C. R. Acad. Sci. Paris, t. 331, Série I, p. 717–720, 2000
Statistique/*Statistics*
(Probabilités/*Probability Theory*)

Intégrales stables multiples : représentation, absolue continuité de leur loi

Jean-Christophe BRETON

Laboratoire de statistique et probabilités, UFR de mathématiques, M2, Université de Lille-I, 59655 Villeneuve d'Ascq cedex, France
Courriel : breton@jacta.univ-lille1.fr

(Reçu le 5 mai 2000, accepté après révision le 18 septembre 2000)

Résumé. On s'intéresse aux intégrales α-stables d-multiples, on les définit en en donnant une représentation en série de type LePage. On l'utilise pour établir l'absolue continuité de leur loi. © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Multiple stable integrals: representation, absolute continuity of their law

Abstract. *We are interested in d-multiple α-stable integrals, we define them giving a series representation of LePage type of these integrals. We use it to obtain the absolute continuity of their laws.* © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Introduction

Soit pour $0 < \alpha \leqslant 2$, M une mesure aléatoire strictement α-stable sur $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ définie sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, de mesure de contrôle λ la mesure de Lebesgue, de fonction de biais β : $[0,1] \to [-1,1]$ selon la terminologie utilisée par Samorodnitsky–Taqqu dans [10]. On note η le processus α-stable à accroissements indépendants associé à M par $\eta(t) = M([0,t])$, $t \in [0,1]$.

Les intégrales α-stables simples notées $I_1(f) = \int_{[0,1]} f \, \mathrm{d}M$ définies pour $f \in \mathrm{L}^\alpha([0,1])$ sont de lois stables bien connues. On dispose de plus de la représentation de LePage pour $0 < \alpha < 2$ qui montre la nature discrète de cette intégrale stochastique dans ce cas (*voir* [10], § 3).

On s'intéresse ici pour $0 < \alpha < 2$, $d \in \mathbb{N}^*$, aux intégrales α-stables d-multiples $I_d(f) = \int_{[0,1]^d} f \, \mathrm{d}M^d$. On les définit en donnant une représentation discrète de $I_d(f)$ pour :

$$f \in \mathrm{L}^\alpha(\log_+)^{d-1}\big([0,1]^d\big) = \big\{f : [0,1]^d \to \mathbb{R} \text{ mesurable} : \rho(f) < \infty\big\},$$
$$\rho(f) = \int_{[0,1]^d} |f|^\alpha \big(1 + \log_+ |f|\big)^{d-1} \, \mathrm{d}\lambda^d.$$

On consultera à ce sujet Samorodnitsky–Szulga [8] et Samorodnitsky–Taqqu [9]. D'autres approches de ces intégrales sont proposées : par Krakowiak–Szulga dans [6] par des inégalités de découplement, par Surgailis dans [11] par un théorème d'interpolation entre espaces de Lorentz.

Note présentée par Paul DEHEUVELS.

S0764-4442(00)01713-4/FLA

Cette représentation permet aussi de s'intéresser à leurs lois qui sont mal connues. Elle nous permet ici de prouver l'absolue continuité des lois de $I_d(f)$ en mettant en œuvre une méthode de stratification de l'espace des trajectoires du processus η associé à la mesure stable selon une stratégie utilisée par Davydov dans [4] pour des intégrales multiples de Wiener–Itô.

2. Représentation discrète des intégrales stochastiques stables

2.1. *Cas unidimensionnel.* – On introduit ici les notations utiles dans la suite en rappelant le résultat dont on dispose dans le cas des intégrales stables simples.

Soient $\{\Gamma_i\}_{i>0}$ la suite des temps d'arrivée d'un processus de Poisson standard, $\{(V_i,\gamma_i)\}_{i>0}$ une suite indépendante de $\{\Gamma_i\}_i$ de vecteurs aléatoires indépendants et identiquement distribués avec V_i uniforme sur $[0,1]$ et γ_i de loi donnée par

$$\mathbb{P}(\gamma_i=+1)=\frac{1+\beta(V_i)}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\gamma_i=-1)=\frac{1-\beta(V_i)}{2}.$$

Soit

$$F=\begin{cases} \mathrm{L}^\alpha([0,1]) & \text{pour } \alpha\neq 1;\\ \mathrm{L}^1([0,1])\cap\left\{f: \int_0^1 |f(s)\beta(s)\,\log|f(s)|\,\mathrm{d}s<\infty\right\} & \text{pour } \alpha=1.\end{cases}$$

THÉORÈME 1 (Samorodnitsky–Taqqu, [10], Theorem 3.10.1). – *On définit pour* $\alpha\in(0,2)$:

$$S_1(f)=C_\alpha^{1/\alpha}\sum_{i>0}\left(\gamma_i\,\Gamma_i^{-1/\alpha}\,f(V_i)-b_i^{(\alpha)}\int_{[0,1]}f(s)\beta(s)\,\mathrm{d}s\right)+\theta_f, \tag{1}$$

avec $C_\alpha=\left(\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x\right)^{-1}$, $\theta_f=0$ *si* $\alpha\neq 1$, $b_i^{(\alpha)}=0$ *si* $0<\alpha<1$ *et constantes qu'on trouvera sinon dans* [10], *p.* 145, 150. *On a alors pour tout* $p\in\mathbb{N}$ *et* $f_1,\dots,f_p\in F$:

$$\big(I_1(f_1),\dots,I_1(f_p)\big)\overset{\mathcal{L}}{=}\big(S_1(f_1),\dots,S_1(f_p)\big).$$

2.2. *Cas multidimensionnel.* – On propose ici une représentation du même type que (1) pour les intégrales d-multiples $I_d(f)=\int_{[0,1]^d} f\,\mathrm{d}M^d$ pour $0<\alpha<1$ ou $1\leqslant\alpha<2$ et $\beta\equiv 0$.

On commence par définir I_d sur $\mathrm{L}^\alpha(\log_+)^{d-1}([0,1]^d)$ pour les fonctions simples par linéarité avec $I_d(\mathrm{ind}_{\Delta_1\times\cdots\times\Delta_d}):=M(\mathrm{ind}_{\Delta_1})\cdots M(\mathrm{ind}_{\Delta_d})$; pour f quelconque, on définit $I_d(f)$ comme la limite en probabilité si elle existe de $I_d(f_n)$ avec f_n simple, $f_n\to f$ dans $\mathrm{L}^\alpha(\log_+)^{d-1}([0,1]^d)$.

Dans la suite, on dira qu'une série multiple converge si $\lim_{n\to\infty}\sum_{i_1\wedge\cdots\wedge i_d\leqslant n} a_{i_1,\dots,i_d}$ existe et on définira $\sum_{i_1,\dots,i_d} a_{i_1,\dots,i_d}$ par cette limite. On établit :

THÉORÈME 2. – *On suppose* $\beta\equiv 0$ *quand* $1\leqslant\alpha<2$. *Soit* $f\in\mathrm{L}^\alpha(\log_+)^{d-1}([0,1]^d)$, *alors la série*

$$S_d(f)=C_\alpha^{d/\alpha}\sum_{i_1,\dots,i_d>0}\gamma_{i_1}\cdots\gamma_{i_d}\Gamma_{i_1}^{-1/\alpha}\cdots\Gamma_{i_d}^{-1/\alpha}\,f(V_{i_1},\dots,V_{i_d}) \tag{2}$$

est $\mathbb{P}$*-presque sûrement convergente et* $I_d(f)\overset{\mathcal{L}}{=}S_d(f)$.

2.3. *Idée de la démonstration.* – Dans le cas $0<\alpha<1$, on commence par considérer la convergence absolue de la série $S_d(f)$ en utilisant $\Gamma_i\sim i$ quand $i\to\infty$ par la loi des grands nombres. On montre alors que :

$$\sum_{i_1,\dots,i_d>0}\mathbb{P}\big(\big|f(V_{i_1},\dots,V_{i_d})\big|\,(i_1\cdots i_d)^{-1/\alpha}>1\big)\leqslant C\,\rho(f)<\infty\,;$$

$$\mathbb{E}\sum_{i_1,\ldots,i_d>0}(i_1\cdots i_d)^{-1/\alpha}\big|f(V_{i_1},\ldots,V_{i_d})\big|\operatorname{ind}_{|f(V_{i_1},\ldots,V_{i_d})|(i_1\cdots i_d)^{-1/\alpha}\leqslant 1}\leqslant C'\rho(f)<\infty.$$

où C, C' sont des constantes finies.

Les mêmes outils permettent d'obtenir la continuité en probabilité de S_d en montrant que toute sous suite de $f_n\to f$ dans $\mathrm{L}^\alpha(\log_+)^{d-1}([0,1]^d)$ en admet une plus fine avec $S_d(f_p)\to S_d(f)$ p.s. On conclut ensuite facilement dans le cas des fonctions simples par linéarité avec le résultat unidimensionnel et plus généralement par continuité en probabilité de I_d et S_d.

Dans le cas $1\leqslant\alpha<2$, $\beta\equiv 0$, on n'a plus la convergence absolue de $S_d(f)$. On montre la convergence simple en utilisant une version du théorème des trois séries de Kolmogorov pour des tableaux triangulaires d'un type spécial :

PROPOSITION 1. – *Soient $(X_i)_{i>0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, $h:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ une fonction mesurable, considérons $h_{i_1,\ldots,i_d}=h(X_{i_1},\ldots,X_{i_d})$, $g_{i_1,\ldots,i_d}=h_{i_1,\ldots,i_d}\operatorname{ind}_{|h_{i_1,\ldots,i_d}|\leqslant 1}$, $\mathcal{F}^*_{i_k}=\sigma(X_i,i\neq i_k)$. On suppose :*
(i) $\sum_{i_1,\ldots,i_d>0}\mathbb{P}(|h_{i_1,\ldots,i_d}|>1)<\infty$;
(ii) $\sum_{i_1,\ldots,i_d>0}\operatorname{Var}(g_{i_1,\ldots,i_d})<\infty$;
(iii) $\mathbb{E}\big(g_{i_1,\ldots,i_d}|\mathcal{F}^*_{i_k}\big)=0$ *pour tout* $k=1,\ldots,d$.
Alors la série $\sum_{i_1,\ldots,i_d>0}h_{i_1,\ldots,i_d}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i_1\wedge\cdots\wedge i_d\leqslant n}h_{i_1,\ldots,i_d}$ converge presque sûrement.

On applique cette proposition avec $h_{i_1,\ldots,i_d}=\gamma_{i_1}\cdots\gamma_{i_d}\Gamma_{i_1}^{-1/\alpha}\cdots\Gamma_{i_d}^{-1/\alpha}f(V_{i_1},\ldots,V_{i_d})$. Le schéma de la preuve reste ensuite globalement le même.

Remarque 1. – Les résultats de représentation des intégrales stables multiples proposés dans [8,9] sont valables pour des mesures stables symétriques. Le résultat du théorème 2 traite ici pour $0<\alpha<1$ le cas d'une mesure strictement α-stable quelconque. Pour $1\leqslant\alpha<2$, β arbitraire la preuve s'adapte au cas non symétrique avec une représentation généralisée où chaque terme de (2) est remplacé par 2^d termes. Les conditions d'existence des intégrales sont analogues à celles de [8,9,11].

3. Absolue continuité des lois

3.1. *Résultat.* – La représentation (2) permet de s'intéresser à l'absolue continuité des lois des intégrales stables multiples. On est en mesure d'utiliser la méthode de stratification décrite par Davydov–Lifshits–Smorodina dans [5], § 4, et utilisée par Davydov dans [4] dans le cas d'intégrales multiples de Wiener–Itô. La mise en œuvre de la méthode est cependant, ici, sensiblement modifiée.

THÉORÈME 3. – *Sous les mêmes conditions que dans le théorème* 2, *pour f non nulle dans* $\mathrm{L}^\alpha(\log_+)^{d-1}([0,1]^d)$, $I_d(f)$ *est de loi absolument continue.*

3.2. *Idée de la démonstration.* – On considère le processus donné par $\eta_t=M([0,t])$. Sa loi P étant concentrée sur $\mathbb{D}$ l'espace de Skorokhod des fonctions *cadlag* sur $[0,1]$, on se ramène à $\mathbb{D}$ en considérant la fonctionnelle $F_d:x\mapsto\sum_{k_1,\ldots,k_d\geqslant 0}\delta_x(t_{k_1})\cdots\delta_x(t_{k_d})\,f(t_{k_1},\ldots,t_{k_d})$, où pour $x\in\mathbb{D}$, $\delta_x(t)$ désigne le saut de x en t et $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est la suite des instants de ses sauts. La représentation de LePage pour $\operatorname{ind}_{[0,t]}$ donne les sauts de η et on constate alors que pour tout $\omega\in\Omega$:

$$F_d\big(\eta_\cdot(\omega)\big)=I_d(f)(\omega).$$

On observe alors que F_d est une autre représentation de $I_d(f)$ en tant que fonctionnelle sur $\mathbb{D}$. En particulier, $I_d(f)$ est de loi $\mathbb{P}I_d(f)^{-1}=PF_d^{-1}$. On se ramène à l'étude de F_d sur $\mathbb{D}$.

On commence par chercher une suite d'approximations $X_\varepsilon\subset X=\mathbb{D}$, $P(X\setminus X_\varepsilon)\leqslant\varepsilon$ pour laquelle on prouvera $P_{X_\varepsilon}F_d^{-1}\ll\lambda$ pour tout $\varepsilon>0$. Pour cela, considérons t^0 un point de Lebesgue de l'ensemble $A_f=\{t\in\mathbb{R}^d,\ f(t)\neq 0\}$, on peut choisir t^0 avec ses coordonnées toutes distinctes. Pour $\varepsilon>0$ fixé, considérons $V_\varepsilon = U_1^\varepsilon \times \cdots \times U_d^\varepsilon$ un pavé voisinage de t^0 avec $U_i^\varepsilon \cap U_j^\varepsilon = \varnothing$ pour tout $i \neq j$ et $\lambda^d(V_\varepsilon \cap A_f)/\lambda^d(V_\varepsilon) \geqslant 1 - \varepsilon$. On considère alors X_ε l'ensemble des $x \in X$ qui ont un saut de module maximal unique sur chaque U_i^ε en t_i avec $(t_1, \ldots, t_d) \in A_f$. On montre alors en étudiant la loi des dates des sauts maximaux sur U_i^ε que $P(X \setminus X_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$.

Par séparabilité, il suffit d'étudier le problème localement en montrant que tout $x \in X_\varepsilon$ admet un voisinage $V(x)$ pour lequel $P_{V(x)} F_d^{-1} \ll \lambda$.

On considère pour cela une famille de transformations de $X = \mathbb{D}$ qui induit une partition Γ de X pour laquelle P admet une famille de mesures conditionnelles $\{P_\gamma,\ \gamma \in X/\Gamma\}$ concentrées sur les orbites (unidimensionnelles) de Γ avec $P_\gamma \ll \lambda_\gamma$, mesure de Lebesgue sur l'orbite (*voir* Davydov, Lifshits [3], Theorem 9.2, [7]). En notant P_Γ la mesure quotient, $P_{\gamma,V(x)}$ la restriction de P_γ à $V(x)$, on a $P_{V(x)} F_d^{-1} = \int_{X/\Gamma} P_{\gamma,V(x)} F_d^{-1} P_\Gamma(d\gamma)$. Il suffit alors de voir $P_{\gamma,V(x)} F_d^{-1} \ll \lambda$ pour P_Γ-presque chaque $\gamma \in \Gamma$.

Comme $P_\gamma \ll \lambda_\gamma$, on le voit en étudiant les restrictions de F_d aux traces d'orbites sur $V(x)$. Il s'agit de polynômes dont les coefficients dominants sont non nuls, en effet de l'expression de F_d, on déduit que les coefficients dominants s'expriment en fonction des sauts sur chaque U_i^ε et de leur instant. On choisit le voisinage $V(x)$ pour que seuls les sauts maximaux comptent, ils sont proches et en des instants proches ; on constate finalement que les coefficients sont non nuls car le vecteur des instants des sauts maximaux dans $U_1^\varepsilon, \ldots, U_d^\varepsilon$ est dans A_f.

Les polynômes $F_{d,\gamma}$ restrictions de F_d aux traces d'orbites étant non dégénérés, on obtient $P_{\gamma,V(x)} F_d^{-1} \ll \lambda$, ce qui mène à l'absolue continuité de $P_{X_\varepsilon} F_d^{-1}$ pour tout $\varepsilon > 0$ donc à celle de $P F_d^{-1} = \mathbb{P}I(f)^{-1}$.

Remarque 2. – Dans le cas non symétrique $1 \leqslant \alpha < 2$, $\beta \neq 0$, la même technique s'applique à la représentation généralisée signalée dans la remarque 1. En définissant F_d de façon appropriée par rapport à la nouvelle représentation, on se ramène à un polynôme de même coefficient dominant.

Remerciements. Je tiens à remercier Donatas Surgailis et Youri Davydov ainsi que les rapporteurs anonymes qui par leurs remarques ont contribué à l'amélioration de la rédaction de cette Note.

Références bibliographiques

[1] Breton J.-C., Représentation discrète des intégrales stochastiques stables multiples, Pub. IRMA Lille 52 (VII) (2000).
[2] Breton J.-C., Absolue continuité des lois des intégrales stochastiques stables multiples, Pub. IRMA Lille 52 (VIII) (2000).
[3] Davydov Y.A., Lifshits M.A., Stratification method in some probability problems, J. Soviet. Math. 31 (2) (1985) 2796–2858.
[4] Davydov Y.A., On distributions of multiple Wiener–Itô integrals, Theory Probab. Appl. 35 (1) (1991) 27–37.
[5] Davydov Y.A., Lifshits M.A., Smorodina N.V., Local properties of distributions of stochastic functionals, Amer. Math. Soc. (1998).
[6] Krakowiak W., Szulga J., A multiple stochastic integral wih respect to a strictly p-stable random measure, Ann. Probab. 16 (2) (1988) 764–777.
[7] Lifshits M.A., An application of the stratification method to the study of functionals of processes with independent increments, Theory Probab. Appl. 29 (4) (1985) 753–765.
[8] Samorodnitsky G., Szulga J., An asymptotic evaluation of the tail of a multiple symmetric α-stable integral, Ann. Probab. 17 (4) (1989) 1503–1520.
[9] Samorodnitsky G., Taqqu M.S., Multiple stable integrals of Banach-valued functions, J. Theor. Probab. 3 (2) (1990) 267–287.
[10] Samorodnitsky G., Taqqu M.S., Stable Non-Gaussian Random Processes, Chapman and Hall, 1994.
[11] Surgailis D., On the multiple stable integral, Z. Whar. Verw. Geb. 70 (1985) 621–632.