctionnelle

$$\mathscr{L}(f(\zeta_n^F)) \Longrightarrow \mathscr{L}(f(W_F^0)), \quad n\to+\infty, \tag{3.1.1}$$

pour la convergence en variation, où $f:\mathbb{D}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ est mesurable. À notre connaissance, avant [BD-7], aucun résultat de ce type n'existait pour le processus empirique. Commençons par observer que contrairement à [BD-8], obtenir des convergences en variation totale dans (3.1.1) pour une large classe de fonctionnelles $f:\mathbb{D}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ paraît difficile à obtenir puisque même dans des cas très simples la convergence en variation peut être en défaut : prendre $F=U$ la distribution uniforme et une fonctionnelle d'évaluation $f(x)=x(t_0)$ en $t_0\neq 0,1$, $f(\zeta_n^U)=\zeta_n^U(t_0)$ est alors de loi atomique tandis que $f(W_U^0)\sim\mathscr{N}(0,t_0(1-t_0))$. Nous nous intéressons donc dans [BD-7] à une fonctionnelle spécifique du type *supremum* : $f(x)=\sup_{t\in[0,1]}x(t)$. Il ne fait pas de doute que notre méthode est généralisable à d'autres types de fonctionnelles (intégrales par exemple) et qu'il serait intéressant d'identifier les propriétés essentielles des fonctionnelles pour lesquelles la convergence en variation sera vraie.

Théorème 3.1 *Si la distribution F des $(\xi_i)_{i\geq1}$ est continue, alors on a*

$$\mathscr{L}\left(\sup_{t\in\mathbb{R}}\zeta_n^F(t)\right) \xrightarrow{var} \mathscr{L}\left(\sup_{t\in\mathbb{R}}W_F^0(t)\right), \quad n\to+\infty.$$

De même,

$$\mathscr{L}\left(\sup_{t\in\mathbb{R}}|\zeta_n^F(t)|\right) \xrightarrow{var} \mathscr{L}\left(\sup_{t\in\mathbb{R}}|W_F^0(t)|\right), \quad n\to+\infty.$$

La preuve repose de façon essentielle sur un résultat de [37] spécialement conçu pour obtenir des convergences en variation $P_nf^{-1}\xrightarrow{var}P_\infty f^{-1}$ à partir de convergence faible $P_n\Rightarrow P_\infty$ si f vérifie de bonnes conditions. Ce résultat est fondé sur la méthode de superstructure déjà utilisée dans la partie 1.

Théorème ([37, th. 18.4]) *Soient f une fonctionnelle mesurable sur $(\mathcal{X},d)$, espace métrique complet séparable et $(P_n)_{n\geq1}$ une suite de mesures de probabilité sur la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. On suppose que $P_n\Rightarrow P_\infty$. De plus, on suppose que pour P_∞-presque chaque x, il existe une boule ouverte $V(x)$ centrée en x, un $\epsilon>0$ et une famille $(G_{n,c}\,:\,n\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\},\,c\in(0,\epsilon])$ de transformations mesurables de $\mathcal{X}$ tels que pour P_∞-presque chaque x :*

(i) Pour chaque $c\in(0,\epsilon)$ et $\varepsilon>0$, on a $\lim_{n\to+\infty}P_n\left(z\in\mathcal{X}\,:\,d(G_{n,c}\,z,G_{\infty,c}\,z)\geq\varepsilon\right)=0$;

(ii) Pour tout $c\in(0,\epsilon)$, l'application $G_{\infty,c}$ est P_∞-presque partout continue et $\rho(S,c)=\sup_{z\in S}d\left(z,G_{\infty,c}z\right)\to0$ quand $c\to\ 0$, pour toute boule ouverte S ;

(iii) $\lim_{c\to0}\overline{\lim}_{n\to+\infty}\|P_nG_{n,c}^{-1}-P_n\|_{var}=0$;

(iv) Pour tout $\delta\in(0,\epsilon)$, $\lim_{n\to+\infty}\int_{V(x)}\|\lambda_{[0,\delta]}\varphi_{n,z}^{-1}-\lambda_{[0,\delta]}\varphi_{\infty,z}^{-1}\|_{var}\ P_n(dz)=0$, où $\varphi_{n,z}(c)=f(G_{n,c}z)$ avec $n\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ et $c\in(0,\delta]$;

(*v*) *Pour tout* $\delta \in (0,\epsilon)$*, l'application* $z \longrightarrow \lambda_{[0,\delta]}\varphi_{\infty,z}^{-1}$ *de* $V(x)$ *dans l'ensemble* $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ *des mesures sur* $\mathbb{R}$ *est* P_∞*-presque partout continue.*

Alors quand $n \to +\infty$ *:*

$$P_n f^{-1} \xrightarrow{var} P_\infty f^{-1}.$$

On se contente de décrire le cadre dans lequel on applique ce résultat pour la preuve du théorème 3.1. On renvoie à [BD-7] pour l'analyse (parfois longue) de chaque point $(i)-(v)$.

On ne décrit la preuve que de la première partie du théorème 3.1 et dans le cas où les variables ξ_i sont de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Nous notons alors $p(t)=e^{-t^2/2}/\sqrt{2\pi}$ la densité associée et $\Phi(t)=\int_{-\infty}^t p(s)ds$ la fonction de répartition correspondante.

On commence par choisir (sans restriction, par le théorème de représentation de Skorohod) un espace de probabilité sur lequel on a la convergence presque sûre $\zeta_n \to W_F^0$, $n\to+\infty$ (la seule contrainte est alors de travailler avec un tableau triangulaire de variables aléatoires $(\xi_i^n)_{1\le i\le n}$, indépendantes dans chaque ligne, plutôt qu'avec une suite $(\xi_i)_{i\ge 1}$, mais cela ne pose pas de problème). On choisit ensuite $\mathcal{X}=\mathbb{D}_0(\mathbb{R})=\big\{x\in\mathbb{D}(\mathbb{R})\ :\ \lim_{t\to\pm\infty}x(t)=0\big\}$ (ce qui est possible puisque $\lim_{t\to\pm\infty}\zeta_n(t)=0$) et on définit sur $\mathcal{X}$ une topologie métrique complète séparable à partir de celle sur $\mathbb{D}([0,1])$ (cf. [18]) grâce à la bijection Φ de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$. On considère alors les transformations définies par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} G_{n,c}\zeta_n(t) &= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n\big[\mathbf{1}_{(-\infty,t]}(\xi_i+c/\sqrt{n})-\Phi(t)\big]\\ G_{\infty,c}x(t) &= x(t)-c\Phi'(t). \end{aligned}$$

Enfin, le choix du seuil $\epsilon>0$ et du voisinage $V(x)$ pour presque chaque x permet de contrôler correctement les ensembles argmax des ζ_n (ensembles des points où le max est atteint) qui jouent un rôle particulier dans l'étude des points (iv) et (v). On termine maintenant cette section par une courte description des vérifications de $(i)-(v)$:

(*i*) On montre que, d'après la définition de la distance de Skorohod usuelle, on doit vérifier

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(\sqrt{n}\left\|\lambda_n t - t - \frac{c}{\sqrt{n}}\Phi'(\Phi^{-1}(t))\right\|_\infty > \epsilon\right)=0,$$

pour une bijection (aléatoire) explicite λ_n de $[0,1]$ dans $[0,1]$. En simplifiant, il s'agit ensuite de rendre précise une estimation du type

$$\lambda_n t - t - \frac{c}{\sqrt{n}}\Phi'(\Phi^{-1}(t)) = \Phi(\xi_i^n + c/\sqrt{n}) - \Phi(\xi_i^n) - \frac{c}{\sqrt{n}}\Phi'(\xi_i^n) \simeq \left(\frac{c}{\sqrt{n}}\right)^2\Phi''(\xi_i^n),$$

ce qui nécessite de contrôler uniformément les écarts des statistiques d'ordre de ξ_i, $i=1,\dots,n$.

(*ii*) Cette condition est immédiate puisque, par définition, $G_{\infty,c}$ est une translation.

(*iii*) On a aisément

$$\begin{aligned} \|P_nG_{n,c}^{-1}-P_n\|_{var} &\le \|\mathscr{L}(\xi_1+c/\sqrt{n},\dots,\xi_n+c/\sqrt{n})-\mathscr{L}(\xi_1,\dots,\xi_n)\|_{var}\\ &\le \int_{\mathbb{R}^n}\left|\prod_{i=1}^n p(x_i-\frac{c}{\sqrt{n}})-\prod_{i=1}^n p(x_i)\right|dx_1\cdots dx_n \le c, \end{aligned}$$

où la dernière majoration vient par exemple du Lemme 20.1 dans [37] (l'information de Fisher de p étant $I_p=1$).

(*iv*) Pour voir ce point, il suffit de montrer $\lim_{n\to+\infty} \|\lambda_{[0,\delta]}\varphi_{n,z_n}^{-1} - \lambda_{[0,\delta]}\varphi_{\infty,z_n}^{-1}\|_{var} = 0$ pour P_n-presque chaque z_n. Pour cela, on applique le résultat suivant de [31] à $\varphi_n(c) = f(G_{n,c}\zeta_n)$:

Lemme 3.2 *Soit $\varphi_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, une suite de fonctions absolument continues telles que $\varphi_n(0) \to \varphi_\infty(0)$, $\varphi_n' \to \varphi_\infty'$ dans $L^1([0,1])$, $\varphi_\infty' \neq 0$ p.p. Alors $\lambda_{[0,1]}\varphi_n^{-1} \xrightarrow{var} \lambda_{[0,1]}\varphi_\infty^{-1}$.*

La difficulté réside principalement dans l'étude des dérivées de φ_n qu'on montre être égales à $-\Phi'(\text{argmax }(G_{n,c}\zeta_n))$, puis dans celle de leur convergence dans $L^1([0,\delta])$; cette convergence nécessite un contrôle des argmax pour $G_{n,c}\zeta_n$, ce qui est garanti par le choix des voisinages V et du seuil $\epsilon > 0$.

(*iv*) Il s'agit de montrer que $\lambda_{[0,\delta]}\varphi_{\infty,z_n}^{-1} \xrightarrow{var} \lambda_{[0,\delta]}\varphi_{\infty,z}^{-1}$, ce qu'on obtient à nouveau avec le lemme 3.2 en étudiant maintenant l'argmax de $G_{\infty,c}W_\Phi^0$.

□

3.2 Variations d'Hermite du mouvement brownien fractionnaire

Dans [BN-15], nous nous intéressons avec Ivan Nourdin aux variations d'Hermite du mouvement brownien fractionnaire (mBf). Rappelons que le mBf est le processus gaussien B centré de fonction de covariance $R_H(t,s) = \mathbb{E}[B_tB_s] = \frac{1}{2}(s^{2H} + t^{2H} - |s-t|^{2H})$ où $H \in (0,1)$ est appelé paramètre de Hurst. Il est bien connu que B est autosimilaire d'indice H, à accroissements stationnaires, non-indépendants sauf si $H = 1/2$, auquel cas on retrouve le mouvement brownien standard.

L'étude des q-variations $\sum_{k=0}^n (B_{(k+1)/n} - B_{k/n})^q$ du mBf est essentielle par exemple pour l'analyse de schémas numériques d'EDS dirigée par un mBf ou pour l'estimation de son paramètre de Hurst H, cf. [10], [30], [61], [126]. Il apparaît (voir par exemple [95]) que les bonnes variations à regarder sont celles d'Hermite :

$$V_n = \sum_{k=0}^{n-1} H_q(B_{k+1} - B_k), \quad n \geq 1, \tag{3.2.1}$$

où H_q désigne le polynôme d'Hermite de degré q donné par $H_q(x) = (-1)^q e^{x^2/2} \frac{d^q}{dx^q}\left(e^{-x^2/2}\right)$ (par exemple, $H_1(x) = x$, $H_2(x) = x^2 - 1$, $H_3(x) = x^3 - 3x$). Le rôle des polynômes d'Hermite dans ces problèmes s'expliquent par le fait que les accroissements du mBf s'expriment comme des intégrales simples de fonctions élémentaires par rapport au mBf et leur puissance (via la formule de multiplication des intégrales) comme des intégrales multiples de fonctions simples. Mais les intégrales multiples de fonctions produit du type $h^{\otimes n}$ s'expriment comme des polynômes d'Hermite d'un processus gaussien isonormal.

Dans le cas où $H = 1/2$, le comportement asymptotique de (3.2.1) est donné par le théorème limite central. De façon générale, les accroissements $B_{(k+1)/n} - B_{k/n}$ n'étant pas indépendants, le comportement asymptotique est plus difficile à analyser et a été obtenu par Breuer et Major [26], Dobrushin et Major [39], Giraitis et Surgailis [45] et Taqqu [122] : quand $n \to \infty$, on a :

1. Si $0 < H < 1 - 1/(2q)$ alors

$$Z_n := \frac{V_n}{\sigma_{q,H}\sqrt{n}} \Longrightarrow \mathscr{N}(0,1) \tag{3.2.2}$$

avec $\sigma_{q,H} = \sqrt{\frac{1}{q!}\sum_{r\in\mathbb{Z}}\left(\frac{1}{2}\left(|r+1|^{2H} - 2|r|^{2H} + |r-1|^{2H}\right)\right)^q}$.

2. Si $H = 1 - 1/(2q)$ alors
$$Z_n := \frac{V_n}{\sigma_{q,H}\sqrt{n \ln n}} \Longrightarrow \mathscr{N}(0,1) \tag{3.2.3}$$
avec $\sigma_{q,H} = 2q!\left(\frac{(2q-1)(q-1)}{2q^2}\right)^q$.

3. Si $H > 1 - 1/(2q)$ alors
$$Z_n := \frac{V_n}{n^{1-q(1-H)}} \Longrightarrow Z \sim \text{« variable aléatoire d'Hermite ».} \tag{3.2.4}$$

Ici, la variable Z est la valeur en $t = 1$ du processus d'Hermite et qui s'écrit sous la forme d'une intégrale multiple $I_q(f)$ de Wiener-Itô, cf. [95]. Des résultats analogues à (3.2.2)–(3.2.4) existent pour les q-variations à poids du mBf et les différents cas sont décrits par Nourdin, Nualart et Tudor dans [95].

Dans les applications statistiques, il est d'usage de remplacer les lois de Z_n par celle de leur limite données en (3.2.2), (3.2.3), (3.2.4). Il est alors nécessaire de connaître l'erreur faite dans ce remplacement et donc la vitesse de convergence dans ces limites. Ce sont donc des bornes de type Berry-Esséen qu'on cherche (pour le théorème de Berry-Esséen classique, voir par exemple [29, Th. 7.4.1]).

Dans le cas des variations sans poids (auxquelles on s'intéresse ici), les limites dans (3.2.2) et (3.2.3) sont $\mathscr{N}(0,1)$ et la borne suivante proposée pour F centrée, de loi absolument continue et assez régulière pour le calcul de Malliavin par Nourdin et Peccati dans [96, Th. 3.1.] s'applique :
$$\|\mathscr{L}(F) - \mathscr{N}(0,1)\|_{var} \le 2\mathbb{E}[(1 - \langle DF, -DL^{-1}F\rangle_{\mathfrak{H}})^2]^{1/2}. \tag{3.2.5}$$
On suppose (dans le cadre qui nous intéresse ici) que l'espace gaussien engendré par B est donné par un processus gaussien isonormal $X = \{X(h) : h \in \mathfrak{H}\}$ sur l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$, lui-même engendré par les fonctions simples pour le produit scalaire $\langle \mathbf{1}_{[0,t]}, \mathbf{1}_{[0,s]}\rangle_{\mathfrak{H}} = R_H(t,s)$; D et L désignent alors respectivement la dérivée de Malliavin et le générateur du semi-groupe de Ornstein-Ulhenbeck dans cet espace. On renvoie à [96] ou [99] pour une description détaillée de ce cadre. La borne (3.2.5) de Noudin et Pecatti est alors fondée sur une combinaison très efficace de la méthode de Stein et du calcul de Malliavin (la méthode de Stein propose une borne grâce à une intégration par partie qui est exploitable par le calcul de Malliavin), cf. [96]. Dans le cas standard (limite $\mathscr{N}(0,1)$, normalisation par $\sqrt{n}$), Nourdin et Pecatti utilisent (3.2.5) pour donner une vitesse dans (3.2.2). Pour cela, il s'agit de constater que Z_n a même loi que
$$S_n = n^{q(1-H)-1}\sum_{k=0}^{n-1} H_q\big(n^H(B_{(k+1)/n} - B_{k/n})\big) = I_q(f_n),$$
pour $f_n = n^{q-1}\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{1}_{[k/n,(k+1)/n]}^{\otimes q} \in \mathfrak{H}^{\odot q}$, produit symétrique de $\mathfrak{H}$. Pour une intégrale $I_d(f_n)$, les opérateurs D et L prennent une forme simple de sorte que le terme $1 - \langle DF, -DL^{-1}F\rangle_{\mathfrak{H}}$ de (3.2.5) se réécrit $1 - \frac{1}{q}\|DS_n\|_{\mathfrak{H}}^2$. En utilisant la formule de multiplication des intégrales et la fonction de covariance du mBf, la borne de (3.2.5) se réécrit sous la forme de q sommes qu'on peut estimer explicitement. Nourdin et Peccati obtiennent alors les bornes de type Berry-Esséen suivantes pour les variations d'Hermite du mBf dans (3.2.2) :
$$\|\mathscr{L}(Z_n) - \mathscr{N}(0,1)\|_{var} \le c_{q,H}\begin{cases} n^{-1/2} & \text{si } H \in (0, \frac{1}{2}] \\ n^{H-1} & \text{si } H \in [\frac{1}{2}, \frac{2q-3}{2q-2}] \\ n^{qH-q+\frac{1}{2}} & \text{si } H \in [\frac{2q-3}{2q-2}, 1 - \frac{1}{2q}). \end{cases}$$
Dans [BN-15], on complète les cas manquants (3.2.3), (3.2.4). Pour $H = 1 - 1/2q$, la limite (3.2.3) étant normale, la même stratégie que celle utilisée par Nourdin et Peccati dans [96] s'utilise, avec une estimation adaptée des q sommes qui interviennent dans $\mathbb{E}[(1 - \frac{1}{q}\|DS_n\|_{\mathfrak{H}}^2)^2]$. On renvoie à [BN-15] pour les détails menant à :

Théorème 3.3 *Si $H = 1 - 1/(2q)$ alors pour une constante $c_{q,H} > 0$ ne dépendant que de q et H, on a*

$$\|\mathscr{L}(Z_n) - \mathscr{N}(0,1)\|_{var} \le \frac{c_{q,H}}{\sqrt{\ln n}}.$$

La stratégie est radicalement différente pour (3.2.4) puisque la limite n'est plus normale. Il s'agit d'utiliser la borne (1.2.1) proposée par Davydov et Martynova pour les intégrales multiples de Wiener-Itô, et déjà utilisée en Section 1.2. Par commodité, on rappelle le théorème 1.10 de cette section en le réécrivant avec les notations en vigueur dans le cadre considéré :

Théorème *Soit $f \in \mathfrak{H}^{\odot q}\backslash\{0\}$ où $q \ge 2$ est un entier. Pour toute suite $(f_n)_{n\ge 1} \subset \mathfrak{H}^{\odot q}$ convergeant vers f, il existe une constante $c_{q,f}$ (ne dépendant que de q et f) telle que*

$$\|\mathscr{L}\big(I_q(f_n)\big) - \mathscr{L}\big(I_q(f)\big)\|_{var} \le c_{q,f}\|f_n - f\|_{\mathfrak{H}^{\odot q}}^{1/q}.$$

En montrant

$$\|f_n - f\|^2_{\mathfrak{H}^{\odot q}} = O(n^{2q-1-2qH}) \tag{3.2.6}$$

quand $n \to +\infty$, on déduit la borne suivante de type Berry-Esséen pour (3.2.4) :

Théorème 3.4 *Pour $H > 1 - 1/(2q)$, on a :*

$$\|\mathscr{L}(Z_n) - \mathscr{L}(Z)\|_{var} \le c_{q,H}\, n^{1-\frac{1}{2q}-H}$$

Comme en plus $\mathbb{E}[|S_n - Z|^2] = \mathbb{E}[|I_q(f_n) - I_q(f)|^2] = \|f_n - f\|^2_{\mathfrak{H}^{\odot q}}$, la borne (3.2.6) donne un ordre sur la vitesse dans la convergence L^2 de S_n vers Z dans [95, Th. 1]. Pour prouver (3.2.6), on commence par voir :

$$\begin{aligned}
\|f_n\|^2_{\mathfrak{H}^{\odot q}} &= n^{2q-2}\sum_{k,l=0}^{n-1}\langle \mathbf{1}_{[k/n,(k+1)/n]}, \mathbf{1}_{[l/n,(l+1)/n]}\rangle_{\mathfrak{H}}^q \\
&= H^q(2H-1)^q\, n^{2q-2}\sum_{k,l=0}^{n-1}\left(\int_{k/n}^{(k+1)/n} du \int_{l/n}^{(l+1)/n} dv|u-v|^{2H-2}\right)^q
\end{aligned}$$

ce qui permet de calculer $\|f_n\|^2_{\mathfrak{H}^{\odot q}}$ puis, en passant à la limite, $\|f\|^2_{\mathfrak{H}^{\odot q}}$. En calculant de la même façon $\langle f_n, \phi^{\otimes q}\rangle_{\mathfrak{H}^{\odot q}}$ pour $\phi \in |\mathfrak{H}|$, on a aussi une expression pour $\langle f, f_n\rangle_{\mathfrak{H}^{\odot q}}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
&\|f_n - f\|^2_{\mathfrak{H}^{\odot q}} \\
\le\ & H^q(2H-1)^q\, n^{2q-1-2qH}\sum_{r\in\mathbb{Z}}\Bigg|\left(\int_0^1 du\int_0^1 dv|r+u-v|^{2H-2}\right)^q \\
&-2\int_0^1 dv\left(\int_0^1 du|r+u-v|^{2H-2}\right)^q + \int_0^1 du\int_0^1 dv|r+u-v|^{2qH-2q}\Bigg|.
\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Il reste alors à s'assurer que la somme sur $\mathbb{Z}$ dans (3.2.7) est bien finie. Pour cela, on calcule explicitement les différentes intégrales. On renvoie à [BN-15] pour les détails. □

3.3 Modèles de boules aléatoires

Avec Clément Dombry, nous nous sommes intéressés dans [BD-18] à des fonctionnelles définies sur des modèles de boules aléatoires en dimension d contrôlées par une mesure de Poisson. De telles fonctionnelles sont utilisées dans plusieurs modèles : en dimension $d = 1$, Kaj décrit dans [66], [67] l'utilisation de processus ponctuels de Poisson pour représenter des réseaux de communication sans fil, Kaj et Taqqu utilisent dans [69] des intégrales de Poisson sur des intervalles aléatoires pour étudier le nombre de connexions à un serveur, voir aussi [92] ; en dimension $d = 2$, Biermé et Estrade modélisent dans [16] des images en noir et blanc et des milieux poreux ou hétérogènes avec boules aléatoires dans $\mathbb{R}^2$; en dimension $d = 3$, on modélise ainsi un réseau de communication avec des stations d'émission au centre de chaque boule. L'étude de ces modèles consistent à introduire un facteur d'échelle $\rho > 0$ et à passer à la limite pour en étudier les propriétés macroscopiques ($\rho \to +\infty$), cf. [16], ou microscopiques ($\rho \to 0$), cf. [68]. Dans [17], les approches de [16] et de [68] sont unifiées en dimension d pour traiter simultanément (et généraliser) les études macroscopique et microscopique. Dans le modèle qu'on considère dans [BD-18], on rajoute un poids aléatoire aux boules et les fonctionnelles qu'on étudie représentent alors, par exemple, des flux d'information reçus du réseau. Comme dans [17], on traite simultanément le cas d'étude macroscopique et microscopique en fonction du type de changement d'échelle ($\rho \to 0$ ou $\rho \to +\infty$). Notons que de tels poids aléatoires ont déjà été considérés en dimension $d = 1$ dans [69].

Plus précisément, on considère dans $\mathbb{R}^d$ des boules aléatoires $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^d : \|y-x\| < r\}$ de poids m, le triplet (x, r, m) étant distribué selon une mesure de Poisson $N_\lambda(dx, dr, dm)$ sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ de compensateur $n(dx, dr, dm) = \lambda dx F(dr)G(dm)$ où F et G sont des mesures sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}$ respectivement et où $\lambda \geq 0$ peut s'interpréter comme l'intensité des boules dans $\mathbb{R}^d$. En suivant une interprétation « réseau de communication sans fil », pour une boule $B(x, r)$, x représente une station d'émission, r son rayon d'émission et m sa puissance d'émission.

On suppose que F est donnée par $F(dr) = f(r)dr$ satisfaisant

$$\int_{\mathbb{R}^+} r^d F(dr) < +\infty$$

(*i. e.* le volume moyen des boules est fini) et pour $\epsilon = +1$ ou $\epsilon = -1$,

$$f(r) \sim_{r\to 0^\epsilon} C_\beta r^{-1-\beta}$$

avec les conventions $0^{+1} = 0$ et $0^{-1} = +\infty$. Le cas $\epsilon = +1$ va correspondre à une analyse microscopique du modèle obtenue en zoomant dans le modèle ($\rho \to +\infty$) tandis que le cas $\epsilon = -1$ correspondra à une analyse macroscopique obtenue en dézoomant ($\rho \to 0$). Selon les cas, c'est le comportement en 0 ou en $+\infty$ de f qu'on suppose connaître.

On suppose que G appartient au domaine (normal) d'attraction d'une loi stable $S_\alpha(\sigma, b, \tau)$ avec $\alpha \in (1, 2]$. Dans ce cas, le comportement en 0 de la fonction caractéristique de G est connue et sera utilisée dans les asymptotiques. Des exemples typiques pour G sont des distributions à queue lourde quand $\alpha \in (1, 2)$ ou une loi normale quand $\alpha = 2$. On retrouve le cas de boules sans poids (considéré par exemple dans [17]) en choisissant $G = \delta_1$.

Un objet naturel à étudier dans ce modèle est le champ qui pour un point $y \in \mathbb{R}^d$ somme les contributions m des boules qui atteignent y (*i. e.* telles que $y \in B(x, r)$). Comme dans la suite on s'intéressera à des champs plus généraux définis sur des sous-espaces de $\mathcal{M}$, l'ensemble des mesures (signées) de variation totale finie, posons

$$M(\delta_y) \quad = \quad \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}} m\delta_y(B(x, r))N_\lambda(dx, dr, dm). \tag{3.3.1}$$

Pour étudier les fluctuations microscopiques et macroscopiques de M, on zoome ou dézoome dans le modèle en dilatant ou contractant la taille r des boules par un facteur ρ. Par un changement de variable, cela revient à considérer le champ

$$M_\rho(\delta_y) = \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}} m\delta_y(B(x, r))N_{\lambda(\rho),\rho}(dx, dr, dm)$$

où $N_{\lambda(\rho),\rho}(dx, dr, dm)$ est la mesure de Poisson d'intensité $\lambda(\rho)dxF_\rho(dr)G(dm)$ avec $F_\rho(dr) = f(r/\rho)dr/\rho$ image de $F(dr)$ par le changement d'échelle $r \mapsto \rho r$ et avec une intensité $\lambda(\rho)$ à adapter pour obtenir des asymptotiques non triviales.

Dans [BD-18], nous énoncons des convergences fini-dimensionnelles sur des sous-espaces de $\mathcal{M}$ généralisant ainsi celles de [16], [17], [68]. Pour commencer, en notant $\mathcal{M}_{dis}$ le sous-espace de $\mathcal{M}$ des mesures à support finies, avec $\lambda(\rho)$ tel que $\lambda(\rho)\rho^d \to +\infty$ quand $\rho \to 0^{-\varepsilon}$, on a :

Cas dézoomant ($\varepsilon = -1$) : Quand $\rho \to 0$,

$$n_0(\rho)^{-1}(M_\rho(\mu) - \mathbb{E}[M_\rho(\mu)]) \overset{\mathcal{M}_{dis}}{\Longrightarrow} W_\alpha(\mu)$$

où $W_\alpha(\mu)$ est une fonctionnelle stochastique linéaire sur $\mathcal{M}_{dis}$ telle que les variables $W_\alpha(\delta_y)$, $y \in \mathbb{R}^d$, sont *iid* de loi $S_\alpha(\sigma V^{1/\alpha}, b, 0)$.

Cas zoomant ($\varepsilon = +1$) : Quand $\rho \to +\infty$,

$$n_0(\rho)^{-1}(M_\rho(\mu) - \mathbb{E}[M_\rho(\mu)]) \overset{\mathcal{M}_{dis}}{\Longrightarrow} \widetilde{W}_\alpha(\mu)$$

où $\widetilde{W}_\alpha(\mu)$ est une fonctionnelle linéaire sur $\mathcal{M}_{dis}$ telle que les variables $\widetilde{W}_\alpha(\delta_y)$, $y \in \mathbb{R}^d$, sont p.s. égales et de loi $S_\alpha(\sigma V^{1/\alpha}, b, 0)$.

Donnons une explication heuristique : en notant $V = c_d \int r^d F(dr)$ le volume moyen d'une boule (où c_d est le volume de la boule euclidienne unité de $\mathbb{R}^d$), le nombre moyen de boules contenant y est donné par

$$\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{y\in B(x,r)\}} N_{\lambda(\rho),\rho}(dx, dr, dm)\right] = V\lambda(\rho)\rho^d,$$

Comme les poids sont dans le domaine d'attraction d'une loi α-stable, on devine qu'avec une normalisation par $n_0(\rho) = \lambda(\rho)^{1/\alpha}\rho^{d/\alpha}$, les variables $M_\rho(\delta_y)$ centrées et normalisées convergent vers une loi α-stable si $n_0(\rho) \to +\infty$.

De plus, la dépendance entre $M_\rho(\delta_{y_1})$ et $M_\rho(\delta_{y_2})$ provient des poids des boules qui contiennent les deux points y_1 et y_2. Dans le cas zoomant ($\rho \to +\infty$), les boules deviennent très grandes et contiennent y_1, y_2 créant une dépendance totale (d'où l'égalité p.s. des marginales). À l'inverse dans le cas dézoomant ($\rho \to 0$), les boules sont très petites et créent de l'indépendance à la limite. La preuve de [BD-18] consiste à préciser cette heuristique.

Inspirés par [17], nous nous sommes intéressés ensuite dans [BD-18] à $M(\mu)$ défini comme $M(\delta_y)$ en (3.3.1) mais avec, à la place de δ_y, des mesures μ plus générales, pour lesquelles on a un contrôle des mesures de petites boules et de grosses boules. On demande plus précisément :

Définition 3.5 *Soit, pour $1 < \alpha \leq 2$, $\mathcal{M}_{\alpha,\beta}$ le sous-ensemble des $\mu \in \mathcal{M}$ telles que pour une constante C et $0 < p < \beta < q$ on ait :*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\mu(B(x,r))|^\alpha dx \leq C(r^p \wedge r^q) \tag{3.3.2}$$

où, pour $a, b \in \mathbb{R}$, $a \wedge b = \min(a, b)$.

Bien que la condition (3.3.2) soit d'origine essentiellement technique, on exhibe de nombreux exemples de mesures μ satisfaisant cette condition (par exemple, des mesures avec des conditions de moments, cf. Prop. 2.3 dans [BD-18]). De plus, on montre notamment que $\mathcal{M}_{\alpha,\beta}$ est un sous-espace vectoriel, stable par translations, rotations, dilatations, cf. Prop. 2.2 dans [BD-18]. Cependant, les mesures $\mu = \delta_y$ considérées dans (3.3.1) ne sont pas dans $\mathcal{M}_{\alpha,\beta}$. On observera enfin que dans [17], le cas spécial $\alpha = 2$ est traité, ce qui autorise des identités de polarisation sur $|\mu(B(x,r))|^2$ et ce qui permet d'exprimer les conditions requises sur μ sour forme d'énergie de Riesz.

Dans la recherche des limites, trois types de régimes apparaissent, comme dans [68] et [69]. Expliquons heuristiquement pourquoi :

Cas dézoomant ($\epsilon = -1$, *i. e.* $\beta > d$ et $\rho \to 0$) : Le nombre moyen de boules de rayon $r \geq 1$ et contenant 0 est

$$\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}+} \mathbf{1}_{\|x\|<r}\mathbf{1}_{r>1}\lambda(\rho)dxF_\rho(dr) = c_d\lambda(\rho)\int_1^{+\infty} r^d F_\rho(dr) \sim_{\rho\to 0} \frac{c_d C_\beta}{\beta - d}\lambda(\rho)\rho^\beta.$$

Cela laisse apparaître trois régimes : normalisation « grosses boules » quand $\lambda(\rho)\rho^\beta \to +\infty$; normalisation intermédiaire : $\lambda(\rho)\rho^\beta \to a \in (0, +\infty)$; normalisation « petites boules » : $\lambda(\rho)\rho^\beta \to 0$.

Cas zoomant ($\epsilon = +1$, *i. e.* $\beta < d$ et $\rho \to +\infty$) : Le nombre moyen de boules de rayon $r \leq 1$ et contenant 0 est

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}+} \mathbf{1}_{\|x\|<r} \mathbf{1}_{r<1} \lambda(\rho) dx F_\rho(dr) = c_d \lambda(\rho) \int_0^1 r^d F_\rho(dr) \sim_{\rho \to +\infty} \frac{c_d C_\beta}{d-\beta} \lambda(\rho) \rho^\beta.$$

Dans ce cas, les régimes apparaissant sont : normalisation « petites boules » : $\lambda(\rho)\rho^\beta \to +\infty$; normalisation intermédiaire : $\lambda(\rho)\rho^\beta \to a \in (0, +\infty)$; normalisation « grosses boules » : $\lambda(\rho)\rho^\beta \to 0$.

Régime stable avec dépendance. Quand $\lambda(\rho)\rho^\beta \to +\infty$ (et conforménent à l'intuition), on observe que seules les boules attendues participent au champ limite (les grosses si on dézoome, les petites si on zoome). Dans ce cas, le champ limite est dirigé par un régime stable avec dépendance :

Théorème 3.6 *On suppose que $\rho^\beta \lambda(\rho) \to +\infty$ quand $\rho \to 0^{-\epsilon}$. Soit $n_1(\rho) = \lambda(\rho)^{1/\alpha} \rho^{\beta/\alpha}$. On a*

$$\frac{M_\rho(\cdot) - \mathbb{E}[M_\rho(\cdot)]}{n_1(\rho)} \overset{\mathcal{M}_{\alpha,\beta}}{\Longrightarrow} Z_\alpha(\cdot) \quad \rho \to 0^{-\epsilon} \tag{3.3.3}$$

où $Z_\alpha(\mu) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \mu(B(x,r)) M_\alpha(dr, dx)$ est une intégrale stable par rapport à la mesure α-stable M_α contrôlée par $\sigma^\alpha C_\beta r^{-1-\beta} dr dx$ et de biais constant b.

Pour ce résultat comme pour les théorèmes 3.7 et 3.8 ci-dessous, l'argument est le suivant : par le procédé de Cramér-Wold et par linéarité, on se contente de montrer les convergences des marginales de dimension 1 dans (3.3.3). Comme $M(\mu)$ définie en (3.3.1) est une intégrale de Poisson, on a facilement sa fonction caractéristique

$$\begin{aligned} & \varphi_{n_1(\rho)^{-1}(M_\rho(\mu) - \mathbb{E}[M_\rho(\mu)])}(\theta) \\ = \quad & \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \lambda(\rho) \Psi_G \left(n_1(\rho)^{-1} \theta \mu(B(x,r)) \right) dx F_\rho(dr) \right) \end{aligned}$$

où $\Psi_G(u) = \int_{\mathbb{R}} \Psi(mu) G(dm)$ avec $\Psi(u) = e^{iu} - 1 - iu$. De plus, comme $n(p) \to +\infty$ et G est dans le domaine d'attraction stable on a un équivalent de $\Psi_G\left(n_1(\rho)^{-1}\theta\mu(B(x,r))\right)$. Il s'agit maintenant de passer à la limite, ce qui nécessite quelques précautions techniques, notamment le contrôle (3.3.2) des mesures μ. □

On montre en plus que le champ limite Z_α est stationnaire, isotrope et auto-similaire d'indice $(d-\beta)/\alpha$ sur $\mathcal{M}_{\alpha,\beta}$, cf. Prop. 2.3 dans [BD-18]. Enfin, des choix spécifiques de μ, d et α permettent de retrouver des champs connus (Takenaka, cf. [115],) ou considérés dans [17], [69], cf. Remarques 2.2, 2.3, 2.4 dans [BD-18]. Par exemple, on généralise le cas de la connexion rapide du modèle « continuous flow reward » de [69].

Régime Poissonien. Dans le cas intermédiaire ($\lambda(\rho)\rho^\beta \to a \in (0, +\infty)$), le régime est poissonien :

Théorème 3.7 *On suppose $\lambda(\rho)\rho^\beta \to a^{d-\beta}$ quand $\rho \to 0^{-\epsilon}$ pour $0 < a < +\infty$. On a*

$$M_\rho(\mu) - \mathbb{E}[M_\rho(\mu)] \overset{\mathcal{M}_{\alpha,\beta}}{\Longrightarrow} J(\mu_a), \quad \rho \to 0^{-\epsilon}$$

où μ_a est la dilatation de μ et J est l'intégrale (compensée) de Poisson

$$J(\mu) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} m \mu(B(x,r)) \widetilde{N}_\beta(dx, dr, dm)$$

par rapport à la mesure compensée $\widetilde{N}_\beta$ d'intensité $C_\beta r^{-\beta-1} dx dr G(dm)$.

On renvoie à [BD-18] pour l'étude de quelques propriétés du champ poissonien J (stationnarité, isotropie, similarité aggrégative sur $\mathcal{M}_{\alpha,\beta}$). Ce cas généralise le cas connection intermédiaire du modèle « continuous flow reward » de [69] et le cas où J est le processus télécom intermédiaire.

Régime stable avec indépendance. On se restreint au cas dézoomant ($i.\ e.\ \rho \to 0$, $\epsilon = -1$ et $d < \beta < \alpha d$). Quand $\lambda(\rho)\rho^\beta \to 0$, le changement d'échelle ne conserve à la limite que les petites boules. Dans ce cas, le champ limite est dirigé par un régime stable d'indice $\gamma = \beta/d$ avec indépendance : on énonce une convergence pour les mesures $\mu(dx) = \phi(x)dx$ avec $\phi \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^d)$, ce qu'on écrit abusivement $\mu \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 3.8 *Soit $d < \beta < \alpha d$, on suppose que $\lambda(\rho) \to +\infty$ et $\lambda(\rho)\rho^\beta \to 0$ quand $\rho \to 0$. Alors avec $n_2(\rho) := \lambda(\rho)^{d/\beta}\rho^d$ et $\gamma = \beta/d \in (1, \alpha)$, on a :*

$$\frac{M_\rho(\cdot) - \mathbb{E}[M_\rho(\cdot)]}{n_2(\rho)} \xrightarrow{L^1(\mathbb{R}^d)\cap L^\alpha(\mathbb{R}^d)} \widetilde{Z}_\gamma(\cdot)$$

où pour $\mu(dx) = \phi(x)dx$, $\widetilde{Z}_\gamma(\mu) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)\widetilde{M}_\gamma(dx)$ est une intégrale stable par rapport à la mesure γ-stable M_γ contrôlée par $\sigma_\gamma^\gamma dx$ pour

$$\sigma_\gamma^\gamma = \frac{c_d^\gamma C_\beta}{d} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1 - \cos(r)}{r^{1+\gamma}} dr \int_{\mathbb{R}} |m|^\gamma G(dm)$$

et de biais constant égale à

$$b_\gamma = -\frac{\int_{\mathbb{R}} \varepsilon(m)|m|^\gamma G(dm)}{\int_{\mathbb{R}} |m|^\gamma G(dm)}.$$

On montre encore que le champ $\widetilde{Z}_\gamma$ est stationnaire, isotrope, autosimilaire d'indice $(d - \beta)/\gamma$. Ce résultat généralise le cas connexion rapide du modèle « continuous flow reward » de [69].

Notons que dans le régime poissonien quand $a^{d-\beta} \to +\infty$ ou 0, on montre que $J(\mu_a)$, correctement renormalisé, converge (dans le sens fdd) vers $Z_\alpha(\mu)$ ou $\widetilde{Z}_\gamma(\mu)$.

3.4 Fluctuations des lois de fonctionnelles associées à un alphabet aléatoire

Avec Christian Houdré, nous nous intéressons dans [BH-19] à des fonctionnelles associées à des tirages de mots aléatoires sur des alphabets ordonnés grossissants. Par exemple, la fonctionnelle la plus simple considérée est celle qui donne la longueur de la plus longue sous-suite croissante du mot aléatoirement tiré. Nous commençons par décrire nos résultats avec cette fonctionnelle.

Le comportement de cette longueur $LI(n, m)$ quand la taille du mot n et/ou la taille de l'alphabet m tendent vers l'infini et ses connexions à de nombreux thèmes mathématiques (citons par exemple : les matrices aléatoires, les files d'attente, les problèmes de percolation) ont été intensivement étudiés notamment dans [6], [7], [22], [46], [62], [63], [65], [125], ...). Par exemple, pour une taille d'alphabet m fixée, correctement renormalisée, et pour des tirages de lettres uniformes, $LI(n, m)$ converge en loi quand la taille de mot $n \to +\infty$, vers la plus grande valeur propre d'une matrice $m \times m$ à trace zéro du *Gaussian Unitary Ensemble* (GUE).

Plus généralement, pour les tableaux de Young associés aux mots (composés de lettres uniformes) auxquels nous nous intéressons, c'est leur forme globale qui converge (après renormalisation) vers la loi du spectre d'une matrice $m \times m$ à trace zéro du GUE quand $n \to +\infty$, cf. [65].

Historiquement, ce sont pour des permutations aléatoires que la longueur de la plus longue sous-suite croissante a été étudiée (sous le nom de problème d'Ulam). En notant $L\sigma_n$ cette longueur pour une permutation $\sigma_n \in \mathfrak{S}_n$ de $\{1, \ldots, n\}$, il a été montré dans les années 70 que la longueur moyenne est asympotiquement de l'ordre de $2\sqrt{n}$, dans les années 90, que la variance varie en $n^{1/3}$. Les fluctuations limites de $L\sigma_n$ sont décrites par Baik, Deift et Johansson dans [6] :

$$\frac{L\sigma_n - 2\sqrt{n}}{n^{1/6}} \Rightarrow F_{TW} \tag{3.4.1}$$

où la distribution limite F_{TW} est la loi de Tracy-Widom introduite dans [123]. Bien qu'une expression explicite de cette loi ne nous soit utile, notons que Tracy et Widom donnent sa fonction de répartition à l'aide de la solution u de l'équation Painlevé II ($u_{xx} = 2u^3 + xu, \quad u(x) \sim_{+\infty} -Ai(x)$, où Ai est la fonction d'Airy) : $F_{TW}(t) = \exp\left(-\int_t^{+\infty}(x-t)u(x)^2dx\right)$.

Dans [BH-19], nous nous intéressons à des mots composés de n lettres $X_1^m, \cdots, X_n^m$ aléatoirement (et indépendamment) tirées dans un alphabet ordonné $\mathcal{A}_m = \{\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_m\}$ de taille m. L'objet de notre étude est la longueur $LI(n,m)$ de la plus longue sous-suite croissante dans le mot $X_1^m, \cdots, X_n^m$. Il est à noter que les sous-suites croissantes considérées sont faiblement croissante et que par exemple si on tire le mot $\alpha_1\ \alpha_3\ \alpha_2\ \alpha_2\ \alpha_5\ \alpha_3\ \alpha_4$ alors $\alpha_2\ \alpha_2\ \alpha_5$ ou $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4$ conviennent. On comprend dès lors qu'à cause de ces répétitions le problème est différent de celui des permutations aléatoires. Cependant, en considérant un alphabet infini « continu », par exemple $\mathcal{A} = [0,1]$, et des lettres tirées selon une loi à densité, presque sûrement toutes les lettres sont distinctes et les sous-suites croissantes faiblement coïncident (ps) avec les sous-suites strictement croissantes. En fait dans ce cas, il existe $\sigma_n \in \mathfrak{S}_n$ qui réordonnent les lettres en leur statistiques d'ordre et σ_n est uniforme sur $\mathfrak{S}_n$ quand les lettres sont *iid*, de plus $L\sigma_n = LI(n)$. Le cas des permutations aléatoires correspond donc au cas limite d'un alphabet infini continu.

Pour un alphabet fixe $\mathcal{A}_m = \{\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_m\}$ de taille m et des tirages de lettres *iid*, l'asymptotique de LI_n est bien connue, cf. [125], [65], [57] (tirages uniformes) et [62], [57] (tirages non-uniformes) (ou encore [28], [58] pour des tirages markoviens auxquels on ne s'intéressera pas ici). Dans la suite, nous considérons le cas de tirage uniformes, on a alors :

$$\frac{LI(n,m) - n/m}{\sqrt{n}} \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{m}}(-Z_m + D_m) \tag{3.4.2}$$

où à partir d'une famille de mouvements browniens standard indépendants $(B^i)_{1\le i\le m}$, on a

$$D_m = \max_{\substack{0=t_0\le t_1\le\dots\\ \le t_m=1}} \sum_{i=1}^m \left[B^i(t_i) - B^i(t_{i-1})\right] \quad \text{et} \quad Z_m = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m B^i(1) \sim \mathscr{N}(0,1/m).$$

Une observation clef due a Baryshnikov [9] permet de faire réapparaitre la loi de Tracy-Widom qui apparait dans la limite (3.4.1) des permutations aléatoires. En effet, D_m (fonctionnelle introduite par Glynn et Whitt [46] dans des asympotiques de file d'attente) coïncide en loi avec la valeur propre maximale λ_{GUE}^1 d'une matrice de GUE (*Gaussian Unitary Ensemble*), *i. e.* une matrice $X = (X_{i,j})_{1\le i,j\le m}$ hermitienne avec

$$\mathcal{Re}(X_{i,j}), \mathcal{Im}(X_{i,j}) \sim \mathscr{N}(0,1/2)\ (i>j), \quad X_{i,i} \sim \mathscr{N}(0,1)$$

où toutes les lois normales sont indépendantes. On peut alors utiliser l'étude des fluctuations de λ_{GUE}^1 par Tracy et Widom [123]

$$m^{1/6}(\lambda_{GUE,m}^1 - 2\sqrt{m}) \Rightarrow F_{TW}, \quad m \to +\infty, \tag{3.4.3}$$

pour déduire

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty} \frac{LI(n,m) - n/m - 2\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \times m^{2/3} \Longrightarrow F_{TW}. \tag{3.4.4}$$

Avec Christian Houdré, nous nous intéressons dans [BH-19] à la persistance de la limite (3.4.4) quand on passe à la limite *simultanément* en n et en m. Cela revient à considérer des mots dans des alphabets grossissants : pour chaque n, on retire intégralement un mot, de longueur n, composé de $X_1^m, \dots, X_n^m$ tirées dans un alphabet $\mathcal{A}_m$ de taille $m := m(n)$ plus grande (qu'à l'étape précédente). On montre que la même limite que (3.4.4) reste vraie si les alphabets ne grossissent pas trop vite. Nos arguments reposent sur des arguments d'universalité de Bodineau et Martin dans [22] combinés avec une approximation forte (dite KMT pour Komlós, Major, Tusnády qui en sont à l'origine dans les années 1975 – 1976, cf. [72], [73]). Heuristiquement, en regardant, grâce à l'égalité $D_m \stackrel{\mathscr{L}}{=} \lambda^1_{GUE}$, la valeur propre maximale du GUE comme une fonctionnelle brownienne, on va « coller » $LI(n,m)$ à cette fonctionnelle pour récupérer F_{TW} à la limite. Cela fonctionne bien si l'approximation est négligeable par rapport aux fluctuations de la valeur propre maximale du GUE, *i. e.* les alphabets ne grossissent pas trop vite, en effet on a :

Théorème 3.9 *Soit $m := m(n) \to +\infty$ tel que $m = o(n^{3/10}(\log n)^{-3/5})$. Alors*

$$\frac{V_1(n,m) - (n/m) - 2n^{1/2}}{n^{1/2}m^{-2/3}} \Rightarrow F_{TW}, \quad n \to +\infty.$$

Remarque 3.10 L'ordre de grandeur 3/10 pour m est plus bas que celui de Bodineau et Martin dans des modèles de percolation (3/7), dont on a adapté la méthode. Notons que, toujours dans des modèles de percolations, Baik et Suidan obtiennent le même type de résultat mais pour un ordre au mieux 3/14 par plongement de Skorohod. Les résultats de Bodineau-Martin et Baik-Suidan s'appliquent à des variables aléatoires générales mais indépendantes (sous certaines conditions d'intégrabilité, on parle de problème d'universalité). En comparaison, dans notre problème on ne s'intéresse qu'à des variables de Bernoulli mais qui ne sont pas entièrement indépendantes, ni identiquement distribuées (par nature même du tirage des lettres). Cette difficulté est résolue en utilisant une version de l'approximation KMT due à Sakhanenko, cf. [86], qui permet de contrôler explicitement certaines constantes qui dépendent des lois impliquées. Toutefois, l'approximation KMT est appliquée à un tableau triangulaire de variables ce qui explique (probablement) qu'une condition de croissance plus forte sur m (3/10 au lieu de 3/7) est nécessaire. Notons enfin que Johansson propose aussi des résultats de limite simultanée dans [65] mais avec des conditions sur m et n d'une autre nature, Son théorème 1.7 affirme que pour $\sqrt{n} \ll m$, on a :

$$\frac{V_1(n,m) - n/m - 2\sqrt{n}}{n^{1/6}} \Rightarrow F_{TW};$$

alors que pour $(\ln n)^{2/3} \ll m \ll \sqrt{n}$, on a :

$$\frac{V_1(n,m) - n/m - 2\sqrt{n}}{n^{1/2}m^{-2/3}} \Rightarrow F_{TW}.$$

Dans notre cas, on n'a pas de borne inférieure sur l'ordre de m et le théorème 3.9 se généralise, cf. théorème 3.11 et théorème 3.12.

La preuve du théorème 3.9 se résume en les étapes suivantes :

- On introduit le processus

$$L_1(s,m) = \sup_{\mathbf{t} \in I_m(s)} \sum_{l=1}^m \big(B^l(t_l) - B^l(t_{l-1})\big),$$

  où $I_m(s) = \{0 = t_0 \le t_1 \le \cdots \le t_m = s\}$ et $(B^l(s))_{s \ge 0}$, $1 \le l \le m$ sont des mouvements browniens standard indépendants, Par autosimilarité brownienne, $\big(L_1(s,m), \dots, L_m(s,m)\big) \stackrel{\mathscr{L}}{=} \sqrt{s}\big(L_1(1,m), \dots, L_m(1,m)\big)$, si bien que (3.4.3) se réécrit

$$\frac{L_1(n,m) - 2\sqrt{nm}}{n^{1/2}m^{-1/6}} \Rightarrow F_{TW} \tag{3.4.5}$$

- Les sous-suites croissantes s'obtiennent en prenant des blocs successifs chacun étant constitué de la même lettre, la valeur des blocs augmentant. On obtient alors la longueur de la plus longue sous-suite en maximisant sur les suites de tels blocs [57]. En formalisant cette observation, et en notant $S_k^{m,j} = \sum_{i=1}^k X_{i,j}^m$ avec les variables de Bernoulli$(1/m)$ $X_{i,j}^m = 1$ si $X_i^m = \alpha_j^m$, 0 sinon, on a :

$$LI(n,m) = \sup_{\mathbf{t}\in I_m(s)} \sum_{l=1}^m \big(S_{[t_l]}^{m,l} - S_{[t_{l-1}]}^{m,l}\big),$$

qu'on va alors comparer à $L_1(n,m)$ dans (3.4.5) par approximation KMT.

- On considère $\widetilde{LI}(n,m)$ défini à partir de $\widetilde{X}_{i,j}^m = (X_{i,j}^m - 1/m)/\sigma_m$ comme $LI(n,m)$ à partir de $X_{i,j}^m$ et on est ramené à montrer la convergence de $\frac{\widetilde{LI}(n,m)-2\sqrt{nm}}{n^{1/2}m^{-1/6}}$.

- Comme dans [22], on majore comme suit :

$$\Big|\widetilde{LI}(n,m) - L_1(n,m)\Big| \leq 2\sum_{l=1}^m \big(Y_n^{m,l} + W_n^l\big)\,,$$

avec

$$Y_n^{m,l} = \max_{1\leq i\leq n} |S_i^{m,l} - B^{m,l}(i)| \quad \text{et} \quad W_n^l = \sup_{\substack{0\leq s,t\leq n\\ |s-t|\leq 1}} |B^l(s) - B^l(t)|.$$

- On considère (en travaillant ligne par ligne) que les variables aléatoires données par l'approximation KMT (cf. [86, Th. 2.1, Cor. 3.2]) (cela oblige à introduire une famille triangulaire de Browniens $(B^{m,l})_{l\leq m}$ et à manipuler dans la suite $W_n^{m,l} = \sup_{\substack{0\leq s,t\leq n\\ |s-t|\leq 1}} |B^{m,l}(s) - B^{m,l}(t)|$).

- Les ensembles $A_1^n = \{\max_{l\leq m} Y_n^{m,l} > a_n\}$ et $A_2^n = \{\max_{1\leq l\leq m} W_n^{m,l} > \ln n\}$, avec $a_n = Cc_1(m)^{-1}(\log n)^2$), sont alors asymptotiquement négligeables. En effet, $\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(A_1^n) = 0$ se voit grâce à l'approximation KMT alors que $\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(A_2^n) = 0$ est dû au contexte brownien et à la concentration gaussienne.

- Finalement, il reste à voir

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left\{\Big|\widetilde{LI}(n,m) - L_1(n,m)\Big| \geq c_n\right\} \cap (A_1^n)^c \cap (A_2^n)^c\right) = 0$$

pour $c_n = o(n^{1/2}m^{-1/6})$, ce qui s'obtient en montrant

$$\mathbb{E}\left[\Big|\widetilde{LI}(n,m) - L_1(n,m)\Big| \ \mathbf{1}_{(A_1^n)^c\cap(A_2^n)^c}\right] = o(c_n)$$

et qui est vrai lorsque $m = o(n^{3/10}(\log n)^{-3/5})$. □

Le théorème 3.9 peut se généraliser dans deux directions : on peut s'intéresser à des tirages de lettres non-uniformes ou à des fonctionnelles plus sophistiquées (tableaux de Young).

Commençons par le cas de **tirage de lettres non-uniformes**. Les lettres tirées X_i^m, $1 \leq i \leq n$, sont *iid* avec $\mathbb{P}(X_1^m = \alpha_j) = p_j^m$. Notons alors $p_{max}^m = \max_{1\leq j\leq m} p_j^m$ et $J(m) = \{j : p_j^m = p_{max}^m\} = \{j_1, \ldots, j_{k(m)}\}$ où $k(m) = \text{card }(J(m))$. L'heuristique suivante explique pourquoi on aura le même type de comportement limite que dans le théorème 3.9 : on peut penser qu'asymptotiquement seules les lettres les plus fréquentes vont intervenir et que dans l'expression combinatoire

$$LI(n,m) = \max_{\substack{0=l_0\leq l_1\leq\cdots\\ \leq l_{m-1}\leq l_m=n}} \Big(\sum_{j=1}^m \sum_{i=l_{j-1}+1}^{l_j} X_{i,j}^m\Big),$$

le max va être atteint avec des blocs de lettres α_j^m, $j \in J(m)$, *i. e.* que $LI(n,m) = LI'(n,m)$ avec

$$LI'(n,m) = \max_{\substack{0=l_0\le l_1\le\cdots \\ \le l_{m-1}\le l_m=n \\ l_{j-1}=l_j \text{ pour } j\notin J(m)}} \Big(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=l_{j-1}+1}^{l_j} X_{i,j}^m\Big),$$

Dès lors tout fonctionne comme si on travaillait avec $k(m) = \mathrm{card} J(m)$ lettres de même probabilité p_{max}^m, donc avec un alphabet uniforme. Tout se passe comme dans le cas uniforme si l'on change $1/m$ en p_{max}^m et m en $k(m)$. En effet, cette heuristique est confirmée à m fixé par le théorème 3.1 et le corollaire 3.3 de [57] qui donnent un équivalent de (3.4.2) dans le cas non-uniforme. Pour justifier cette heuristique, il reste à montrer que le max « idéal » $LI'(n,m)$ reste proche du max réel $LI(n,m)$, ce qui nécessite un contrôle de $p_{2nd}^m = \max\{p_j^m : p_j^m < p_{max}^m\}$ (cf. (3.4.6) ci-dessous). On renvoie à [BH-19] pour les détails de la preuve du résultat suivant :

Théorème 3.11 *Considérons des alphabets $\mathcal{A}_m$ de taille m variant avec n de façon que $k(m(n))$, le nombre de lettres les plus probables dans $\mathcal{A}_m$ tende vers $+\infty$ avec $k(m(n)) = o(n^{3/10}(\log n)^{-3/5})$. Alors si*

$$(p_{2nd}^{m(n)})^2 \frac{n^{8/7}}{(\ln n)^{2/7}} = o(p_{max}^{m(n)}), \tag{3.4.6}$$

on a

$$\frac{V_1(n,m(n)) - p_{max}^{m(n)} n - 2\sqrt{k(m(n)) p_{max}^{m(n)} n}}{\sqrt{k(m(n)) p_{max}^{m(n)} n}} k(m(n))^{2/3} \Longrightarrow F_{TW}.$$

On s'intéresse maintenant à des fonctionnelles plus sophistiquées : les **tableaux de Young**. En utilisant la correspondance de Robinson-Schensted-Knuth (RSK) entre mots et paires de tableaux de Young de même tailles (l'un standard, l'autre semi-standard, cf. [44]), on associe à nos mots aléatoires un tableau de Young (aléatoire). Ainsi, selon cette correspondance RSK, pour un mot composé de n lettres *iid* uniformes dans un alphabet de taille m, la première ligne du tableau a pour longueur $LI(n,m)$, la longueur de la plus longue sous-suite croissante du mot et le tableau a au plus m lignes. Dans la suite on note $R_k(n,m)$ la longueur de la k-ième ligne du tableau de Young associé au mot. On s'intéresse à la forme asymptotique des tableaux de Young, qu'on décrit à l'aide de $V_k(n,m) = \sum_{j=1}^k R_j(n,m)$.

Dans le cas uniforme, les équivalents de (3.4.2), (3.4.3), (3.4.4) pour la plus longue sous-suite existent, cf. [58]. En effet,

$$\left(\frac{V_k(n,m) - kn/m}{\sqrt{n}}\right)_{1\le k\le m} \Rightarrow \frac{\sqrt{m-1}}{m}\left(\max_{\mathbf{t}\in I_{k,m}} \sum_{j=1}^{k}\sum_{l=j}^{m-k+j}\big(\hat{B}^l(t_{j,l}) - \hat{B}^l(t_{j,l-1})\big)\right)_{1\le k\le m}, \tag{3.4.7}$$

où $(\hat{B}^1,\dots,\hat{B}^m)$ est un mouvement brownien m-dimensionnel de matrice de covariance avec des 1 sur la diagonale, des $-1/(m-1)$ ailleurs et avec $I_{k,m}$ défini par :

$$I_{k,m} = \big\{\mathbf{t} = (t_{j,l} : 1\le j\le k, 0\le l\le m) : t_{j,j-1} = 0, t_{j,m-k+j} = 1, 1\le j\le k,$$
$$t_{j,l-1}\le t_{j,l}, 1\le j\le k, 1\le l\le m-1;\ t_{j,l}\le t_{j-1,l}, 2\le j\le k, 1\le l\le m-1\big\}.$$

En notant $\big(\lambda_{GUE,m}^1, \lambda_{GUE,m}^2, \dots, \lambda_{GUE,m}^m\big)$ et $\big(\lambda_{GUE,m}^{1,0}, \lambda_{GUE,m}^{2,0}, \dots, \lambda_{GUE,m}^{m,0}\big)$ les spectres ordonnés de matrices $m\times m$ et $m\times m$ à trace zéro du GUE liés par

$$\big(\lambda_{GUE,m}^1, \lambda_{GUE,m}^2, \dots, \lambda_{GUE,m}^m\big) \stackrel{\mathscr{L}}{=} \big(\lambda_{GUE,m}^{1,0}, \lambda_{GUE,m}^{2,0}, \dots, \lambda_{GUE,m}^{m,0}\big) + Z_m e_m,$$

où $e_m = (1,1,\dots,1)$ et $Z_m \sim \mathscr{N}(0,1/m)$ est indépendante de $\big(\lambda_{GUE,m}^{1,0}, \lambda_{GUE,m}^{2,0}, \dots, \lambda_{GUE,m}^{m,0}\big)$, le lien de (3.4.7) avec le GUE est donné par Doumerc [40] (voir aussi [59])

$$\frac{\sqrt{m-1}}{\sqrt{m}}\mathbf{\Theta}_m^{-1}\Big(\Big(\max_{\mathbf{t}\in I_{k,m}} \sum_{j=1}^{k}\sum_{l=j}^{m-k+j}\big(\hat{B}^l(t_{j,l}) - \hat{B}^l(t_{j,l-1})\big)\Big)_{1\le k\le m}\Big)$$

$$\stackrel{\mathscr{L}}{=} \left(\lambda^{1,0}_{GUE,m}, \lambda^{2,0}_{GUE,m}, \dots, \lambda^{m,0}_{GUE,m}\right) \tag{3.4.8}$$

où on a noté $\mathbf{\Theta}_k : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ la focntion donnée par $(\mathbf{\Theta}_k(\mathbf{x}))_j = \sum_{i=1}^j x_i$, $1 \le j \le k$, cf. [59]. L'équivalent pour tout le spectre du GUE de (3.4.3) est donné par Johansson [65, Th. 1.4] : pour tout $r \ge 1$, il y a une distribution (explicite) $\mathbf{F}_r$ sur $\mathbb{R}^r$ (qui coïncide F_{TW} pour $r = 1$) telle que :

$$\left(m^{1/6}\left(\lambda^k_{GUE,m} - 2\sqrt{m}\right)\right)_{1\le k\le r} \Rightarrow \mathbf{F}_r, \quad m \to +\infty. \tag{3.4.9}$$

En combinant (3.4.7) et (3.4.9), on a l'équivalent de (3.4.4) :

$$\lim_{m\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{V_k(n,m) - kn/m - 2k\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \times m^{2/3}\right)_{1\le k\le r} = \mathbf{F}_r \mathbf{\Theta}_r^{-1}.$$

On a alors l'analogue pour la forme du tableau de Young du théorème 3.9 pour une limite simultanée dans les alphabets grossissants :

Théorème 3.12 *Soit $m = o(n^{3/10}(\log n)^{-3/5})$. Alors pour tout $r \ge 1$,*

$$\left(\frac{V_k(n,m) - kn/m - 2k\sqrt{n}}{n^{1/2}m^{-2/3}}\right)_{1\le k\le r} \Rightarrow \mathbf{F}_r \mathbf{\Theta}_r^{-1}, \quad n \to +\infty.$$

La preuve est une généralisation naturelle de celle du théorème 3.9 ; on renvoie à [BH-19] pour les détails.

Remarque 3.13 • Dans [65], Johansson propose aussi des passages à la limite simultanés pour la plus grande sous-suite sous d'autres conditions sur la taille m des alphabets. En notant $a_n \ll b_n$ pour $\lim_{n\to+\infty} a_n/b_n = 0$, dans son Théorème 1.7, on a

$$\frac{LI(n,m) - n/m - 2\sqrt{n}}{(1 + \frac{\sqrt{n}}{m})^{2/3} n^{1/6}} \Rightarrow F_{TW},$$

quand $(\ln n)^{2/3} \ll m$, ce qui laisse apparaître plusieurs régimes selon que $\sqrt{n} \ll m$, $\sqrt{n}/m \to l$, $(\ln n)^{2/3} \ll m \ll \sqrt{n}$. De toute façon [65, Th. 1.7] exige une borne inférieure sur l'ordre de m et traite le cas de la plus longue sous-suite seulement.

- Dans [7], Baik et Suidan étudient des passages à la limite du même type mais pour des fonctionnelles d'un autre type, introduites par O'Connell et Yor, cf. [102]. Les fonctionnelles de O'Connell et Yor représentent en loi le spectre GUE comme dans (3.4.8) mais comme l'indique Doumerc dans [40], la coïncidence des fonctionnelles (celles à gauche de (3.4.8) et celles de O'Connell-Yor) intervient en loi et seulement lorsqu'elles sont évaluées en des mouvements browniens.

Bibliographie

[1] S. Albeverio, Y. G. Kondratiev, M. Röckner. *Analysis and geometry on configuration spaces.* J. Funct. Anal. vol. 154, no.2, pp. 444-500, 1998.

[2] D. E. Alexandrova, V. I. Bogachev, A. Y. Pilipenko. *On the convergence of induced measures in variation.* Math. Sb., vol. 190, no. 9-10, pp. 1229–1245, 1999.

[3] C. Ané, M. Ledoux. *On logarithmic Sobolev inequalities for continuous time random walks on graphs.* Probab. Theory Relat. Fields vol. 116 no. 4, pp. 573–602, 2000.

[4] M. Arcones, E. Giné. *On decoupling, series expansions and tail behavior processes.* J. Theor. Probab. vol. 6, pp. 101–122, 1993.

[5] A. Astrauskas. *Limit theorems for quadratic forms of linear processes.* Lith. Math. J., vol. 23, pp. 355–361, 1983.

[6] J. Baik, P. Deift, K. Johansson. *On the distribution of the length of the longest increasing subsequence of random permutations.* J. Amer. Math. Soc., vol. 12, pp. 1119–1178, 1999.

[7] J. Baik, T. Suidan. *A GUE central limit theorem and universality of directed first and last passage percolation site.* Int. Math. Res. Not. no. 6, pp. 325–337, 2005.

[8] C. Barakat, P. Thiran, G. Iannaccone, C. Diot, P. Owezarski. *Modeling internet backbone traffic at the flow level.* IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 51, no. 8, pp. 2111–2124, 2003.

[9] Y. Baryshnikov. *GUEs and Queues.* Probab. Theor. and Relat. Fields, vol. 119, pp. 256–274, 2001.

[10] A. Begyn. *Asymptotic expansion and central limit theorem for quadratic variations of Gaussian processes.* Bernoulli, vol. 13, no. 3, pp. 712–753, 2007.

[11] N. Bellamy, M. Jeanblanc. *Incompleteness of markets driven by a mixed diffusion.* Finance and Stochastics, vol. 4, pp. 209–222, 2000.

[12] J. Bergenthum, L. Rüschendorf. *Comparison of option prices in semimartingale models.* Finance and Stochastics, vol. 10, pp. 229–249, 2006.

[13] J. Bergenthum, L. Rüschendorf. *Comparison of semimartingales and Lévy process.* Ann. Probab. vol. 35, no. 1, 2007.

[14] J. Bertoin, A. Lindner, R. Maller. *On continuity properties of the law of integrals of Lévy processes.* Séminaire de probabilités vol. XLI. Springer. Lecture Notes in Mathematics 1934, pp. 137–159, 2008.

[15] K. Bichteler, J.-B. Gravereaux, J. Jacod. *Malliavin Calculus for Processes with Jumps.* Stochastics Monographs, vol. 2. Gordon and Breach Science Publishers, 1987.

[16] H. Biermé, A. Estrade. *Poisson random balls : self similarity and X-ray images.* Adv. Appl. Prob., vol. 38, pp. 1–20, 2006.

[17] H. Biermé, A. Estrade, I. Kaj. *Self-similar random fields and rescaled random balls models.* Preprint 2008. Disponible à `http ://www.math-info.univ-paris5.fr/ bierme/Recherche/Publications/ssrfscaling.pdf`

[18] P. Billingsley. *Convergence of Probability Measures.* Wiley, 2nd Ed., 1968.

[19] J.-M. Bismut. *Calcul des variations stochastiques et processus de sauts.* Z. Wahrsch. verw. Gebiete vol. 63, pp. 147–235, 1983.

[20] S. Bobkov, M. Ledoux. *On modified Logarithmic Sobolev inequalities for Bernoulli and Poisson measure.* J. Func. Anal., vol. 156, pp. 347–365, 1998.

[21] S. Bobkov, F. Götze, C. Houdré. *On Gaussian and Bernoulli covariance representations.* Bernoulli vol. 7, no. 3, pp. 439–451, 2001.

[22] T. Bodineau, J. Martin. *A universality property for last-passage percolation paths close to the axis.* Elect. Comm. Probab. vol. 10, pp. 105–112, 2005.

[23] C. Borell. *Tail probabilities in Gauss space.* Pp. 73–82 dans Vector Space Measures and Applications I (Proc. Conf., Univ. Dublin, Dublin, 1977). Lecture Notes in Math., vol. 644. Springer, Berlin, 1978.

[24] N. Bouleau, L. Denis. *Energy density property and the lent particle method for Poisson measure* À paraître dans J. Func. Anal., vol. 257, pp. 1144–1174, 2009.

[25] J.-C. Breton. *Intégrales stables multiples - propriétés des lois ; principe local d'invariance pour les variables aléatoires stationnaires.* Thèse de doctorat no. 3081, Université Lille 1, 2001.

[26] P. Breuer, P. Major. *Central limit theorems for nonlinear functionals of Gaussian fields.* J. Multivariate Anal., vol. 13, no. 3, pp. 425–441, 1983.

[27] E. A. Carlen, E. Pardoux. *Differential calculus and integration by parts on Poisson space.* Pp. 63–73 dans Stochastics, algebra and analysis in classical quantum dynamics (Marseille 1988), Math. Appl. 59, Kluwer, Dordrecht, 1990.

[28] G.P. Chistyakov, F. Götze. *Distribution of the shape of Markovian random words.* Probab. Theor. Relat. Fields, vol. 119, pp. 18–36, 2004.

[29] K. L. Chung. *A Course in Probability Theory.* Academic Press, 3ème Ed., 2001.

[30] J.-F. Coeurjolly. *Estimating the parameters of a fractional Brownian motion by discrete variations of its sample paths.* Statist. Infer. Stoch. Proc., vol. 4, pp. 199–227, 2001.

[31] Y. A. Davydov. *On the absolute continuity of images of measures.* J. Soviet. Math. vol. 36, no. 4, pp. 468–473, 1987.

[32] Y. A. Davydov, M. A. Lifshits. *Stratification method in some probability problems.* J. Soviet Math. vol. 37, no. 1, 1987.

[33] Y. A. Davydov, G. V. Martynova. *Limit behavior of multiple stochastic integral.* Statist. and Control of random Proc. (Preila, 1987), pp. 55–57, Nauka, Moscow 1987 *(in Russian).*

[34] Y. A. Davydov. *On distributions of multiple Wiener-Itô integrals.* Theory Probab. Appl., vol. 35, no. 1, pp. 27–37, 1991.

[35] Y. A. Davydov. *On convergence in variation of one-dimensional image measures.* J. Math. Sciences, vol. 75, no. 5, pp. 1903–1909, 1995.

[36] Y. A. Davydov. *On the rate of strong convergence for convolutions.* J. Math. Sciences, vol. 83, no. 3, pp. 393–396, 1997.

[37] Y. A. Davydov, M. A. Lifshits, N. V. Smorodina. *Local Properties of Distributions of Stochastic Functionals.* American Mathematical Society, 1998.

[38] L. Denis. *A criterion of density for solutions of Poisson-driven SDEs.* Probab. Theory Relat. Fields vol. 118, no.3, pp. 406–426, 2000.

[39] R. L. Dobrushin, P. Major. *Non-central limit theorems for nonlinear functionals of Gaussian fields.* Z. Wahrsch. verw. Gebiete, vol. 50, pp. 27–52, 1979.

[40] Y. Doumerc. *A note on representations of eigenvalues of classical Gaussian matrices.* Séminaire de Probabilité XXXVII, Lecture Notes in Math., no. 1832, Springer, Berlin pp. 370-384, 2003.

[41] E. Ekström, J. Tysk. *Properties of option prices in models with jumps.* Math. Finance, vol. 17 no. 3, pp. 381–397, 2007.

[42] N. El Karoui, M. Jeanblanc, S. Shreve. *Robustness of the Black and Scholes formula.* Math. Finance vol. 8, pp. 93–126, 1998.

[43] N. Fournier. *Jumping SDEs : absolute continuity using monotonicity.* Stochastic Processes Appl. vol. 98, no. 2, pp. 317–330, 2002.

[44] W. Fulton. *Young Tableaux with Applications to Representation Theory and Geometry.* Cambridge University Press, 1997.

[45] L. Giraitis, D. Surgailis. *CLT and other limit theorems for functionals of Gaussian processes.* Z. Wahrsch. verw. Gebiete, vol. 70, pp. 191–212, 1985.

[46] P. W. Glynn, W. Whitt. *Departure from many queues in series.* Ann. App. Probab., vol. 1, pp. 546–572, 1991.

[47] L. Gross. *Logarithmic Sobolev inequalities.* Amer. J. Math. vol. 97, pp. 1060–1083, 1975.

[48] A. A Gushchin, E. Mordecki. *Bounds for option price in the semi-martingale market models.* Proceedings of the Steklov Mathematical institute, vol. 237, pp. 73–113, 2002.

[49] V Henderson, D. Hobson. *Coupling and option price comparisons in a jump diffusion model.* Stochastics and stochastics reports, vol. 75, no. 3, pp. 79–101, 2003.

[50] C. Houdré, V. Pérez-Abreu. *Covariance identities and inequalities for functionals on Wiener space and Poisson space.* Ann. Probab. vol. 23, no. 1, pp. 400–419, 1995.

[51] C. Houdré, V. Pérez-Abreu, D. Surgailis. *Interpolation, correlation, identities and inequalities for inifinitely divisible variables.* J. Fourier Anal. Appl. Vol. 4, no. 6, pp. 651–668, 1998.

[52] C. Houdré. *Comparison and deviation from a representation formula.* Pp. 207–218 dans Stochastic processes and related topics : In memory of S. Cambanis 1943-1995 (I. Karatzas, B. S. Rajput, M. S. Taqqu Eds). Trends in Mathematics Series. Birkhäuser, Boston, 1998.

[53] C. Houdré. *Remarks on deviation inequalities for functions of infinitely divisible random vectors.* Ann. Probab. vol. 30, no. 3, pp. 1223–1237, 2002.

[54] C. Houdré, N. Privault. *Concentration and deviation inequalities in infinite dimensions via covariance representations.* Bernoulli vol. 8, no. 6, pp. 697–720, 2002.

[55] C. Houdré, P. Marchal. *On the concentration of measure phenomenon for stable and related random vectors.* Ann. Probab. vol. 32, no. 2, pp. 1496–1508, 2004.

[56] C. Houdré, P. Marchal, P. Reynaud-Bouret. *Concentration for norms of infinitely divisible vectors with independent components.* Bernoulli, vol. 14, no. 4, pp. 926–948, 2008 (see also ArXiv : math.PR/0606752).

[57] C. Houdré, T. Litherland. *On the longest increasing subsequence for finite and countable alphabets.* Preprint arXiv :math.PR/0612364, 2006.

[58] C. Houdré, T. Litherland. *On the limiting shape of Markovian random Young tableaux.* Preprint arXiv :0810.2982, 2008.

[59] C. Houdré, H. Xu. *On the limiting shape of random Young tableaux associated to inhomogeneous words* Preprint arXiv :0901.4138, 2009.

[60] P. Imkeller. *On exact tails for limiting distributions of U-statistics in the second Gaussian chaos.* Pp. 179–204 dans Chaos Expansions, Multiple Wiener-Itô Integrals and Their Applications (Guanajuato, 1992). Probab. Stochastics Ser., Boca Raton, 1994.

[61] J. Istas, G. Lang. *Quadratic variations and estimators of the Hölder index of a Gaussian process.* Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist., vol. 33, pp. 407–436, 1997.

[62] A. Its, C. Tracy, H. Widom. *Random words, Toeplitz determinants, and integrable systems I.* Random matrix models and their applications, Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 40, pp. 245–258, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.

[63] A. Its, C. Tracy, H. Widom. *Random words, Toeplitz determinants and integrable systems. II.* Advances in nonlinear mathematics and science. Phys. D 152/153 pp. 199–224, 2001.

[64] J. Jacod, J. Mémin. *Caractéristiques locales et conditions de continuité absolue pour les semi-martingales,* Z. Wahrsch. verw. Gebiete, vol. 35, pp. 1–37, 1976.

[65] K. Johansson. *Discrete polynomials ensembles and the Plancherel measure.* Ann. Math. vol. 153, pp. 259–296, 2001.

[66] I. Kaj. *Limiting fractal random processes in heavy tailed systems.* Pp. 199–218 dans Fractals in Engineering, New trends in Theory and Applications. Springer-Verlag, London, 2005.

[67] I. Kaj. *Aspects of wireless network modeling based on Poisson point processes.* Fields Institute Workshop on Applied Probability, Carleton University, 2006.

[68] I. Kaj, L. Leskelä, I. Norros, V. Schmidt. *Scaling limits for random fields with long-range dependence.* Ann. Probab., vol. 35, no. 2, pp. 528–550, 2007.

[69] I. Kaj, M. Taqqu. *Convergence to fractional Brownian motion and to the telecom process : the integral representation approach.* Dans Brazilian Probability School, 10th anniversary volume (Eds. M. E. Vares, V. Sidoravicius). Birkhauser, 2007.

[70] O. Kallenberg. *On an independence criterion for multiple Wiener integrals.* Ann. Probab., vol. 19, no. 2, pp. 483–485, 1991.

[71] Th. Klein, Y. Ma, N. Privault. *Convex concentration inequalities via forward-backward stochastic calculus.* Elec. J. Probab., vol. 11, pp. 486–512, 2006.

[72] J. Komlos, P. Major, G. Tusnády. *An approximation of partial sums of independent RV's, and the sample DF. I.* Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb. vol. 32, pp. 111–131, 1975.

[73] J. Komlos, P. Major, G. Tusnády. *An approximation of partial sums of independent RV's and the sample DF. II.* Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb. vol. 34, pp. 33–58, 1976.

[74] I. Kontoyiannis, M. Madiman. *Measure concentration for compound Poisson distributions.* Elec. Comm. Probab. vol. 11, pp. 45–57, 2006.

[75] W. Krakowiak, J. Szulga. *Random multilnear forms.* Ann. Probab., vol. 14, no. 3, pp. 957–973, 1986.

[76] W. Krakowiak, J. Szulga. *A multiple stochastic integral with respect to a p-strictly stable random measure.* Ann. Probab., vol. 16, no. 2, pp. 764–777, 1988.

[77] A. M. Kulik. *On a convergence in variation for distributions of solutions of SDE's with jumps.* Rand. Op. Stoch. Eq., vol. 113, no. 2, pp. 297–312, 2005.

[78] A. M. Kulik. *Malliavin calculus for Lévy processes with arbitrary Lévy measures.* Theory Probab. and Math. Stat. no. 72, pp. 75–92, 2006.

[79] A. M. Kulik. *Stochastic calculus of variations for general Lévy processes and its applications to jump-type SDE's with non-degenerated drift.* arXiv :math/0606427v2, 2006.

[80] A. M. Kulik. *Absolute continuity and convergence in variation for distributions of a functionals of Poisson point measure.* arXiv :math/0803.2389v1, 2008.

[81] S. Kusuoka. *On the absolute continuity of the law of a system of multiple Wiener-Itô integrals.* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, Math., vol. 30, pp. 191–197, 1983.

[82] S. Kwapień, W. A. Woyczyński. *Double stochastic integrals, random quadratic forms and random series in Orlicz spaces.* Ann. Probab., vol. 15, pp. 1072–1096, 1987.

[83] M. Ledoux. *A note on large deviations for Wiener chaos.* Pp. 1–14 dans Séminaire de Probabilités, XXIV, 1988/89. Lecture Notes in Math., vol. 1426. Springer, Berlin, 1990.

[84] M. Ledoux, M. Talagrand. *Probability in Banach Spaces.* Springer, Berlin, 1991.

[85] M. Ledoux. *Concentration of measure and logarithmic sobolev inequalities.* Séminaire de Probabilités, XXXIII, Lecture Notes in Math., vol. 1709, pp. 120–239. Springer, 1999.

[86] M. Lifshits. *Lecture notes on strong approximation.* Pub. IRMA Lille, vol. 53, no 13, 2000.

[87] P. Marchal. *Measure concentration for stable distributions with index close to 2.* Elec. Comm. Probab. vol. 10, pp. 29–35, 2005.

[88] C. Martini. *Propagation of convexity by Markovian martingalian semigoups.* Pot. Anal., vol. 10, pp. 133–175, 1999.

[89] H. Matsumoto, S. Taniguchi. *Wiener functionals of second order and their Lévy measures.* Elec. J. Probab. vol. 7, no. 14, 2002.

[90] E. Mayer-Wolf, D. Nualart, V. Pérez-Abreu. *Large deviations for multiple Wiener-Itô integral processes.* Séminaire de Probabilités, XXVI. Lecture Notes in Math., vol. 1526, pp. 11–31. Springer (Berlin), 1992.

[91] H. P. McKean. *Wiener's theory of nonlinear noise.* Pp. 191–209 dans Stochastic Differential Equations SIAM-AMS Proc., vol. VI. AMS, Providence, 1973.

[92] T. Mikosch, S. Resnick, H. Rootzén, A. Stegeman. *Is network traffic approximated by stable Lévy motion or fractional Brownian motion.* Ann. Probab. vol. 12, no. 1, pp. 23–68, 2002.

[93] A. Müller, L. Rüschendorf. *On the optimal stopping values induced by general dependence structures.* J. Appl. Probab. vol. 38 no. 3, pp. 672–684, 2001.

[94] I. Nourdin, T. Simon. *On the absolute continuity of Lévy processes with drift.* Ann. Probab. vol. 34 no. 3, pp. 1035–1051, 2006.

[95] I. Nourdin, D. Nualart, C. A. Tudor. *Central and non-central limit theorems for weighted power variations of fractional Brownian motion.* Preprint. arXiv :0710.5639, 2007.

[96] I. Nourdin, G. Peccati. *Stein's method on Wiener chaos.* Probab. Th. Related Fields. vol. 145, no. 1-2, pp. 75–118, 2009.

[97] I. Nourdin, F. Viens. *Density formula and concentration inequalities with Malliavin calculus.* Preprint arXiv :0808.2088v2, 2008.

[98] D. Nualart, J. Vives. *Anticipative calculus for the Poisson process based on the Fock space.* Séminaire de Probabilités XXIV. Lecture Notes in Math., vol. 1426, pp. 154–165. Springer, Berlin, 1990.

[99] D. Nualart. *The Malliavin Calculus and Related Topics.* Springer-Verlag, Berlin, 2ème Ed. 2006.

[100] D. Nualart, G. Peccati. *Central limit theorems for sequences of multiple stochastic integrals.* Ann. Probab. vol. 33, no. 1, pp. 177–193, 2005.

[101] D. Nualart, S. Ortiz-Latorre. *Central limit theorems for multiple stochastic integrals and Malliavin calculus.* Stoch. Proc. Appl., vol. 118, no. 4, pp. 614–628, 2008.

[102] N. O'Connell, M. Yor. *A representation for non-colliding random walks.* Elect. Comm. Probab. vol. 7, pp. 1–12, 2002.

[103] K. R. Parthasarathy, T. Steerneman. *A tool for establishing total variation convergence.* Proc. Am. Math. Soc., vol. 95, no. 4, pp. 626–627, 1985.

[104] J. Picard. *On the existence of smooth densities for jump processes.* Probab. Theory Related Fields, vol. 105 no. 4, pp. 481–511, 1996.

[105] J. Picard. *Transformations et équations anticipantes pour les processus de Poisson.* Ann. Math. Blaise Pascal vol. 3, no.1, pp. 111–123, 1996.

[106] J. Picard. *Formules de dualité sur l'espace de Poisson.* Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Stat. vol. 32 no. 4, pp. 509–548, 1996.

[107] N. Privault. *Equivalence of gradients on configuration spaces.* Random Oper. Stoch. Equ. vol. 7 no. 3, pp. 241–262, 1999.

[108] J. Rosiński, W. A.Woyczyński. *On Itô stochastic integration with respect to stable motion : inner clock, integrability of sample paths, double and multiple integrals.* Ann. Probab., vol. 14, no. 1, pp. 271–286, 1986.

[109] J. Rosiński, G. Samorodnitsky, M. S. Taqqu. *Sample path properties of stochastic processes represented as multiple stable integrals.* J. Multivariate Anal., vol. 37, pp. 115–134, 1991.

[110] J. Rosiński. *Remarks on strong exponential integrability of vector-valued random series and triangular arrays.* Ann. Probab. vol. 23, no. 1, pp. 464–473, 1995.

[111] J. Rosiński. *Series representation of Lévy processes from the perspective of point processes.* Lévy processes, Birkhäuser Boston, Boston, MA, pp. 401–415, 2001.

[112] G. Samorodnitsky, J. Szulga. *An asymptotic evaluation of the tail of a multiple symmetric α-stable integral.* Ann. Probab., vol. 17, pp. 1503–1520, 1989.

[113] G. Samorodnitsky, M. S. Taqqu. *Multiple stable integrals of Banach-valued function.* J. Theoret. Probab., vol. 3, pp. 267–287, 1990.

[114] G. Samorodnitsky, M. S. Taqqu. *Construction of multiple stable integrals using LePage representation.* Dans *Stable processes and related topics* (G. Samorodnitsky, S. Cambanis, M. S. Taqqu, Ed.), Birkhäuser, Boston, 1991.

[115] G. Samorodnitsky, M. S. Taqqu. *Stable Non-Gaussian Random Processes.* Chapman and Hall, 1994.

[116] K. Sato. *Lévy Processes and InfinitelyDivisible Distribution.* Cambridge studies in advanced mathematics, vol. 68, 1999.

[117] I. Shigekawa. *Derivative of Wiener functionals and absolute continuity of induced measures.* J. Math. Kyoto Univ., vol. 20, pp. 263–289, 1980.

[118] V. Strassen. *The existence of probability measures with given marginals.* Ann. Math. Stat. vol. 36, pp. 423–439, 1965.

[119] D. Surgailis. *On L^2 and non-L^2 multiple stochastic integration.* Lect. Notes in Control and Info. Sci., vol. 36, pp. 212–226, 1981.

[120] D. Surgailis. *On multiple Poisson stochastic integrals and associated Markov semi-groups.* Probab. Math. Stat. vol. 3, pp. 217–239, 1984.

[121] D. Surgailis. *On the multiple stable integral.* Z. Wahrsch. verw. Gebiete, vol. 70, pp. 621–632, 1985.

[122] M. Taqqu. *Convergence of integrated processes of arbitrary Hermite rank.* Z. Wahrsch. verw. Gebiete, vol. 50, pp. 53–83, 1979.

[123] C. Tracy, H. Widom. *Level-spacing distributions and the Airy kernel.* Comm. Math. Phys., vol. 159, pp. 151–174, 1994.

[124] C. Tracy, H. Widom. *Correlation functions, Cluster functions and spacing distributions for random matrices.* J. Statist. Phys., vol. 92, no 5-6, pp. 809–835, 1998.

[125] C. Tracy, H. Widom. *On the distribution of the length of the longest monotone subsequences in random word.* Probab. Theory Relat. Fields, vol. 119, pp. 350–380, 2001.

[126] C. A. Tudor, F. Viens. *Variations and estimators for the selfsimilarity order through Malliavin calculus.* arXiv :0709.3896, 2007. À paraître dans Ann. Probab.

[127] A. S. Üstunel, M. Zakaï. *On independence and conditionning on Wiener space.* Ann. Probab., vol 17, no 4, pp. 1441–1453, 1989.

[128] T. Watanabe. *Temporal change in distributional properties of Lévy processes* Barndorff-Nielsen, Ole E. et al. (ed.), Lévy processes Theory and applications. Birkhäuser, pp. 89–107, 2001.

[129] L. Wu. *A new modified logarithmic Sobolev inequality for Poisson point processes and several applications.* Probab. Theory Relat. Fields vol. 118, no. 3, pp. 427–438, 2000.

[130] V. M. Zolotarev. *One-Dimensional Stable Distributions.* Translations of Mathematical Monographs, vol. 65. American Mathematical Society, 1986.

Résumé

Ce mémoire est une présentation de contributions à l'étude de fonctionnelles stochastiques. Ces contributions comportent à la fois des analyses théoriques des lois des fonctionnelles (régularité, inégalités de déviation, théorèmes limites), et des études de modèles motivés par les applications (mathématiques financières, modèles de boules aléatoires). Le mémoire est organisé selon trois thèmes principaux que nous décrivons brièvement.

Dans une première partie, les lois de différents types d'intégrales stochastiques (stable, Wiener-Itô, Poisson) sont étudiées. En considérant les intégrales comme des fonctionnelles sur l'espace des trajectoires de processus naturellement associés aux mesures aléatoires d'intégration, nous analysons la régularité des lois (existence de densité, convergence en variation par rapport aux fonctions intégrées).

La deuxième partie est consacrée à des inégalités sur les lois de probabilités. Les premières sont des inégalités de concentration qu'on propose pour des fonctionnelles sur l'espace de Poisson lorsque le gradient (de type différence) satisfait certaines bornes. Nos résultats sont spécialisés pour de nombreuses classes de fonctionnelles (parmi lesquelles : des vecteurs d'intégrales de Poisson, des fonctionnelles de Wiener quadratiques, des fonctionnelles stables). Les secondes sont des inégalités de comparaison convexe pour des exponentielles stochastiques ou des vecteurs à représentation prévisible. Des applications aux bornes de prix d'options financières sont également considérées.

La troisième partie regroupe différents théorèmes limites pour différentes convergences et différents objets. Des convergences en variation sont obtenues pour des processus empiriques en renforçant des principes d'invariance, et pour les variations d'Hermite du mouvement brownien fractionnaire en obtenant des résultats de type Berry-Esséen. Dans des modèles de boules aléatoires et de mots aléatoires, ce sont des fluctuations en lois de fonctionnelles d'intérêt que nous analysons.

Abstract

This dissertation is a presentation of contributions to the study of stochastic functionals. These contributions consists both in the theoretical analysis of the laws of functionals (regularity, inequalities of deviation, limit theorems) and in the study of models motivated by applications (mathematical finance, random ball models). The document is organized in three main parts that we shortly describe.

In the first part, the laws of different types of stochastic integrals (stable, Wiener-Itô, Poisson) are studied. Considering the integrals as functionals on path-space of processes associated to the random measures of integration, we analyse the regularity of the law (existence of density, convergence in variation with respect to the integrated functions).

The second part is devoted to inequalities between laws of probability. The first ones are inequalities of concentration that we propose for functionals on the Poisson space when a gradient (of difference type) satisfies certain bounds. Our results are specialized for various class of functionals (such that vectors of Poisson integrals, quadratic Wiener functionals, stable functionals). The second ones are inequalities for convex comparison for stochastic exponentials or for random vectors with a predictable representation. Applications to bounds for option prices are also considered.

The third part gathers together different limit theorems for different convergences and several objects. Convergences in variation are obtained for empirical processes and for variations of Hermite of the fractional Brownian motion. As a consequence, invariance principles are strengthened in the first case and Berry-Esséen type results are obtained in the second case. In models of random ball or of random words, we investigate the fluctuations of some interesting functionals.

AMS Classification. 60B10, 60E15, 60F05, 60F15, 60F17, 60G22, 60G52, 60H05, 60H07, 60J75