Université de Rennes

Calcul stochastique

M2 Mathématiques

Jean-Christophe Breton

Université de Rennes

Novembre–Décembre 2021

Version du 31 octobre 2024

Table des matières

Introduction

Ces notes de cours sont en deux parties : [JCB-proc] et [JCB-stoch].

La partie [JCB-proc] correspond aux chapitres 1–6. Elle a pour but de présenter la notion de **processus stochastique**, en particulier ceux à trajectoires continues, avec un focus important sur le mouvement brownien qui est le processus stochastique emblématique. Les notions de martingales, martingales locales et semi-martingales sont présentées afin de construire l'intégration stochastique.

La partie [JCB-stoch] correspond aux chapitres 7–12. Elle introduit au **calcul stochastique** et à ses outils fondamentaux.

Ces notes sont principalement destinées aux étudiants du Master 2 Mathématiques et applications de l'Université de Rennes. Elles ont plusieurs sources d'inspiration, dont principalement [LG1] mais aussi les notes de cours [Gué], [EGK], [Mal]. Par ailleurs, des références standards conseillées sur le sujet sont les livres [KS], [RY] (en anglais) et [Gal], [CM] (en français).

Le contenu de ces notes est le suivant :

On commence par quelques rappels gaussiens en introduction. La notion générale de processus stochastique est présentée au Chapitre 1. Le Chapitre 2 introduit la classe des processus gaussiens. Ces chapitres s'inspirent de [Dav] et des références classiques sont [Bil2], [Kal].

Au Chapitre 3, on présente le mouvement brownien, processus stochastique central, dont on discute de nombreuses propriétés (en loi, trajectorielles).

Au Chapitre 4, on introduit la notion de martingale en temps continu. On y revisite les principales propriétés connues dans le cas des martingales discrètes : inégalités de martingales, théorème d'arrêt et on discute en plus de régulatisation des trajectoires de martingales, à indistinguabilité près.

La notion de semimartingale, essentielle dans la théorie de l'intégration stochastique, est présentée au Chapitre 5. Pour cela, on discute des deux parties qui forment une semimartingale : les processus à variation bornée et la notion d'intégrale de Stieltjes d'une part, et la notion de martingale locale, et de son outil caractéritique qu'est le crochet d'autre part.

Le Chapitre 6 est consacré à la construction des intégrales stochastiques et à ses principales propriétés.

Dans le Chapitre 7, on présente la formule d'Itô, ce résultat est essentiel et constitue le point de départ du calcul stochastique qui est la suite naturelle du cours et pour laquelle on renvoie à [JCB-stoch]. Dans le Chapitre 9, on présente la notion d'équation différentielle stochastique (EDS) à laquelle on donne un sens grâce à l'intégration stochastique. Le calcul stochastique et la formule d'Itô en particulier permettent de créer des liens féconds entre processus stochastiques et équations différentielles partielles (EDP). Ils sont illustrés dans le Chapitre 10 par les liens entre mouvement brownien et équation de la chaleur.

On s'intéresse ensuite aux processus de diffusion, qui sont des solutions d'EDS particulières, on les introduit dans le Chapitre 11. Le Chapitre 12 présente la notion de problème de martingales qui permet de donner des solutions faibles d'EDS.
Les prérequis de ce cours sont des probabilités de base (des fondements des probabilités aux conséquences de la LGN et du TCL – niveau L3) pour lesquelles on pourra consulter [JCB-proba], les martingales en temps discret (niveau M1), voir [JCB-discret].

Quatrième partie

Calcul stochastique

Chapitre 7

Formule d'Itô et conséquences

Dans ce chapitre, on prouve la formule d'Itô, véritable clef de voûte du calcul stochastique. Celle-ci montre que lorsqu'on applique une application C^2 à une semimartingale, on conserve une semimartingale ; elle en donne en plus la décomposition (martingale locale + processus à variation bornée). La formule d'Itô est prouvée en Section 7.1. Des conséquences importantes en sont présentées dans les sections suivantes : théorème de Lévy (caractérisation du mouvement brownien par son crochet, Section 7.3), théorème de Dubins-Schwarz (Section 7.4), inégalités de Burkholder-Davis-Gundy (BDG, Section 7.5), théorème de représentation des martingales (Section 7.6), formule de Tanaka (Section 7.7).

7.1 Formule d'Itô

La formule d'Itô est l'outil de base du calcul stochastique : elle montre qu'une fonction de classe C^2 de p semimartingales à trajectoires continues est encore une semimartingale à trajectoires continues, et elle exprime explicitement la décomposition de cette semimartingale.

Pour commence, on rappelle la formule de changement de variable classique : lorsque F, g sont des fonctions de classe C^1 alors $(F \circ g)'(t) = F'(g(t))\ g'(t)$ s'écrit

$$F(g(t)) = F(g(0)) + \int_0^t F'(g(s))g'(s)\,ds.$$

Lorsque F est une fonction C^1 et g est une fonction continue, à variation bornée (cf. Prop. 5.10-6) en Section 5.1.1) alors on a encore avec l'intégrale de Stieltjes (Section 5.1.2) :

$$F(g(t)) = F(g(0)) + \int_0^t F'(g(s))\,dg(s).$$

La même formule reste vraie pour un processus X à trajectoires continues et à variation bornée en faisant un calcul trajectoriel (pour chaque ω fixé, la trajectoire $t \mapsto X_t(\omega)$ est à

variation bornée et le cas précédent s'applique) : pour F une fonction de classe C^1, on a alors
$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s)\,dX_s.$$
La formule d'Itô généralise cette propriété pour des semimartingales à trajectoires continues lorsque F est C^2 ; la formule fait alors apparaître un terme supplémentaire dû au fait que ces processus ne sont pas à variation bornée, cf. (7.1) ci-dessous.

Théorème 7.1 (Formule d'Itô) *Soit X une semimartingale à trajectoires continues et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Alors presque sûrement pour tout $t \geq 0$, on a :*
$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s)\,dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''(X_s)\,d\langle X, X\rangle_s. \tag{7.1}$$
Lorsqu'on considère p semimartingales à trajectoires continues $X^{(1)}, \dots, X^{(p)}$ et $F : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ de classe C^2, alors presque sûrement pour tout $t \geq 0$, on a :
$$\begin{aligned} F(X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(p)}) &= F(X_0^{(1)}, \dots, X_0^{(p)}) + \sum_{i=1}^p \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_s^{(1)}, \dots, X_s^{(p)})\,dX_s^{(i)} \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^p \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(X_s^{(1)}, \dots, X_s^{(p)})\,d\langle X^{(i)}, X^{(j)}\rangle_s. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Remarque 7.2 — Pour une semimartingale à trajectoires continues X de décomposition $X = X_0 + M + A$ et $F \in C^2$, $(F(X_t))_{t\geq 0}$ est une semimartingale de décomposition
$$\begin{aligned} F(X_t) &= F(X_0) + \int_0^t F'(X_s)\,dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''(X_s)\,d\langle X, X\rangle_s \\ &= F(X_0) + \underbrace{\int_0^t F'(X_s)\,dM_s}_{\text{partie martingale locale}} + \underbrace{\int_0^t F'(X_s)\,dA_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''(X_s)\,d\langle X, X\rangle_s}_{\text{partie variation bornée}}. \end{aligned}$$

— Pour une martingale locale M à trajectoires continues et $F(x) = x^2$, la formule d'Itô (7.1) se lit
$$M_t^2 = M_0^2 + 2\int_0^t M_s\,dM_s + \langle M, M\rangle_t$$
soit
$$M_t^2 - \langle M, M\rangle_t = M_0^2 + 2\int_0^t M_s\,dM_s$$
ce qui identifie la martingale locale qui définit le crochet en (5.11). On aurait pu faire directement cette observation dans la démonstration du Th. 5.31 donnée en Section 5.2 puisqu'une lecture attentive de la démonstration indique que la construction de $\langle M, M\rangle_t$ fait intervenir $\sum_{i=0}^{p_n} M_{t_i^n}(M_{t_{i+1}^n} - M_{t_i^n})$ qui sont des approximations de Riemann de l'intégrale stochastique $\int_0^t M_s\,dM_s$.

— En prenant $X_t^{(1)} = t$ et $X_t^{(2)} = X_t$, on a aussi pour toute fonction F de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$

$$F(t, X_t) = F(0, X_0) + \underbrace{\int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s, X_s)\, dX_s}_{\text{martingale locale}} + \underbrace{\int_0^t \frac{\partial F}{\partial t}(s, X_s)\, ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s, X_s)\, d\langle X, X\rangle_s}_{\text{variation bornée}}. \quad (7.3)$$

En fait, il suffit de prendre $F \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, ie. F est C^1 en $t \in \mathbb{R}_+$ et C^2 en $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration : On traite d'abord le cas (7.1) c'est à dire $p = 1$. On fixe $t \geq 0$ et on considère une suite $\{0 = t_0^n < \cdots < t_{p_n}^n = t\}_{n \geq 1}$ de subdivisions emboîtées de $[0, t]$ de pas tendant vers 0. Alors en télescopant la somme, on a :

$$F(X_t) = F(X_0) + \sum_{i=0}^{p_n - 1} \big(F(X_{t_{i+1}^n}) - F(X_{t_i^n})\big).$$

La formule de Taylor (Lagrange) à l'ordre 2 sur l'intervalle (non ordonné) $(X_{t_i^n}, X_{t_{i+1}^n})$ donne pour chaque $\omega \in \Omega$:

$$F(X_{t_{i+1}^n}) - F(X_{t_i^n}) = F'(X_{t_i^n})(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}) + \frac{f_{n,i}(\omega)}{2}(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2$$

où

$$f_{n,i} \in \left[\inf_{\theta \in [0,1]} F''\big(X_{t_i^n} + \theta(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})\big), \sup_{\theta \in [0,1]} F''\big(X_{t_i^n} + \theta(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})\big)\right].$$

Noter qu'avec la formule de Taylor à reste intégral, on a

$$\frac{f_{n,i}(\omega)}{2}(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2 = \frac{(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2}{2} \int_0^1 (1-u) F''\big(X_{t_i^n} + u(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})\big)\, du$$

et donc

$$f_{n,i}(\omega) = \int_0^1 (1-u) F''\big(X_{t_i^n} + u(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})\big)\, du$$

est bien mesurable (ce qui n'est pas directement clair par Taylor-Lagrange). D'après 6) dans la Proposition 6.20 (approximation de Riemann des intégrales stochastiques) avec $H_s = F'(X_s)$, on a, dans le sens de la convergence en probabilité :

$$\sum_{i=0}^{p_n - 1} F'(X_{t_i^n})(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{P}} \int_0^t F'(X_s)\, dX_s.$$

Pour prouver la formule d'Itô (7.1), il reste à établir la convergence en probabilité :

$$\sum_{i=0}^{p_n - 1} f_{n,i}(\omega)(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{P}} \int_0^t F''(X_s)\, d\langle X, X\rangle_s, \quad (7.4)$$

car alors, par unicité presque sûre de la limite en probabilité, on aura pour tout $t \geq 0$:

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''(X_s)\, d\langle X, X\rangle_s \quad \text{ps.}$$

Les deux termes de l'égalité ci-dessus étant continus en t, les deux processus seront en fait indistinguables, ce qui assurera (7.1).

Il reste donc à établir (7.4) ; pour cela, on note pour $n < m$:

$$T_m = \sum_{j=0}^{p_m-1} f_{m,j}(\omega)(X_{t_{j+1}^m} - X_{t_j^m})^2$$

$$T_{n,m} = \sum_{i=0}^{p_n-1} f_{n,i}(\omega) \sum_{\{j:t_i^n \leq t_j^m < t_{i+1}^n\}} (X_{t_{j+1}^m} - X_{t_j^m})^2.$$

Comme $\sum_{j=0}^{p_m-1} = \sum_{i=0}^{p_n-1} \sum_{\{j:t_i^n \leq t_j^m < t_{i+1}^n\}}$ (subdivisions emboîtées), on a

$$T_m = \sum_{i=0}^{p_n-1} \sum_{\{j:t_i^n \leq t_j^m < t_{i+1}^n\}} f_{m,j}(\omega)(X_{t_{j+1}^m} - X_{t_j^m})^2$$

et on peut écrire

$$\begin{aligned}
&|T_m - T_{n,m}| \\
&= \left| \sum_{i=0}^{p_n-1} \sum_{\{i:t_i^n \leq t_j^m < t_{i+1}^n\}} f_{m,j}(\omega)(X_{t_{j+1}^m} - X_{t_j^m})^2 - \sum_{i=0}^{p_n-1} \sum_{\{j:t_i^n \leq t_j^m < t_{i+1}^n\}} f_{n,i}(\omega)(X_{t_{j+1}^m} - X_{t_j^m})^2 \right| \\
&= \left| \sum_{i=0}^{p_n-1} \sum_{\{j:t_i^n \leq t_j^m < t_{i+1}^n\}} \big(f_{m,j}(\omega) - f_{n,i}(\omega)\big)(X_{t_{j+1}^m} - X_{t_j^m})^2 \right| \\
&\leq Z_{n,m} \sum_{i=0}^{p_n-1} \sum_{\{j:t_i^n \leq t_j^m < t_{i+1}^n\}} (X_{t_{j+1}^m} - X_{t_j^m})^2 = Z_{n,m} \sum_{j=0}^{p_m-1} (X_{t_{j+1}^m} - X_{t_j^m})^2
\end{aligned}$$

avec

$$Z_{n,m} = \sup_{0 \leq i \leq p_n-1} \left(\sup_{\{j:t_i^n \leq t_j^m < t_{i+1}^n\}} |f_{m,j} - f_{n,i}| \right).$$

Comme F'' est continue, $s \in [0, t] \mapsto F''(X_s)$ est uniformément continue (théorème de Heine) et cela assure que $Z_{n,m} \xrightarrow[n,m \to +\infty]{ps} 0$. D'après la Proposition 5.47 (interprétation variation quadratique du crochet), on a

$$\sum_{j=0}^{p_m-1} (X_{t_{j+1}^m} - X_{t_j^m})^2 \xrightarrow[m \to +\infty]{\mathbb{P}} \langle X, X\rangle_t.$$

Et donc pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $N_1 \geq 1$ tel que pour tout $m > n \geq N_1$,

$$\mathbb{P}\big(|T_m - T_{n,m}| \geq \varepsilon/3 \big) \leq \mathbb{P}\left(Z_{n,m} \sum_{j=0}^{p_m-1} (X_{t_{j+1}^m} - X_{t_j^m})^2 \geq \varepsilon/3 \right) \leq \varepsilon/3. \tag{7.5}$$

(Comme $Z_{n,m} \xrightarrow[n,m\to+\infty]{\mathbb{P}} 0$ et $\sum_{j=0}^{p_m-1}(X_{t_{j+1}^m} - X_{t_j^m})^2 \xrightarrow[m\to+\infty]{\mathbb{P}} \langle X, X\rangle_t$, le lemme de Slutsky assure $Z_{n,m} \sum_{j=0}^{p_m-1}(X_{t_{j+1}^m} - X_{t_j^m})^2 \xrightarrow[n,m\to+\infty]{\mathbb{P}} 0$.)

Ensuite, comme les $(t_j^m)_{j:t_i^n \leq t_j^m \leq t_{i+1}^n}$ forment une subdivision de $[t_i^n, t_{i+1}^n]$, la Proposition 5.47 montre qu'on a aussi, en probabilité :

$$\sum_{\{j:t_i^n \leq t_j^m < t_{n+1}^n\}} (X_{t_{j+1}^m} - X_{t_j^m})^2 \xrightarrow[m\to+\infty]{\mathbb{P}} \langle X, X\rangle_{t_{i+1}^n} - \langle X, X\rangle_{t_i^n}$$

soit

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\text{-}\lim_{m\to+\infty} T_{n,m} &= \mathbb{P}\text{-}\lim_{m\to+\infty} \sum_{i=0}^{p_n-1} f_{n,i} \sum_{\{j:t_i^n \leq t_j^m < t_{n+1}^n\}} (X_{t_{j+1}^m} - X_{t_j^m})^2 \\
&= \sum_{i=0}^{p_n-1} f_{n,i} \left(\langle X, X\rangle_{t_{i+1}^n} - \langle X, X\rangle_{t_i^n} \right) \\
&= \int_0^t h_n(s)\, d\langle X, X\rangle_s,
\end{aligned}$$

où on a noté $h_n = \sum_{i=0}^{p_n-1} f_{n,i} \mathbf{1}_{[t_i^n, t_{i+1}^n[}$. Ainsi pour chaque $n \geq 1$, il existe $N_2(n) \geq 1$ tel que pour $m \geq N_2(n)$:

$$\mathbb{P}\left(\left| T_{n,m} - \int_0^t h_n(s)\, d\langle X, X\rangle_s \right| \geq \varepsilon/3 \right) \leq \varepsilon/3. \tag{7.6}$$

Puis comme F est C^2, on a $\lim_{n\to+\infty} h_n(s) = F''(X_s)$ ps. De plus, pour tout $s \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$, on a :

$$\big| h_n(s) - F''(X_s) \big| = \big| f_{n,i} - \lim_{m\to+\infty} f_{m,j(m)} \big| = \lim_{m\to+\infty} \big| f_{n,i} - f_{m,j(m)} \big| \leq \lim_{m\to+\infty} Z_{n,m},$$

et donc

$$\sup_{s\in[0,t]} |h_n(s) - F''(X_s)| \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0,$$

puis

$$\left| \int_0^t h_n(s)\, d\langle X, X\rangle_s - \int_0^t F''(X_s)\, d\langle X, X\rangle_s \right|$$

$$\leq \Big(\sup_{s\in[0,t]} |h_n(s) - F''(X_s)|\Big)\langle X, X\rangle_t \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

Il existe donc aussi $N_3 \geq 1$ tel que pour $n \geq N_3$

$$\mathbb{P}\left(\left|\int_0^t h_n(s)\, d\langle X, X\rangle_s - \int_0^t F''(X_s)\, d\langle X, X\rangle_s\right| \geq \varepsilon/3\right) \leq \varepsilon/3. \tag{7.7}$$

Comme

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=0}^{p_m-1} f_{m,j}(X_{t^m_{j+1}} - X_{t^m_j})^2 - \int_0^t F''(X_s)\, d\langle X, X\rangle_s\right| &\leq |T_m - T_{n,m}| \\ + \left|T_{n,m} - \int_0^t h_n(s)\, d\langle X, X\rangle_s\right| + \left|\int_0^t h_n(s)\, d\langle X, X\rangle_s - \int_0^t F''(X_s)\, d\langle X, X\rangle_s\right|&,\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}&\{|T_m - T_{n,m}| < \varepsilon/3\} \\ &\qquad \cap \left\{\left|T_{n,m} - \int_0^t h_n(s)\, d\langle X, X\rangle_s\right| < \varepsilon/3\right\} \\ &\qquad \cap \left\{\left|\int_0^t h_n(s)\, d\langle X, X\rangle_s - \int_0^t F''(X_s)\, d\langle X, X\rangle_s\right| < \varepsilon/3\right\} \\ &\quad \subset \left\{\left|\sum_{j=0}^{p_m-1} f_{m,j}(X_{t^m_{j+1}} - X_{t^m_j})^2 - \int_0^t F''(X_s)\, d\langle X, X\rangle_s\right| < \varepsilon\right\},\end{aligned}$$

et en passant au complémentaire :

$$\begin{aligned}&\left\{\left|\sum_{j=0}^{p_m-1} f_{m,j}(X_{t^m_{j+1}} - X_{t^m_j})^2 - \int_0^t F''(X_s)\, d\langle X, X\rangle_s\right| \geq \varepsilon\right\} \\ &\quad \subset \{|T_m - T_{n,m}| \geq \varepsilon/3\} \\ &\qquad \cup \left\{\left|T_{n,m} - \int_0^t h_n(s)\, d\langle X, X\rangle_s\right| \geq \varepsilon/3\right\} \\ &\qquad \cup \left\{\left|\int_0^t h_n(s)\, d\langle X, X\rangle_s - \int_0^t F''(X_s)\, d\langle X, X\rangle_s\right| \geq \varepsilon/3\right\}.\end{aligned}$$

En prenant les probabilités, et en combinant (7.5), (7.6), (7.7), avec $n > \max(N_1, N_3)$ et $m > N_2(n)$, on a :

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(\left|\sum_{j=0}^{p_m-1} f_{m,j}(X_{t^m_{j+1}} - X_{t^m_j})^2 - \int_0^t F''(X_s)\, d\langle X, X\rangle_s\right| \geq \varepsilon\right) \\ &\quad \leq \mathbb{P}(|T_m - T_{n,m}| \geq \varepsilon/3) + \mathbb{P}\left(\left|T_{n,m} - \int_0^t h_n(s)\, d\langle X, X\rangle_s\right| \geq \varepsilon/3\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\mathbb{P}\left(\left|\int_0^t h_n(s)\,d\langle X,X\rangle_s - \int_0^t F''(X_s)\,d\langle X,X\rangle_s\right| \geq \varepsilon/3\right)\\
\leq\ &\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,
\end{aligned}
$$

ce qui prouve (7.4) puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire. Finalement, la formule d'Itô (7.1) est prouvée pour $p = 1$.

Dans le cas où p est quelconque, la formule de Taylor toujours à l'ordre 2 donne

$$
\begin{aligned}
&F\big(X^{(1)}_{t^n_{i+1}},\dots,X^{(p)}_{t^n_{i+1}}\big) - F\big(X^{(1)}_{t^i_n},\dots,X^{(p)}_{t^n_i}\big)\\
&=\sum_{k=1}^p \frac{\partial F}{\partial x_k}\big(X^{(1)}_{t^n_i},\dots,X^{(p)}_{t^n_i}\big)\big(X^{(k)}_{t^n_{i+1}}-X^{(k)}_{t^n_i}\big)+\sum_{k,l=1}^p \frac{f^{k,l}_{n,i}}{2}\big(X^{(k)}_{t^n_{i+1}}-X^{(k)}_{t^n_i}\big)\big(X^{(l)}_{t^n_{i+1}}-X^{(l)}_{t^n_i}\big)
\end{aligned}
$$

avec

$$
f^{k,l}_{n,i} \in \left[\inf_{\theta\in[0,1]} \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_l}\big(X^{(1)}_{t^n_i}+\theta(X^{(1)}_{t^n_{i+1}}-X^{(1)}_{t^n_i}),\dots\big),\ \sup_{\theta\in[0,1]} \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_l}\big(X^{(1)}_{t^n_i}+\theta(X^{(1)}_{t^i_{i+1}}-X^{(1)}_{t^n_i}),\dots\big)\right].
$$

Le 6) dans la Proposition 6.20 donne à nouveau la limite cherchée pour les termes faisant intervenir les dérivées premières :

$$
\sum_{i=1}^{p_n-1} \frac{\partial F}{\partial x_k}\big(X^{(1)}_{t^n_i},\dots,X^{(p)}_{t^n_i}\big)\big(X^{(k)}_{t^n_{i+1}}-X^{(k)}_{t^n_i}\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} \sum_{k=1}^p \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_k}\big(X^{(1)}_s,\dots,X^{(p)}_s\big)\,dX^{(k)}_s.
$$

En adaptant légèrement les arguments du cas $p = 1$, on montre que pour tous $k, l \in [\![1, p]\!]$:

$$
\sum_{i=0}^{p_n-1} f^{k,l}_{n,i}\big(X^{(k)}_{t^n_{i+1}}-X^{(k)}_{t^n_i}\big)\big(X^{(l)}_{t^n_{i+1}}-X^{(l)}_{t^n_i}\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_l}\big(X^{(1)}_s,\dots,X^{(p)}_s\big)\,d\langle X^{(k)},X^{(l)}\rangle_s.
$$

Cela achève la preuve de la formule d'Itô dans le cas général (7.2). □

Un cas particulier important de la formule d'Itô est la formule d'intégration par parties.

Corollaire 7.3 (IPP) *Soit X et Y sont deux semimartingales à trajectoires continues. Alors on a :*

$$
X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s\,dY_s + \int_0^t Y_s\,dX_s + \langle X,Y\rangle_t. \tag{7.8}
$$

Le terme $\langle X, Y\rangle$ est nul si X ou Y est à variation bornée. Il est présent quand on considère de (vraies) semimartingales et ce terme supplémentaire témoigne de la différence entre le calcul stochastique et le calcul différentiel déterministe.

Démonstration : Appliquer la formule d'Itô à $F(x,y)=xy$ qui est bien de classe C^2 en x,y et noter que

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=y, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=x\\
&\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x,y)=1, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y)=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y)=0.
\end{aligned}$$

□

En particulier, si $Y=X$ on obtient

$$X_t^2 = X_0^2 + 2\int_0^t X_s\,dX_s + \langle X,X\rangle_t.$$

7.2 Premières applications de la formule d'Itô

Formule d'Itô pour le mouvement brownien

Pour un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien B, la formule d'Itô s'écrit

$$F(B_t) = F(B_0) + \int_0^t F'(B_s)\,dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''(B_s)\,ds.$$

En prenant $X_t^{(1)}=t$ et $X_t^{(2)}=B_t$, (7.3) devient : pour toute fonction F de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
F(t,B_t) &= F(0,B_0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial t}(X_s^{(1)},X_s^{(2)})dX_s^{(1)} + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(X_s^{(1)},X_s^{(2)})\,dX_s^{(2)}\\
&\quad +\frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(X_s^{(1)},X_s^{(2)})\,d\langle X^{(2)},X^{(2)}\rangle_s\\
&= F(0,B_0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s,B_s)\,dB_s + \int_0^t \left(\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)(s,B_s)\,ds.
\end{aligned}$$

puisque avec $X_t^{(1)}=t$, $X_t^{(2)}=B_t$, $\langle X^{(2)},X^{(2)}\rangle_t=t$, $\langle X^{(1)},X^{(i)}\rangle_s=0$ pour $i\in\{1,2\}$.

Si $B_t=(B_t^{(1)},\dots,B_t^{(p)})$ est un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien en dimension p alors les $B^{(i)}$ sont des mouvements browniens indépendants. On a vu au chapitre précédent que dans ce cas $\langle B^{(i)},B^{(j)}\rangle=0$ lorsque $i\neq j$ et $d\langle B^{(i)},B^{(i)}\rangle_s=ds$. La formule d'Itô montre alors que, pour toute fonction F de classe C^2 sur $\mathbb{R}^p$,

$$F(B_t^1,\dots,B_t^p) = F(B_0^{(1)},\dots,B_0^{(p)}) + \sum_{i=1}^p \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(B_s^{(1)},\dots,B_s^{(p)})\,dB_s^{(i)}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le p}\int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}(B_s^{(1)},\dots,B_s^{(p)})\,d\langle B^{(i)},B^{(j)}\rangle_s\\
= \;& F(B_0^{(1)},\dots,B_0^{(p)})+\sum_{i=1}^p\int_0^t\frac{\partial F}{\partial x_i}(B_s^{(1)},\dots,B_s^{(p)})\;dB_s^{(i)}\\
&+\frac{1}{2}\int_0^t \Delta F(B_s^{(1)},\dots,B_s^{(p)})\,ds \qquad (7.9)
\end{aligned}
$$

où $\Delta F=\sum_{i=1}^p\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}$ est le laplacien de F. On a aussi une formule analogue pour $F(t,B_t^{(1)},\dots,B_t^{(p)})$.

$$
\begin{aligned}
F(t,B_t^{(1)},\dots,B_t^{(p)}) \;=\;& F(0,B_0^{(1)},\dots,B_0^{(p)})+\sum_{i=1}^p\int_0^t\frac{\partial F}{\partial x_i}(s,B_s^{(1)},\dots,B_s^{(p)})\,dB_s^{(i)}\\
&+\int_0^t\Big(\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{1}{2}\Delta F\Big)(s,B_s)\,ds.
\end{aligned}
$$

En particulier si F est harmonique (ie. $\Delta F=0$) alors $F(B_t^{(1)},\dots,B_t^{(p)})$ est une martingale locale.

Exponentielles stochastiques

On définit maintenant l'exponentielle stochastique $\mathcal{E}(M)$ d'une martingale locale M quelconque. Pour commencer, on dit qu'un processus à valeurs dans $\mathbb{C}$ est une martingale locale si ses parties réelle et imaginaire en sont.

Définition 7.4 (Exponentielle stochastique) *On appelle exponentielle stochastique d'une martingale locale complexe M, à trajectoires continues, le processus*

$$\mathcal{E}(M)_t := \exp\left(M_t-\frac{1}{2}\langle M,M\rangle_t\right),\quad t\ge 0. \tag{7.10}$$

La formule d'Itô justifie qu'il s'agit d'une martingale locale (Prop. 7.5) et explique la terminologie, cf. la Remarque 7.6 ci-dessous.

Proposition 7.5 *L'exponentielle stochastique $\mathcal{E}(M)=(\mathcal{E}(M))_{t\ge0}$ d'une martingale locale complexe M, à trajectoires continues, est encore une martingale locale à trajectoires continues.*

Démonstration : Si $F(x,r)$ est une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, la formule d'Itô assure

$$
\begin{aligned}
F\big(M_t,\langle M,M\rangle_t\big) \;=\;& F(M_0,0)+\int_0^t\frac{\partial F}{\partial x}\big(M_s,\langle M,M\rangle_s\big)\,dM_s\\
&+\int_0^t\left(\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)\big(M_s,\langle M,M\rangle_s\big)\,d\langle M,M\rangle_s.
\end{aligned}
$$

Le processus $F\big(M_t,\langle M,M\rangle_t\big)$ est une martingale locale dès que sa partie à variation bornée s'annule, ie. lorsque F vérifie la condition :

$$\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=0.$$

La preuve s'achève en observant que cette condition est satisfaite par la fonction $F(x,r)=\exp\big(x-\frac{1^2}{2}r\big)$ (plus précisément par les parties réelle et imaginaire de cette fonction). $\square$

Remarque 7.6 (Exponentielle stochastique) Avec $F(x,r)=\exp\big(x-r/2\big)$, on a $\frac{\partial F}{\partial x}(x,r)=F(x,r)$, si bien que l'identité

$$F\big(M_t,\langle M,M\rangle_t\big)=F(M_0,0)+\int_0^t\frac{\partial F}{\partial x}\big(M_s,\langle M,M\rangle_s\big)\,dM_s$$

s'écrit

$$\mathcal{E}(M)_t=\mathcal{E}(M)_0+\int_0^t\mathcal{E}(M)_s\,dM_s \tag{7.11}$$

ou en écriture symbolique d'EDS (cf. Chapitre 9) : $d\mathcal{E}(M)=\mathcal{E}(M)dM$, ce qui généralise l'équation $dy=y\,dx$ de solution $y(x)=e^x$ avec la condition $y(0)=1$ ou l'équation $dy_t=y_t\,dg_t$ de solution $y_t=\exp(g_t)$ lorsque g est à variation bornée nulle en 0 et avec la condition initiale $y_0=1$. Cette propriété justifie l'appelation exponentielle stochastique de M pour $\mathcal{E}(M)$.

Proposition 7.7 (Intégabilité de l'exponentielle stochastique)

(1) Soit $f\in L^2_{loc}(B)$ avec $\int_0^t f(s)^2ds\le C$ ps pour une constante C finie alors $\mathcal{E}(\int_0^\cdot f_sdB_s)$ est une vraie martingale de carré intégrable. En particulier pour tout $t\ge 0$, on a $\mathbb{E}[\mathcal{E}(\int_0^\cdot f_sdB_s)_t]=1$.

(2) Si $f\in L^2_{loc}(B)$ est à valeurs complexes, on a

$$\int_0^t|f(s)|^2ds\le C\quad\Longrightarrow\quad\mathbb{E}\left[\left|\mathcal{E}\Big(\int_0^\cdot f_sdB_s\Big)_t\right|^2\right]<+\infty\ \ \text{et}\ \ \mathbb{E}\left[\mathcal{E}\Big(\int_0^\cdot f_sdB_s\Big)_t\right]=1.$$

Démonstration : 1) On fixe $t\ge 0$ et on pose $Z_t=\mathcal{E}(\int_0^\cdot f(s)dB_s)_t$. On commence par supposer que $|f(s)|\le k$ pour tout $s\in[0,t]$. Pour l'exponentielle stochastique, la formule d'Itô s'écrit

$$Z_t=1+\int_0^t Z_sf(s)\,dB_s. \tag{7.12}$$

On montre alors que

$$fZ\in L^2_{[0,t]}(B)=\left\{H:\Omega\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}:\ \text{progressif avec }\mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2\,ds\right]<+\infty\right\}$$

pour assurer que $\int_0^t Z_s f(s)\, dB_s$ est une (vraie) martingale et que $\mathbb{E}[Z_t] = 1$. De $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, on déduit

$$Z_u^2 \leq 2\left(1 + \left(\int_0^u Z_s f_s dB_s\right)^2\right), \quad u \leq t.$$

Pour le calcul du moment d'ordre 2 de $\int_0^u Z_s f_s dB_s$, on utilise l'isométrie d'Itô pour déduire pour $u \leq t$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[Z_u^2\big] &\leq 2\left(1 + \int_0^u \mathbb{E}\big[Z_s^2 f_s^2\big]\, ds\right)\\ &\leq 2\left(1 + k^2 \int_0^u \mathbb{E}\big[Z_s^2\big]\, ds\right). \qquad (7.13)\end{aligned}$$

A priori comme $\mathbb{E}[Z_s^2]$ n'est pas finie, on utilise les temps d'arrêt $T_n = \inf\big(t \geq 0 : Z_t \geq n\big)$, $n \geq 1$, qui réduisent la martingale locale Z. En faisant comme précédemment, on peut remplacer (7.13) par

$$\mathbb{E}\big[Z_u^2 \mathbf{1}_{\{u \leq T_n\}}\big] \leq \mathbb{E}\big[Z_{u\wedge T_n}^2\big] \leq 2\left(1 + k^2 \int_0^u \mathbb{E}\big[Z_s^2 \mathbf{1}_{s\leq T_n}\big]\, ds\right). \qquad (7.14)$$

On peut alors appliquer le résultat classique suivant à $\mathbb{E}\big[Z_u^2 \mathbf{1}_{\{u \leq T_n\}}\big]$:

Lemme 7.8 (Grönwall) *Soit g une fonction positive localement intégrable définie sur $\mathbb{R}_+$ telle que pour $a, b \geq 0$*

$$g(t) \leq a + b\int_0^t g(s)\, ds. \qquad (7.15)$$

Alors $g(t) \leq a\exp(bt)$ pour tout $t \geq 0$.

Preuve (Grönwall). En multipliant par e^{-bt}, l'hypothèse (7.15) s'écrit

$$\frac{d}{dt}\left[\exp(-bt)\int_0^t g(s)ds\right] \leq a\exp(-bt)$$

ce qui, en intégrant, donne

$$\exp(-bt)\int_0^t g(s)ds \leq \frac{a}{b}(1 - \exp(-bt)).$$

On obtient le résultat en reportant l'inégalité ci-dessus dans l'hypothèse (7.15) :

$$g(t) \leq a + b\frac{a}{b}e^{bt}(1 - \exp(-bt)) = ae^{bt}.$$

□

Le lemme de Grönwall (Lemme 7.8) assure alors $\mathbb{E}[Z_s^2\mathbf{1}_{\{s\leq T_n\}}]\leq 2\exp(2k^2s)$ et par convergence monotone on obtient $\mathbb{E}[Z_s^2]\leq 2\exp(2k^2s)$ lorsque $n\to+\infty$. Pour $s\in[0,t]$, on a donc Z_s de carré intégrable et borné dans L^2. Cela garantit $fZ\in L^2_{[0,t]}(B)$ et à partir de (7.12) : $\mathbb{E}[Z_t]=1$. De plus, comme f est bornée et Z est bornée dans L^2, on a

$$\mathbb{E}\Big[\langle Z,Z\rangle_t\Big]=\mathbb{E}\Big[\int_0^t Z_s^2f_s^2ds\Big]<+\infty,$$

ce qui assure que Z est une martingale L^2 par le Th. 5.36.

Dans le cas général, on pose $f_n=(f\wedge n)\vee(-n)$ et on applique le cas précédent à f_n (fonction bornée par n). Par convergence monotone, on a $\int_0^t f_n(u)^2du\nearrow\int_0^t f(u)^2du$, $n\to+\infty$, presque sûrement et par isométrie d'Itô et convergence dominée

$$\int_0^t f_n(u)dB_u\xrightarrow[n\to+\infty]{L^2}\int_0^t f(u)dB_u$$

car

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t f_n(u)\,dB_u-\int_0^t f(u)\,dB_u\right)^2\right]=\mathbb{E}\left[\int_0^t(f_n(u)-f(u))^2\,du\right]\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

On a donc

$$\int_0^t f_n(s)\,dB_s-\frac{1}{2}\int_0^t f_n(s)^2\,ds\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}}\int_0^t f(s)\,dB_s-\frac{1}{2}\int_0^t f(s)^2\,ds$$

et, comme la convergence en probabilité se conserve en appliquant une application continue, avec des notations évidentes, on a : $Z_n(t)\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}}Z(t)$. Puis

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[Z_n(t)^2\big]&=\mathbb{E}\left[\exp\left(2\int_0^t f_n(s)\,dB_s-(4-3)\int_0^t f_n(s)^2\,ds\right)\right]\\&\leq\mathbb{E}\left[\exp\left(4\int_0^t f_n(s)\,dB_s-8\int_0^t f_n(s)^2\,ds\right)\right]^{1/2}\mathbb{E}\left[\exp\left(6\int_0^t f_n(s)^2\,ds\right)\right]^{1/2}\\&\leq 1\times\exp(3C)\end{aligned}\tag{7.16}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le cas précédent pour avoir

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(4\int_0^t f_n(s)\,dB_s-8\int_0^t f_n(s)^2\,ds\right)\right]=\mathbb{E}\left[\mathcal{E}\left(\int_0^t 4f_n(s)\,dB_s\right)\right]=1.$$

La borne (7.16) assure que $(Z_n(t))_{n\geq1}$ est uniformément intégrable. D'après le Théorème de Vitali, la convergence $Z_n(t)\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}}Z(t)$ se renforce en $Z_n(t)\xrightarrow[n\to+\infty]{L^1}Z(t)$ et on a en particulier $\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}[Z_n(t)]=\mathbb{E}[Z(t)]$, ce qui assure $\mathbb{E}[Z(t)]=1$. Pour $s\leq t$, on a aussi

$\mathbb{E}[Z_n(t)|\mathcal{F}_s] \xrightarrow[n\to+\infty]{L^1} \mathbb{E}[Z(t)|\mathcal{F}_s]$. En passant à la limite dans $\mathbb{E}[Z_n(t)|\mathcal{F}_s] = Z_n(s)$ ps, il vient donc $\mathbb{E}[Z(t)|\mathcal{F}_s] = Z(s)$ ps pour $s \leq t$ (unicité ps de la limite en probabilité), ce qui établit que Z est une martingale.

Il reste à voir que cette martingale est L^2. Pour cela, on observe qu'on a mieux que l'uniforme intégrabilité dans L^1 avec une meilleure propriété que (7.16), en effet :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[Z_n(t)^3\right] &= \mathbb{E}\left[\exp\left(3\int_0^t f_n(s)\,dB_s - \frac{3}{2}\int_0^t f_n(s)^2\,ds\right)\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left(3\int_0^t f_n(s)\,dB_s - \frac{18-15}{2}\int_0^t f_n(s)^2\,ds\right)\right]\\
&\leq \mathbb{E}\left[\exp\left(6\int_0^t f_n(s)\,dB_s - 18\int_0^t f_n(s)^2\,ds\right)\right]^{1/2}\mathbb{E}\left[\exp\left(15\int_0^t f_n(s)^2\,ds\right)\right]^{1/2}\\
&\leq \mathbb{E}\left[\mathcal{E}\Big(\int_0^\cdot 6f_n(s)\,dB_s\Big)_t\right]\exp(15C/2) = \exp(15C/2),
\end{aligned}$$

ce qui justifie que $(Z_n(t))_{n\geq 1}$ est uniformément intégrable dans L^2. On en déduit alors que $Z_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2} Z(t)$ et donc $Z(t) \in L^2$.

2) Pour le cas complexe, on écrit $f = \mathrm{Re}(f) + i\mathrm{Im}(f)$ et on se ramène sans difficulté au cas réel. $\square$

7.3 Théorème de Lévy

Le résultat suivant permet de caractériser le mouvement brownien par son crochet parmi les martingales locales à trajectoires continues.

Théorème 7.9 (Lévy)
Soit $X = \big(X^{(1)}, \dots, X^{(d)}\big)$ un processus à trajectoires continues $(\mathcal{F}_t)$-adapté issu de 0. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) X est un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien en dimension d.

(2) Les processus $X^{(1)}, \dots, X^{(d)}$ sont des $(\mathcal{F}_t)$-martingales locales à trajectoires continues et de plus

$$\langle X^{(i)}, X^{(j)}\rangle_t = \delta_{i,j}\, t$$

où $\delta_{i,j}$ désigne le symbole de Kronecker.

En particulier, une $(\mathcal{F}_t)$-martingale locale à trajectoires continues M issue de 0 est un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien si et seulement si $\langle M, M\rangle_t = t$.

Remarque 7.10 Il est crucial que le processus soit à trajectoires continues. Par exemple le processus de Poisson (standard) vérifie la même propriété de crochet mais il est à trajectoires càdlàg (continues à droite avec des limites à gauche).

Démonstration : Le sens 1) $\Rightarrow$ 2) est connu, cf. Remarque 5.32 et Proposition 5.44. On montre la réciproque 2) $\Rightarrow$ 1). Pour $u, v \in \mathbb{R}^d$, on note $u \cdot v := \sum_{k=1}^d u_k v_k$ le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^d$. Étant donné $u \in \mathbb{R}^d$, $u \cdot X = (u \cdot X_t)_{t \geq 0}$ est une martingale locale (Proposition 5.23) de crochet

$$\sum_{k,l=1}^d u_k u_l \, \langle X^{(k)}, X^{(l)} \rangle_t = \sum_{k=1}^d u_k^2 \, t = \|u\|^2 \, t.$$

On applique la Proposition 7.5 sur les exponentielles stochastiques à la martingale locale complexe $M = iu \cdot X$ (où $i^2 = -1$) :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(iu \cdot X)_t &= \exp\left(iu \cdot X_t - \frac{i^2}{2} \langle u \cdot X, u \cdot X \rangle_t \right) \\ &= \exp\left(iu \cdot X_t + \frac{1}{2} \|u\|^2 t \right) \end{aligned}$$

est une martingale locale. Comme pour tout $T > 0$, cette martingale locale est bornée sur les intervalles $[0, T]$:

$$|\mathcal{E}(iu \cdot X)_t| = \exp\left(\frac{1}{2} \|u\|^2 t \right) \leq \exp\left(\frac{1}{2} \|u\|^2 T \right), \quad t \in [0, T],$$

il s'agit en fait d'une vraie martingale (complexe) pour laquelle la propriété de martingale donne alors

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(iu \cdot X_t + \frac{1}{2} \|u\|^2 t \right) \Big| \mathcal{F}_s \right] = \exp\left(iu \cdot X_s + \frac{1}{2} \|u\|^2 s \right) \quad \forall s \leq t.$$

En particulier, pour $A \in \mathcal{F}_s$, on a :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A \exp\left(iu \cdot (X_t - X_s) \right) \right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A \exp\left(iu \cdot (X_t - X_s) \right) \big| \mathcal{F}_s \right] \right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A \exp\left(-iu \cdot X_s - \frac{1}{2} \|u\|^2 t \right) \mathbb{E}\left[\exp\left(iu \cdot X_t + \frac{1}{2} \|u\|^2 t \right) \Big| \mathcal{F}_s \right] \right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A \exp\left(-iu \cdot X_s - \frac{1}{2} \|u\|^2 t \right) \exp\left(iu \cdot X_s + \frac{1}{2} \|u\|^2 s \right) \right] \\ &= \mathbb{P}(A) \, \exp\left(-\frac{1}{2} \|u\|^2 (t - s) \right). \end{aligned} \tag{7.17}$$

Avec $A = \Omega$, l'identité (7.17) montre que $X_t - X_s \sim \mathcal{N}(0, (t-s) I_d)$. Ensuite pour $A \in \mathcal{F}_s$ de probabilité $\mathbb{P}(A) > 0$, en notant $\mathbb{P}_A(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot | A)$, l'identité (7.17) s'écrit

$$\mathbb{E}_A \left[\exp\left(iu \cdot (X_t - X_s) \right) \right] = \exp\left(-\frac{1}{2} \|u\|^2 (t - s) \right)$$

ie. $\mathcal{L}(X_t - X_s|A) = \mathcal{N}(0, (t-s)I_d)$. Pour toute fonction mesurable positive f sur $\mathbb{R}^d$, on a

$$\mathbb{E}_A [f(X_t - X_s)] = \mathbb{E} [f(X_t - X_s)]$$

soit

$$\mathbb{E} [\mathbf{1}_A f(X_t - X_s)] = \mathbb{P}(A)\, \mathbb{E} [f(X_t - X_s)] .$$

Comme c'est vrai pour tout $A \in \mathcal{F}_s$, on a $X_t - X_s \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s$.

Finalement, pour tout $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_p$, le vecteur $\big(X^{(i)}_{t_j} - X^{(i)}_{t_{j-1}}\big)_{\substack{1\le i\le d\\ 1\le j\le p}}$ est un vecteur gaussien (car obtenu en regroupant p vecteurs gaussiens indépendants). Par transformation linéaire, $(X_{t_i})_{1\le i\le p}$ est encore un vecteur gaussien pour tout $(t_i)_{1\le i\le p}$ et donc X est un processus gaussien. Comme le vecteur $\big(X^{(i)}_{t_j} - X^{(i)}_{t_{j-1}}\big)_{\substack{1\le i\le d\\ 1\le j\le p}}$ a ses composantes indépendantes, le processus X est finalement gaussien, à accroissements indépendants et stationnaires et (par hypothèse) à trajectoires continues, achevant de prouver que $X^{(1)}, \dots, X^{(d)}$ sont d mouvements browniens indépendants. □

7.4 Dubins-Schwarz

Le résultat suivant montre que pour les martingales locales à trajectoires continues, le crochet est une horloge interne qui permet de retrouver le processus quand on évalue un mouvement brownien standard avec cette horloge. C'est une preuve supplémentaire du rôle central du mouvement brownien dans la classe des martingales locales à trajectoires continues.

Théorème 7.11 (Dubins-Schwarz) *Soit M une martingale locale à trajectoires continues issue de 0 et telle que $\langle M, M\rangle_\infty = +\infty$ ps. Alors, il existe un mouvement brownien standard β tel que*

$$ps \quad \forall t \ge 0, \quad M_t = \beta_{\langle M,M\rangle_t}.$$

Remarque 7.12

— En grossissant l'espace de probabilité, on peut se débarrasser de la condition $\langle M, M\rangle_\infty = +\infty$ ps.

— Le mouvement brownien β n'est pas adapté par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$ initiale de M, mais par rapport à une filtration « changée de temps ».

— Il s'agit d'un résultat existentiel : le résultat est valable pour un mouvement brownien spécial (construit par la preuve du théorème en (7.18)) et pas pour un mouvement brownien quelconque.

Démonstration : Pour tout $r \ge 0$, on définit

$$\tau_r = \inf\big(t \ge 0 : \langle M, M\rangle_t > r\big).$$

Il s'agit d'un temps d'arrêt car c'est un temps d'atteinte du processus adapté $\langle M, M\rangle$. De plus, l'hypothèse $\langle M, M\rangle_\infty = +\infty$ assure que, pour chaque $r \geq 0$, $\tau_r < +\infty$ ps : en effet pour tout $A > 0$ on a $\{\tau_r < A\} = \{\langle M, M\rangle_A > r\}$ et par monotonie

$$\{\tau_r < +\infty\} = \bigcup_{A\geq 0}\{\tau_r < A\} = \bigcup_{A\geq 0}\{\langle M, M\rangle_A > r\} = \{\langle M, M\rangle_\infty > r\}.$$

Ensuite, on observe que la fonction $r \in \mathbb{R}_+ \mapsto \tau_r$ est croissante et càdlàg :

— elle est croissante car si $s \leq r$ alors

$$\{t \geq 0 : \langle M, M\rangle_t > r\} \subset \{t \geq 0 : \langle M, M\rangle_t > s\}$$

et donc $\tau_s \leq \tau_r$ en passant aux inf ;

— elle est continue à droite car si on note $\alpha = \lim_{s\searrow r}\tau_s$, on a d'abord $\alpha \geq \tau_r$ par croissance, puis si l'inégalité est stricte, il existerait $\beta < \alpha$ tel que $\tau_r < \beta < \alpha \leq \tau_s$ pour tout $s > r$ et nécessairement $r < \langle M, M\rangle_\beta \leq s$ pour tout $s > r$ ce qui est absurde car on peut prendre s arbitrairement proche de r ;

— elle admet des limites à gauche en $r > 0$ qui existent par monotonie, de plus elles sont données par

$$\lim_{s\nearrow r}\tau_s = \tau_{r^-} = \inf\big(t \geq 0 : \langle M, M\rangle_t = r\big).$$

En effet, comme par croissance $\tau_{r^-} \geq \tau_s$ pour tout $s < r$, on a $\langle M, M\rangle_{\tau_{r^-}} \geq s$ et à la limite $s \nearrow r$, on a $\langle M, M\rangle_{\tau_{r^-}} \geq r$. Puis comme $\langle M, M\rangle$ est continue, on doit avoir $\langle M, M\rangle_{\tau_{r^-}} = r$ sinon on aurait $\lim_{s\nearrow r}\langle M, M\rangle_{\tau_s} = \langle M, M\rangle_{\tau_{r^-}} > r$, c'est à dire $\langle M, M\rangle_{\tau_s} > r$ pour s assez grand et l'application continue $\langle M, M\rangle$ ne prendrait aucune valeur dans $]s, r]$, niant le théorème des valeurs intermédiaires.

On pose alors

$$\beta_r = M_{\tau_r}, \quad r \geq 0. \tag{7.18}$$

Le processus β est adapté par rapport à la filtration donnée par $\mathcal{G}_r = \mathcal{F}_{\tau_r}$, $r \geq 0$. Il s'agit bien d'une filtration car pour $s \leq r$, on a $\tau_s \leq \tau_r$ et par 6) dans la Prop. 5.38 on a $\mathcal{G}_s = \mathcal{F}_{\tau_s} \subset \mathcal{F}_{\tau_r} = \mathcal{G}_r$. De plus, on remarque que cette filtration satisfait les conditions habituelles puisque lorsque $(T_n)_{n\geq 1}$ est une suite de temps d'arrêt décroissant vers T on a $\mathcal{F}_T = \bigcap_{n\geq 1}\mathcal{F}_{T_n}$, cf. Prop. 4.9. De la Prop. 5.38, on déduit directement :

Lemme 7.13 *Les intervalles de constance de M et de $\langle M, M\rangle$ sont ps les mêmes. En d'autres termes, on a ps pour tous $a < b$,*

$$M_t = M_a \quad \forall t \in [a, b] \quad \Longleftrightarrow \quad \langle M, M\rangle_t = \langle M, M\rangle_a \quad \forall t \in [a, b].$$

On revient à la preuve du Théorème 7.11. Le processus β est presque sûrement à trajectoires continues :

— $r \mapsto \beta_r = M_{\tau_r}$ est continue à droite en tant que composition de telles fonctions ;

— $r \mapsto \beta_r = M_{\tau_r}$ est continue à gauche ps car pour tout $r > 0$,

$$\lim_{s \nearrow r} \beta_s = \lim_{s \nearrow r} M_{\tau_s} = M_{\tau_{r^-}} = M_{\tau_r} = \beta_r,$$

où l'avant dernière égalité vient du Lemme 7.13 et de

$$\langle M, M\rangle_t = r \quad \forall t \in [\tau_{r^-}, \tau_r]. \tag{7.19}$$

On montre ensuite que $\beta = (\beta_s)_{s\geq 0}$ et $(\beta_s^2 - s)_{s\geq 0}$ sont des martingales relativement à la filtration $(\mathcal{G}_s)_{s\geq 0}$. Cela prouvera en particulier que $\langle \beta, \beta\rangle_s = s$. Comme

$$\langle M^{\tau_n}, M^{\tau_n}\rangle_\infty = \langle M, M\rangle_{\tau_n} = n,$$

le Théorème 5.36 assure que pour tout $n \geq 1$, les martingales locales arrêtées M^{τ_n} et $(M^{\tau_n})^2 - \langle M, M\rangle^{\tau_n}$ sont de vraies martingales uniformément intégrables. Soit $s \leq r$ et $n \geq r$. Le théorème d'arrêt s'applique alors pour ces martingales uniformément intégrables M^{τ_n} et $(M^{\tau_n})^2 - \langle M, M\rangle^{\tau_n}$ avec les temps d'arrêt $\tau_s \leq \tau_r$ et donne

$$\mathbb{E}[\beta_r \,|\mathcal{G}_s] = \mathbb{E}[M_{\tau_r} \,|\mathcal{F}_{\tau_s}] = \mathbb{E}[M_{\tau_r}^{\tau_n} \,|\mathcal{F}_{\tau_s}] = M_{\tau_s}^{\tau_n} = M_{\tau_s\wedge\tau_n} = M_{\tau_s} = \beta_s$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\beta_r^2 - r\,|\mathcal{G}_s\right] &= \mathbb{E}\left[(M_{\tau_r})^2 - \langle M, M\rangle_{\tau_r} \,|\mathcal{F}_{\tau_s}\right] = \mathbb{E}\left[(M_{\tau_r\wedge\tau_n})^2 - \langle M, M\rangle_{\tau_r\wedge\tau_n} \,|\mathcal{F}_{\tau_s}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(M_{\tau_r}^{\tau_n})^2 - \langle M^{\tau_n}, M^{\tau_n}\rangle_{\tau_r} \,|\mathcal{F}_{\tau_s}\right] = (M_{\tau_s}^{\tau_n})^2 - \langle M^{\tau_n}, M^{\tau_n}\rangle_{\tau_s} \\
&= (M_{\tau_s\wedge\tau_n})^2 - \langle M, M\rangle_{\tau_s\wedge\tau_n} = \beta_s^2 - s.
\end{aligned}$$

Ainsi, le processus $\beta = (\beta_s)_{s\geq 0}$ est une $(\mathcal{G}_s)$-martingale à trajectoires continues, de crochet $\langle \beta, \beta\rangle_s = s$. Le Théorème 7.9 (Théorème de Lévy avec $d = 1$) s'applique pour prouver que β est un $(\mathcal{G}_s)_{s\geq 0}$-mouvement brownien. Finalement, par définition de β en (7.18), on a : ps pour tout $t \geq 0$,

$$\beta_{\langle M,M\rangle_t} = M_{\tau_{\langle M,M\rangle_t}},$$

et on observe que

$$\tau_{\langle M,M\rangle_t} = \inf\big(s \geq 0 \,:\, \langle M, M\rangle_s > \langle M, M\rangle_t\big) \geq t.$$

Si l'inégalité précédente est stricte alors $\langle M, M\rangle$ est constante sur $[t, \tau_{\langle M,M\rangle_t}]$: en effet

$$\big[t, \tau_{\langle M,M\rangle_t}\big] = \Big[t, \tau_{\langle M,M\rangle_t^-}\Big[\;\cup\; \Big[\tau_{\langle M,M\rangle_t^-}, \tau_{\langle M,M\rangle_t}\Big]$$

et $\langle M, M\rangle_s = \langle M, M\rangle_t$ pour $s \in [t, \tau_{\langle M,M\rangle_t}[$, car $\langle M, M\rangle_s \geq \langle M, M\rangle_t$ par croissance lorsque $s \geq t$ et $\langle M, M\rangle_s \leq \langle M, M\rangle_t$ lorsque $s < \tau_{\langle M,M\rangle_t}$ puis par (7.19) $\langle M, M\rangle$ est constant sur $\big[\tau_{\langle M,M\rangle_t^-}, \tau_{\langle M,M\rangle_t}\big]$. D'après le Lemme 7.13, M est constante sur $[t, \tau_{\langle M,M\rangle_t}]$, ie. $M_t = M_{\tau_{\langle M,M\rangle_t}} = \beta_{\langle M,M\rangle_t}$ ps. Par continuité des trajectoires de M et de $\beta_{\langle M,M\rangle_\bullet}$, les deux processus sont indistinguables. □

7.5 Inégalités de Burkholder-Davis-Gundy

Dans cette section, on prouve les inégalités Burkholder-Davis-Gundy (BDG) qui montrent que pour une martingale locale M à trajectoires continues

$$\mathbb{E}\left[\langle M, M\rangle_t^m\right] \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\left[|M_t^*|^{2m}\right]$$

où $M_t^* = \max_{0\le s\le t}|M_s|$ sont de même ordre de grandeur sur $[0,+\infty[$ pour tout $m>0$.

Théorème 7.14 (Inégalités de Burkholder-Davis-Gundy) *Pour tout réel $p\ge 0$, il existe des constantes c_p, C_p telles que pour toute martingale locale M, à trajectoires continues, issue de 0, on a :*

$$c_p\ \mathbb{E}\left[\langle M, M\rangle_\infty^{p/2}\right] \le \mathbb{E}\left[(M_\infty^*)^p\right] \le C_p\ \mathbb{E}\left[\langle M, M\rangle_\infty^{p/2}\right]. \tag{7.20}$$

Remarque 7.15 Si T est un temps d'arrêt quelconque, en remplaçant M par la martingale locale arrêtée M^T, on obtient les mêmes inégalités avec T à la place de $+\infty$; en particulier, on a aussi les mêmes inégalités avec t à la place de $+\infty$.

On commence par les résultats préliminaires suivants :

Proposition 7.16 (Inégalités de martingales) *Soit M une martingale à trajectoires continues bornée et de variation quadratique bornée. Mais pour tout temps d'arrêt T, on a*

$$\mathbb{E}\big[|M_T|^{2m}\big] \le C_m \mathbb{E}\big[\langle M, M\rangle_T^m\big], \quad m>0 \tag{7.21}$$
$$B_m \mathbb{E}\big[\langle M, M\rangle_T^m\big] \le \mathbb{E}\big[|M_T|^{2m}\big], \quad m>1/2 \tag{7.22}$$
$$B_m \mathbb{E}\big[\langle M, M\rangle_T^m\big] \le \mathbb{E}\big[(M_T^*)^{2m}\big] \le C'_m \mathbb{E}\big[\langle M, M\rangle_T^m\big], \quad m>1/2 \tag{7.23}$$

où B_m, C_m, C'_m sont des constantes universelles (qui dépendent seulement de m mais pas de la martingale M ni du temps d'arrêt T).

Remarque 7.17 En localisant correctement, on montre que (7.21) et (7.23) restent valables pour M martingale locale à trajectoires continues. Pour que (7.22) reste valable, il faut supposer en plus que $\mathbb{E}\big[\langle M, M\rangle_T^m\big] < +\infty$.

Démonstration :[Inégalités de martingales] On considère le processus

$$\begin{aligned} Y_t &= \delta + \varepsilon\langle M, M\rangle_t + M_t^2 \\ &= \delta + (1+\varepsilon)\langle M, M\rangle_t + 2\int_0^t M_s dM_s, \quad t\ge 0, \end{aligned}$$

où $\delta>0$ et $\varepsilon>0$ sont des constantes qui seront choisies plus tard et la deuxième expression vient de la formule d'Itô. En appliquant la formule d'Itô pour $f(x)=x^m$, on a pour $t\ge 0$:

$$Y_t^m = \delta^m + m(1+\varepsilon)\int_0^t Y_s^{m-1}\, d\langle M, M\rangle_s + 2m(m-1)\int_0^t Y_s^{m-2} M_s^2\, d\langle M, M\rangle_s$$

$$+ 2m \int_0^t Y_s^{m-1} M_s \, dM_s.$$

Comme par hypothèse M, Y et $\langle M, M\rangle$ sont bornées et Y est bornée de 0, l'intégrale $\int_0^t Y_s^{m-1} M_s dM_s$ est une (vraie) martingale uniformément intégrable. Le théorème d'arrêt (Théorème 4.32) s'applique et donne

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T Y_s^{m-1} M_s dM_s\right] = 0.$$

En prenant les espérances dans la formule d'Itô, on a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big[Y_T^m\big] &= \delta^m + m(1+\varepsilon)\mathbb{E}\left[\int_0^T Y_s^{m-1}\, d\langle M, M\rangle_s\right] \\ &\quad + 2m(m-1)\mathbb{E}\left[\int_0^T Y_s^{m-2} M_s^2 \, d\langle M, M\rangle\right]. \end{aligned} \tag{7.24}$$

Ci dessous, on passe à la limite dans les espérances avec le théorème de convergence dominée en utilisant que M et son crochet $\langle M, M\rangle$ sont bornés.

Cas 1 : borne sup (7.21) pour $0 < m \leq 1$. Comme le dernier terme à droite de (7.24) est négatif pour $m \leq 1$, en faisant $\delta \to 0$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[(\varepsilon\langle M, M\rangle_T + M_T^2)^m\right] &\leq m(1+\varepsilon)\mathbb{E}\left[\int_0^T (\varepsilon\langle M, M\rangle_s + M_s^2)^{m-1}\, d\langle M, M\rangle_s\right] \\ &\leq m(1+\varepsilon)\varepsilon^{m-1}\mathbb{E}\left[\int_0^T \langle M, M\rangle_s^{m-1}\, d\langle M, M\rangle_s\right] \\ &= (1+\varepsilon)\varepsilon^{m-1}\mathbb{E}\left[\langle M, M\rangle_T^m\right] \end{aligned} \tag{7.25}$$

en utilisant la décroissance de x^{m-1} pour $0 < m \leq 1$. Comme pour ces valeurs de m, $x \mapsto x^m$ est concave, on a

$$2^{m-1}(x^m + y^m) \leq (x+y)^m, \quad x \geq 0, y \geq 0, \tag{7.26}$$

et (7.25) donne

$$\varepsilon^m \mathbb{E}\left[\langle M, M\rangle_T^m\right] + \mathbb{E}\left[|M_T|^{2m}\right] \leq (1+\varepsilon)(\varepsilon/2)^{m-1}\mathbb{E}\left[\langle M, M\rangle_T^m\right]. \tag{7.27}$$

On déduit alors

$$\mathbb{E}\left[|M_T|^{2m}\right] \leq \big((1+\varepsilon)(2/\varepsilon)^{1-m} - \varepsilon^m\big)\, \mathbb{E}\left[\langle M, M\rangle_T^m\right]. \tag{7.28}$$

Cas 2 : borne inf (7.22) pour $m > 1$. Dans ce cas, le dernier terme à droite de (7.24) est positif, $x \mapsto x^{m-1}$ est croissante et $x \mapsto x^m$ est convexe. Les inégalités dans (7.25), (7.27), (7.28) se renversent pour mener à

$$\mathbb{E}\left[|M_T|^{2m}\right] \geq \big((1+\varepsilon)(2/\varepsilon)^{1-m} - \varepsilon^m\big)\, \mathbb{E}\left[\langle M, M\rangle_T^m\right].$$

Cas 3 : borne inf (7.22) **pour** $\frac{1}{2} < m \leq 1$**.** En faisant $\varepsilon = 0$ et $\delta \to 0$ dans (7.24), on a

$$\mathbb{E}\left[|M_T|^{2m}\right] = 2m\Big(m - \frac{1}{2}\Big)\mathbb{E}\left[\int_0^T |M_s|^{2(m-1)}\, d\langle M, M\rangle_s\right]. \tag{7.29}$$

De plus, on déduit de (7.26) et (7.24) et de la décroissance de x^{m-1}

$$\begin{aligned} 2^{m-1}\left(\varepsilon^m \mathbb{E}[\langle M, M\rangle_T^m] + \mathbb{E}[(\delta + M_T^2)^m]\right) &\leq \mathbb{E}\left[\left(\varepsilon\langle M, M\rangle_T + (\delta + M_T^2)\right)^m\right] = \mathbb{E}[Y_T^m] \\ &\leq \delta^m + m(1+\varepsilon)\mathbb{E}\left[\int_0^T (\delta + M_s^2)^{m-1}\, d\langle M, M\rangle_s\right]. \end{aligned}$$

En faisant $\delta \searrow 0$, on obtient alors

$$2^{m-1}\left(\varepsilon^m \mathbb{E}\left[\langle M, M\rangle_T^m\right] + \mathbb{E}\left[|M_T|^{2m}\right]\right) \leq m(1+\varepsilon)\mathbb{E}\left[\int_0^T |M_s|^{2(m-1)}\, d\langle M, M\rangle_s\right]. \tag{7.30}$$

En combinant (7.29) et (7.30), on a la borne inférieure valable pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{E}\left[|M_T|^{2m}\right] \geq \varepsilon^m \left(\frac{(1+\varepsilon)2^{1-m}}{2m-1} - 1\right)^{-1} \mathbb{E}\left[\langle M, M\rangle_T^m\right].$$

Cas 4 : borne sup (7.21) **pour** $m > 1$**.** Dans ce cas, l'inégalité (7.30) s'inverse et on a

$$\mathbb{E}\left[|M_T|^{2m}\right] \leq \varepsilon^m \left(\frac{(1+\varepsilon)2^{1-m}}{2m-1} - 1\right)^{-1} \mathbb{E}\left[\langle M, M\rangle_T^m\right]$$

où ε doit vérifier $\varepsilon > (2m-1)2^{m-1} - 1$.

Les cas 1–4 établissent (7.21) et (7.22). Pour prouver (7.23), on applique l'inégalité maximale de Doob à la $(\mathcal{F}_t)$-martingale $(M_{T\wedge t})_{t\geq 0}$. On a alors pour $m > 1/2$:

$$\begin{aligned} B_m \mathbb{E}\left[\langle M, M\rangle_{T\wedge t}^m\right] \leq \mathbb{E}\left[|M_{T\wedge t}|^{2m}\right] &\leq \mathbb{E}\left[(M_{T\wedge t}^*)^{2m}\right] \\ &\leq \left(\frac{2m}{2m-1}\right)^{2m} \mathbb{E}\left[|M_{T\wedge t}|^{2m}\right] \\ &\leq C_m \left(\frac{2m}{2m-1}\right)^{2m} \mathbb{E}\left[\langle M, M\rangle_{T\wedge t}^m\right], \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

ce qui est (7.23) avec T remplacé par $T \wedge t$. On conclut alors à l'aide du théorème de convergence monotone en faisant $t \to +\infty$. □

En plus des inégalités de martingales de la Prop. 7.16, la preuve des inégalités BDG du Th. 7.14 utilise également l'inégalité de Lenglart :

Proposition 7.18 (Inégalité de Lenglart) *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus à trajectoires continues et positives partant de 0 et $(A_t)_{t\geq 0}$ un processus continu croissant tels que*

$$\text{pour tout temps d'arrêt } T \text{ borné} : \quad \mathbb{E}[X_T] \leq \mathbb{E}[A_T]. \tag{7.31}$$

Alors pour tout temps d'arrêt T :

$$\mathbb{P}\left(\max_{s\leq T} X_s \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{E}[\delta \wedge A_T]}{\varepsilon} + \mathbb{P}(A_T \geq \delta), \quad \varepsilon, \delta > 0, \tag{7.32}$$

$$\mathbb{E}\big[(X_T^*)^p\big] \leq \frac{2-p}{1-p}\mathbb{E}\big[A_T^p\big], \quad 0 < p < 1. \tag{7.33}$$

Remarque 7.19 (1) Noter que la condition (7.31) est remplie si $X = M^2$ où M est une martingale à trajectoires continues bornée dans L^2 car par définition du crochet de M, on a $X_t - A_t = M_t^2 - \langle M, M\rangle_t$ martingale locale et c'est une vraie martingale car $M \in L^2$. Le théorème d'arrêt (avec T borné et $0 \leq T$) donne en prenant l'espérance $\mathbb{E}\big[M_T^2 - A_T\big] = \mathbb{E}\big[M_0^2 - A_0\big]$, ie. $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[A_T]$.

(2) La condition (7.31) est encore remplie si M est une martingale locale réduite par T_n : on peut supposer que M^{T_n} est une martingale L^2 pour laquelle d'après 1) (7.31) est vraie, ie.

$$\mathbb{E}[X_{T\wedge T_n}] = \mathbb{E}[A_{T\wedge T_n}] \leq \mathbb{E}[A_T].$$

Mais comme $T_n \nearrow +\infty$ et T est borné, par le lemme de Fatou, il vient :

$$\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}\big[\liminf_{n\to+\infty} X_{T\wedge T_n}\big] \leq \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{E}[X_{T\wedge T_n}] \leq \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{E}[A_{T\wedge T_n}] \leq \mathbb{E}[A_T].$$

Démonstration :[Lenglart] Soit d'abord T un temps d'arrêt borné et $\varepsilon > 0$. On note $R = \inf\big(t \geq 0 : X_t \geq \varepsilon\big)$. Sur $\{X_T^* \geq \varepsilon\}$, on a $R \leq T$ ou encore $R = R \wedge T$. Comme par continuité des trajectoires $X_R = \varepsilon$, on a alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(X_T^* \geq \varepsilon\right) &= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{X_T^*\geq\varepsilon\}}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{X_R}{\varepsilon}\mathbf{1}_{\{X_T^*\geq\varepsilon\}}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{X_{R\wedge T}}{\varepsilon}\mathbf{1}_{\{X_T^*\geq\varepsilon\}}\right] \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}[X_{R\wedge T}] \leq \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}[A_{R\wedge T}] \leq \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}[A_T] \end{aligned} \tag{7.34}$$

où on utilise d'abord (7.31) avec $T \wedge R$ borné puis la croissance de A.

Si T est un temps d'arrêt quelconque, alors (7.34) s'applique au temps d'arrêt borné $T_n = T \wedge n$: $\mathbb{P}(X_{T_n}^* \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}[A_{T_n}]$. Mais comme $T_n \to T$ $(n \to +\infty)$, $\bigcup_{n\geq 1}\{X_{T_n}^* > \varepsilon\} = \{X_T^* > \varepsilon\}$ (réunion croissante), et en passant à la limite, on a :

$$\mathbb{P}\left(X_T^* > \varepsilon\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(X_{T_n}^* > \varepsilon\right) \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}[A_{T_n}] = \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}[A_T].$$

On a donc encore $\mathbb{P}(X_T^* > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}[A_T]$.

Finalement, soit $\varepsilon, \delta > 0$ et $S = \inf\big(t \geq 0 \,:\, A_t \geq \delta\big)$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(X_T^* \geq \varepsilon\right) &= \mathbb{P}\left(X_T^* \geq \varepsilon, A_T < \delta\right) + \mathbb{P}\left(X_T^* \geq \varepsilon, A_T \geq \delta\right) \\
&\leq \mathbb{P}(X_T^* \geq \varepsilon, T < S) + \mathbb{P}(A_T \geq \delta) \\
&\leq \mathbb{P}(X_{T\wedge S}^* \geq \varepsilon) + \mathbb{P}(A_T \geq \delta) \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\left[A_{T\wedge S}\right] + \mathbb{P}(A_T \geq \delta) \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\left[A_T \wedge \delta\right] + \mathbb{P}(A_T \geq \delta)
\end{aligned}$$

en utilisant (7.34) avec $T \wedge S$ puis la définition de S, qui assure $A_{T\wedge S} = A_T \wedge A_S = A_T \wedge \delta$. Pour la dernière partie, on utilise $\mathbb{E}[Z] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z \geq x)dx$ valable pour toute variable aléatoire Z positive. En utilisant ci-dessous (7.32) avec $\varepsilon = \delta = x^{-1/p}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(X_T^*)^p\right] &\leq \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left((X_T^*)^p > x\right) dx \\
&\leq \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left(X_T^* > x^{1/p}\right) dx \\
&\leq \int_0^{+\infty} x^{-1/p}\mathbb{E}\left[A_T \wedge x^{1/p}\right] + \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left(A_T > x^{1/p}\right) dx \\
&\leq \mathbb{E}\left[\int_0^{A_T^p} dx\right] + \mathbb{E}\left[\int_{A_T^p}^{+\infty} A_T x^{-1/p} dx\right] + \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left(A_T^p > x\right) dx \\
&\quad \text{(th. de Fubini)} \\
&\leq \mathbb{E}[A_T^p] + \mathbb{E}\left[A_T \times \frac{p}{1-p} A_T^{p-1}\right] + \mathbb{E}\left[A_T^p\right] \\
&\leq \frac{2-p}{1-p}\mathbb{E}\left[A_T^p\right].
\end{aligned}$$

□

Corollaire 7.20 *Soit $(M^{(n)})_{n\geq 1}$ une suite de martingales locales et T un temps d'arrêt tels que $\langle M^{(n)}, M^{(n)}\rangle_T \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. Alors $\sup_{s\leq T} |M_s^{(n)}| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ quand $n \to +\infty$.*

Démonstration : D'après la Remarque 7.19, la borne précédente reste vraie pour $X = (M^{(n)})^2$ et $A_t = \langle M^{(n)}, M^{(n)}\rangle_t$ où $M^{(n)}$ est une martingale locale. On a alors

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s\leq T} |M_s^{(n)}|^2 > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\left[\langle M^{(n)}, M^{(n)}\rangle_T \wedge \delta\right] + \mathbb{P}\left(\langle M^{(n)}, M^{(n)}\rangle_T \geq \delta\right).$$

Le deuxième terme tend vers 0 directement par l'hypothèse. Comme $\langle M^{(n)}, M^{(n)}\rangle_T \wedge \delta \leq \delta$ est borné et uniformément intégrable, le premier terme tend aussi vers 0 par le théorème de Vitali. Finalement, $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{s\le T}|M_s^{(n)}|^2 > \varepsilon\right) = 0$, ce qui assure en probabilité :

$$\sup_{s\le T}|M_s^{(n)}| \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

□

Avec les inégalités de martingales (Prop. 7.16) et l'inégalité de Lenglart (Prop. 7.18), tout est en place pour prouver les inégalités BDG (Th. 7.14) :

Démonstration des inégalités BDG (Théorème 7.14). D'après les inégalités de martingales précédentes (Proposition 7.16) et la Remarque 7.17 qui les suit, (7.20) est valable pour $p = 2m > 1$. Il reste à voir le cas $0 < p = 2m \le 1$. Quitte à localiser les processus, on suppose que M et $\langle M, M\rangle$ sont bornés et on utilise l'inégalité de Lenglart (7.33).

D'après l'inégalité droite dans (7.23) avec $m = 1$, on peut appliquer l'inégalité de Lenglart (7.33) avec

$$X = (M^*)^2, \quad A = C_1'\langle M, M\rangle$$

et on a pour tout $0 < m < 1$:

$$\mathbb{E}\left[(M_T^*)^{2m}\right] \le \frac{2-m}{1-m}\,(C_1')^m\mathbb{E}\left[\langle M, M\rangle_T^m\right].$$

De la même façon, l'inégalité à gauche de (7.23) avec $m = 1$ permet d'appliquer l'inégalité de Lenglart avec

$$X = B_1\langle M, M\rangle, \quad A = (M^*)^2$$

ce qui donne pour $0 < m < 1$

$$\frac{1-m}{2-m}B_1^m\mathbb{E}\left[\langle M, M\rangle_T^m\right] \le \mathbb{E}\left[(M_T^*)^{2m}\right].$$

Cela achève la preuve des inégalités BDG (7.20). □

7.6 Représentation des martingales browniennes

Nous montrons que lorsque la filtration est engendrée par un mouvement brownien, toutes les martingales pour cette filtration peuvent être représentées comme intégrales stochastiques par rapport à ce mouvement brownien. Dans cette section, on considère sur Ω la filtration brownienne $(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$, c'est ̀a dire l'augmentation habituelle de la filtration canonique d'un mouvement brownien B issu de 0. On commence par un lemme de densité utile.

Lemme 7.21 (Densité dans $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$) *On considère la filtration brownienne. L'espace vectoriel engendré par les variables aléatoires*

$$\exp\Big(i\sum_{j=1}^n \lambda_j(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\Big)$$

pour $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ est dense dans $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$.

Démonstration : Il suffit de montrer que si $Z \in L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ vérifie

$$\mathbb{E}\left[Z\exp\Big(i\sum_{j=1}^n \lambda_j(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\Big)\right] = 0 \tag{7.35}$$

pour tout choix de $n \geq 1$ et $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ alors $Z = 0$ ps.

On note $\phi_{m,\sigma^2}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, la densité de la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $m \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$ et on rappelle sa fonction caractéristique $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$: $\mathbb{E}\big[\exp(iuX)\big] = \exp\big(ium - (\sigma^2u^2/2)\big)$.

Soit $n \geq 1$ et $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ fixés. La condition (7.35) assure que pour tous $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2 > 0$ et $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\mathbb{R}^n}\prod_{j=1}^n \phi_{m_j,\sigma_j^2}(\lambda_j)\mathbb{E}\left[Z\exp\Big(i\sum_{j=1}^n \lambda_j(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\Big)\right] d\lambda_1\dots d\lambda_n \\
&= \mathbb{E}\left[Z\prod_{j=1}^n\left(\int_{\mathbb{R}}\phi_{m_j,\sigma_j^2}(\lambda_j)\exp\Big(i\lambda_j(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\Big)d\lambda_j\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[Z\prod_{k=1}^n\exp\left(im_k(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}) - \frac{\sigma_k^2(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2}{2}\right)\right]
\end{aligned}$$

où la deuxième égalité vient du théorème de Fubini et la troisième de l'expression de la fonction caractéristique de $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. On obtient pour tous $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{R}$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$:

$$\mathbb{E}\left[Z\ \prod_{k=1}^n\exp\Big(im_k(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}) - \alpha_k(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2\Big)\right] = 0.$$

Un théorème de type Stone-Weierstrass garantit que les combinaisons linéaires complexes de la fonction constante égale à 1 et des fonctions de la forme

$$(y_1, \dots, y_n) \mapsto \exp\Big(\sum_{k=1}^n(im_ky_k - \alpha_ky_k^2)\Big)$$

avec $\alpha_1, \dots, \alpha_m > 0$ et $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{R}$ sont denses dans l'espace $C_\ell(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$ qui ont une limite à l'infini, muni de la norme de la convergence uniforme. Par un passage à la limite, on obtient donc, pour toute fonction $\varphi \in C_\ell(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$,

$$\mathbb{E}\big[Z\ \varphi(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})\big] = 0.$$

On a donc, d'abord par approximation, pour tout ouvert borné U de $\mathbb{R}^n$ puis, par un argument de classe monotone, pour tout borélien U de $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{E}\big[Z\,\mathbf{1}_U(B_{t_1}, B_{t_2}-B_{t_1}, \dots, B_{t_n}-B_{t_{n-1}})\big] = 0.$$

Finalement, on a obtenu l'égalité $\mathbb{E}[Z\mathbf{1}_A] = 0$ pour tout $A \in \sigma(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$. Avec un dernier argument de classe monotone, on montre que cette égalité reste vraie pour tout $A \in \sigma(B_t : t \geq 0)$; puis, par complétion, pour tout $A \in \mathcal{F}_\infty$.

En prenant $A = \{Z > 0\} \in \mathcal{F}_\infty$, on a $Z\mathbf{1}_A \geq 0$ et $\mathbb{E}[Z\mathbf{1}_A] = 0$ donc $Z\mathbf{1}_A = 0$ presque sûrement ce qui exige $Z \leq 0$ ps. De même avec $A = \{Z < 0\}$, on a $Z \geq 0$ ps et donc $Z = 0$ ps. On conclut finalement que $Z = 0$ ps ce qui établit le Lemme 7.21. □

Théorème 7.22 (Représentation de variables L^2) *On considère la filtration brownienne. Alors, pour toute variable aléatoire $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$, il existe un (unique) processus $h \in L^2(B)$ (en particulier progressif donc adapté) tel que*

$$Z = \mathbb{E}[Z] + \int_0^{+\infty} h(s,\omega)\, dB_s. \tag{7.36}$$

Démonstration : D'abord, on établit l'**unicité** de $h \in L^2(B)$: si h et $\widetilde{h}$ correspondent à la même variable aléatoire $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$, par l'isométrie d'Itô on a :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} \big(h(s,\omega) - \widetilde{h}(s,\omega)\big)^2 ds\right] = \mathbb{E}\left[\left(\int_0^{+\infty} h(s,\omega)\, dB_s - \int_0^{+\infty} \widetilde{h}(s,\omega))\, dB_s\right)^2\right] = 0,$$

puisque

$$Z = \mathbb{E}[Z] + \int_0^{+\infty} h(s,\omega)\, dB_s = \mathbb{E}[Z] + \int_0^{+\infty} \widetilde{h}(s,\omega)\, dB_s.$$

On a donc $h = \widetilde{h}$ dans $L^2(B)$ et l'unicité.

Pour l'**existence**, on note $\mathcal{H}$ l'espace vectoriel des variables aléatoires $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ qui ont la propriété (7.36). Le but est de voir que $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$.

Ensuite, on montre que $\mathcal{H}$ est fermé : si $Z \in \mathcal{H}$ correspond à h,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z^2] &= \mathbb{E}[Z]^2 + 2\mathbb{E}[Z]\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} h(s,\omega)\, dB_s\right] + \mathbb{E}\left[\left(\int_0^{+\infty} h(s,\omega)\, dB_s\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}[Z]^2 + \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} h(s,\omega)^2\, ds\right],
\end{aligned}$$

par l'isométrie d'Itô et parce que $\int_0^{+\infty} h(s,\omega)\, dB_s$ est centrée. Il en découle facilement que si $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une suite dans $\mathcal{H}$ qui converge dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ vers Z, on a

$$\mathbb{E}[(Z_n - Z_m)^2] = \mathbb{E}[Z_n - Z_m]^2 + \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} \big(h_n(s,\omega) - h_m(s,\omega)\big)^2 ds\right],$$

et les processus h_n associés à Z_n forment une suite de Cauchy dans $L^2(B)$ donc convergent vers $h \in L^2(B)$. D'après la propriété d'isométrie de l'intégrale stochastique (Théorème 6.10), on a alors $Z = \mathbb{E}[Z] + \int_0^{+\infty} h(s,\omega)\, dB_s$ et donc $\mathcal{H}$ est un espace fermé.

Ensuite, on montre que $\mathcal{H}$ contient les variables aléatoires du Lemme 7.21 : pour $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, notons $f = \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{1}_{]t_{j-1},t_j]}$ et $\mathcal{E}^f$ la martingale exponentielle $\mathcal{E}\left(i \int_0^\cdot f(s)\, dB_s\right)$ (cf. Proposition 7.5). La formule d'Itô (7.11) pour l'exponentielle stochastique montre que

$$\exp\Big(i \sum_{j=1}^n \lambda_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 (t_j - t_{j-1})\Big) = \mathcal{E}_\infty^f = 1 + i \int_0^{+\infty} \mathcal{E}_s^f f(s)\, dB_s$$

soit

$$\begin{aligned} &\exp\Big(i \sum_{j=1}^n \lambda_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\Big) \\ &\quad = \exp\Big(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 (t_j - t_{j-1})\Big) + i \int_0^{+\infty} \exp\Big(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 (t_j - t_{j-1})\Big) \mathcal{E}_s^f f(s)\, dB_s. \end{aligned}$$

On a donc

$$\left\{\exp\left(i \sum_{j=1}^n \lambda_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\right) : \lambda_j \in \mathbb{R}, 0 = t_0 < t_1 \cdots < t_n, n \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathcal{H}$$

Finalement, avec le Lemme 7.21 on a :

$$L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty) = \overline{\operatorname{Vect}\left\{\exp\left(i \sum_{j=1}^n \lambda_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\right) : \lambda_j \in \mathbb{R}, 0 = t_0 < t_1 \cdots < t_n, n \in \mathbb{N}\right\}} \subset \overline{\mathcal{H}} = \mathcal{H}.$$

On a donc $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ ce qui prouve le Théorème 7.22. □

Théorème 7.23 (Représentation de martingales bornées dans L^2) *On considère la filtration brownienne. Alors, pour toute martingale M à trajectoires continues et bornée dans L^2, il existe un (unique) processus $h \in L^2(B)$ et une constante C réelle tels que*

$$M_t = C + \int_0^t h(s,\omega)\, dB_s.$$

Démonstration : Soit M une martingale à trajectoires continues et bornée dans L^2, alors elle converge vers $M_\infty \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$. D'après le Théorème 7.22 appliqué à Z_∞, il existe $h \in L^2(B)$ telle que $M_\infty \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ s'écrive

$$M_\infty = \mathbb{E}[M_\infty] + \int_0^{+\infty} h(s,\omega)\, dB_s.$$

Par conditionnement, il vient :

$$M_t = \mathbb{E}[M_\infty|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[M_\infty] + \int_0^t h(s,\omega)\, dB_s.$$

L'unicité de $h \in L^2(B)$ s'obtient comme dans le Théorème 7.22. □

Théorème 7.24 (Représentation de martingales locales) *On considère la filtration brownienne. Alors, pour toute martingale locale M à trajectoires continues, il existe un (unique) processus $h \in L^2_{loc}(B)$ et une constante C réelle tels que*

$$M_t = C + \int_0^t h(s,\omega)\, dB_s.$$

Démonstration : Pour une martingale locale à trajectoires continues, M, on a d'abord $M_0 = C \in \mathbb{R}$ parce que $\mathcal{F}_0$ est $\mathbb{P}$-triviale (ce qu'on peut déduire soit de la première partie de la preuve soit du Chapitre 3). Soit $T_n = \inf(t \geq 0 : |M_t| \geq n)$, M^{T_n} est une martingale locale arrêtée donc une martingale locale et bornée par définition de l'arrêt. Il s'agit donc d'une vraie martingale. Comme en particulier elle est bornée dans $L^2(\mathcal{F}_\infty)$, le Théorème 7.23 s'applique et donne $h_n \in L^2(B)$ tel que

$$M_t^{T_n} = C + \int_0^t h_n(s,\omega)\, dB_s.$$

Par unicité dans la deuxième partie, si $m < n$, on a $h_n(s,\omega) = h_m(s,\omega)$, ds-pp sur $[0, T_m]$ ps. Il est alors facile de construire $h \in L^2_{loc}(B)$ tel que, pour tout m, $h(s,\omega) = h_m(s,\omega)$ ds-pp sur $[0, T_m]$ ps. La formule annoncée découle ensuite de la construction de l'intégrale stochastique $\int_0^t h(s,\omega)\, dB_s$ et l'unicité de $h \in L^2_{loc}(B)$ s'obtient aussi facilement par un argument de localisation de l'unicité dans le Théorème 7.23. □

Remarque 7.25 Sous les hypothèses du Théorème 7.23, notons $\mathcal{N}$ la classe des $\mathbb{P}$-négligeables de $\sigma(B_t : t \geq 0)$ et pour tout $t \geq 0$, $\mathcal{G}_t = \sigma(B_s : 0 \leq s \leq t) \vee \mathcal{N}$. A priori, on a $\mathcal{F}_t = \mathcal{G}_{t^+}$. En fait, le Théorème 7.23 entraîne que $\mathcal{G}_t = \mathcal{G}_{t^+} = \mathcal{F}_t$ (le cas $t = 0$ est la loi de Blumenthal !). En effet, si Z est une variable aléatoire $\mathcal{F}_t$-mesurable bornée, on a

$$Z = \int_0^t h(s,\omega)\, dB_s = (L^2)\text{-}\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^{t-\varepsilon} h(s,\omega)\, dB_s$$

et quitte à prendre une sous-suite, on voit que Z est limite ps de variables $(\mathcal{G}_t)_t$-mesurables (car si $\varepsilon > 0$: $\mathcal{F}_{t-\varepsilon} \subset \mathcal{G}_t$).

7.7 Formules de Tanaka

La formule de Tanaka est une variation autour de la formule d'Itô pour des fonctions qui ne sont pas C^2.

Théorème 7.26 (Formules de Tanaka) *Soit X une semimartingale à trajectoires continues. Il existe $(L_t^a)_{t\geq 0}$, $a \in \mathbb{R}$, processus croissant à trajectoires continues, appelé* **temps local** *en a de la semimartingale X, tel que*

$$(X_t - a)^+ = (X_0 - a)^+ + \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s > a\}} dX_s + \frac{1}{2} L_t^a \tag{7.37}$$

$$(X_t - a)^- = (X_0 - a)^- - \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s \leq a\}} dX_s + \frac{1}{2} L_t^a \tag{7.38}$$

$$|X_t - a| = |X_0 - a| + \int_0^t \mathrm{sgn}(X_s - a) dX_s + L_t^a \tag{7.39}$$

où $\mathrm{sgn}(x) = -1, 1$ *selon que $x \leq 0, x > 0$. De plus, la mesure (de Stieltjes) dL_t^a associée à L_t^a est portée par $\{t \in \mathbb{R} : X_t = a\}$.*

Démonstration : On considère d'abord φ une fonction convexe continue. Bien que φ ne soit pas C^2, on tente d'écrire une formule d'Itô pour $\varphi(X_t)$.

Soit j une fonction positive de classe C^∞ à support compact inclus dans $[0, +\infty[$ telle que $\int_0^{+\infty} j(y)dy = 1$. On pose $e_n(y) = nj(ny)$ et $\varphi_n = \varphi * e_n$, soit

$$\varphi_n(x) = \int \varphi(x - y) e_n(y)\, dy = n \int_0^{+\infty} \varphi(x - y) j(ny)\, dy.$$

Comme φ convexe est localement bornée, φ_n est bien définie. De plus, φ_n est C^∞ et converge simplement vers φ et φ_n' croît vers φ_-', dérivée à gauche de φ.

En appliquant la formule d'Itô à la fonction φ_n de classe C^2, on a pour chaque $n \geq 1$:

$$\varphi_n(X_t) = \varphi_n(X_0) + \int_0^t \varphi_n'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} A_t^n \tag{7.40}$$

où $A_t^n = \int_0^t \varphi_n''(X_s) d\langle X, X\rangle_s$.

On a $\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(X_t) = \varphi(X_t)$ et $\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(X_0) = \varphi(X_0)$. En arrêtant X, on peut supposer que X et $\varphi_n'(X_s)$ sont bornées (uniformément en n car $\varphi_1' \leq \varphi_n' \leq \varphi_-'$). Par le théorème de convergence dominée pour l'intégrale stochastique (Th. 6.22), on a alors

$$\int_0^t \varphi_n'(X_s) dX_s \xrightarrow{\mathbb{P}} \int_0^t \varphi_-'(X_s) dX_s$$

uniformément sur les compacts. Par conséquent, A^n converge vers un processus A^φ croissant car limite de processus croissants. En passant à la limite dans (7.40), il vient

$$\varphi(X_t) = \varphi(X_0) + \int_0^t \varphi_-'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} A_t^\varphi \tag{7.41}$$

puis le processus A^φ peut être choisi continu (par indistinguabilité car il s'exprime comme différence de processus continus).

On applique (7.41) à $\varphi(x) = (x-a)^+$ fonction convexe de dérivée à gauche $\varphi'_- = \mathbf{1}_{]a,+\infty[}$: il existe un processus croissant A^+ tel que

$$(X_t - a)^+ = (X_0 - a)^+ + \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s > a\}} dX_s + \frac{1}{2} A_t^+. \tag{7.42}$$

De la même façon avec $\varphi(x) = (x-a)^-$ fonction convexe de dérivée à gauche $\varphi'_- = -\mathbf{1}_{]-\infty,a]}$: il existe un processus croissant A^- tel que

$$(X_t - a)^- = (X_0 - a)^- - \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s \le a\}} dX_s + \frac{1}{2} A_t^-. \tag{7.43}$$

Par différence de (7.42) et (7.43), comme $x = x^+ - x^-$, on a

$$X_t = X_0 + \int_0^t dX_s + \frac{1}{2}(A_t^+ - A_t^-). \tag{7.44}$$

Il vient $A^+ = A^-$ et on pose alors $L_t^a := A_t^+$. En sommant (7.42) et (7.43), comme $|x| = x^+ + x^-$, on a

$$|X_t - a| = |X_0 - a| + \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s - a) dX_s + L_t^a.$$

Pour la dernière partie, en appliquant la formule d'Itô à la semimartingale $|X_t - a|$ avec $f(x) = x^2$, on a en utilisant aussi (7.44)

$$\begin{aligned} |X_t - a|^2 &= |X_0 - a|^2 + 2\int_0^t |X_s - a|\, d(|X_s - a|)_s + \langle |X-a|, |X-a| \rangle_t \\ &= (X_0 - a)^2 + 2\int_0^t |X_s - a| \operatorname{sgn}(X_s - a)\, dX_s + 2\int_0^t |X_s - a|\, dL_s^a + \langle X, X \rangle_t. \end{aligned}$$

En comparant avec la formule d'Itô pour X avec $f(x) = (x-a)^2$,

$$(X_t - a)^2 = (X_0 - a)^2 + 2\int_0^t (X_s - a)\, dX_s + \langle X, X \rangle_t,$$

il vient $\int_0^t |X_s - a|\, dL_s^a = 0$ ps, ce qui est le résultat. $\square$

Exemple 7.27 Pour le mouvement brownien B, la formule de Tanaka (Th. 7.26) s'écrit :

$$\begin{aligned} |B_t| &= \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s)\, dB_s + L_t^B \\ &= \beta_t + L_t^B, \end{aligned} \tag{7.45}$$

où $L^B=(L^B_t)_{t\geq 0}$ est le temps local du mouvement brownien en 0. Par le théorème de Lévy (Th. 7.9), on observe $\beta_t=\int_0^t \mathrm{sgn}(B_s)\,dB_s$, $t\geq 0$, est un (autre) mouvement brownien. L'identité (7.45) ci-dessus correspond aussi la décomposition de Doob-Meyer de la semi-martingale $(|B_t|)_{t\geq 0}$.

Lorsque $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction convexe, on peut préciser (7.41) en utilisant le temps local $(L^a_t)_{t\geq 0 a\in\mathbb{R}}$ et la mesure μ_φ associée à φ convexe par

$$\mu_\varphi([a,b[)=\varphi'_-(b)-\varphi'_-(a). \tag{7.46}$$

Théorème 7.28 (Formule d'Itô-Tanaka) *Soit X une semimartingale à trajectoires continues et $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction convexe. On a*

$$\varphi(X_t)=\varphi(X_0)+\int_0^t \varphi'_-(X_s)dX_s+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} L^a_t\,\mu_\varphi(da). \tag{7.47}$$

Remarque 7.29

— Noter que lorsque $\varphi=|x|$, on a $\varphi'_-(x)=\mathrm{sgn}(x)$ et

$$\mu_\varphi([a,b[)=\varphi'_-(b)-\varphi'_-(a)=\mathrm{sgn}(b)-\mathrm{sgn}(a)=2\delta_0([a,b]).$$

donc $\mu_\varphi=2\delta_0$ et (7.47) retrouve bien (7.39).

— La formule (7.47) se généralise immédiatement à une combinaison linéaire de fonctions convexes $\varphi=\sum_{i=1}^p\alpha_i\varphi_i$. Dans ce cas, μ_φ devient une mesure signée.

Démonstration : On commence par localiser X en utilisant le temps d'arrêt T_n donné par

$$T_n=\min\Big(t\geq 0:|X_t|=n,\langle X,X\rangle_t=n,\mathrm{Var}^{(1)}(A,[0,t])=n\Big)$$

où A est la partie à variation bornée de X et $\mathrm{Var}^{(1)}(A,[0,t])$ sa variation totale sur $[0,t]$. Ainsi pour la semimartingale arrêtée X^{T_n}, on a

$$\sup_{t\geq 0}|X^{T_n}_t|\leq n,\quad \langle X^{T_n},X^{T_n}\rangle_\infty\leq n,\quad \mathrm{Var}^{(1)}(A^{T_n},[0,t])=n.$$

Quitte à utiliser un argument de localisation par un arrêt adéquat, on peut supposer

$$\sup_{t\geq 0}|X_t|\leq K,\quad \langle X,X\rangle_\infty\leq K,$$

variation bornée de la partie variation bornée de X bornée K,

On peut supposer également que φ'_- est constante hors de $[-n,n]$ de sorte que μ_φ en (7.46) a pour support $[-n,n]$. Pour $x\in[-n,n]$ fixé, on pose alors

$$g_x(a)=\begin{cases}0 & \text{pour } a\leq -n-1\\ (x+n)(a+n+1) & \text{pour } -n-1\leq a\leq -n\\ x-a & \text{pour } -n\leq a\leq x\\ 0 & \text{pour } x\leq a.\end{cases}$$

On observe que g_x est C^1 par morceaux et $g_x(a) = (x-a)^+$ sur le support $[-n, n]$ de μ_φ. Par intégration par parties dans une intégrale de Stieltjes avec g_x C^1 par morceaux, par définition de μ_φ en (7.46) on a

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^+\,\mu_\varphi(da) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_x(a)\,\mu_\varphi(da) &= -\int_{-\infty}^{+\infty} g_x'(a)\varphi_-'(a)\,da\\ &= -(x+n)\int_{-n-1}^{-n}\varphi_-'(a)\,da + \int_{-n}^{x}\varphi_-'(a)\ da\\ &= -(x+n)\varphi_-'(-n) + \varphi(x) - \varphi(-n),\end{aligned} \tag{7.48}$$

et par définition de la mesure μ_φ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{1}_{]a,+\infty[}(x)\,\mu_\varphi(da) = \mu_\varphi([-n, x[) = \varphi_-'(x) - \varphi_-'(-n). \tag{7.49}$$

En intégrant la formule de Tanaka (7.37) pour $(x-a)^+$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}(X_t^{T_n}-a)^+\mu_\varphi(da) = \int_{-\infty}^{+\infty}(X_0^{T_n}-a)^+\mu_\varphi(da) + \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s^{T_n}>a\}}dX_s^{T_n}\right)\mu_\varphi(da)\\ + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(L_t^a)^{T_n}\,\mu_\varphi(da).\end{aligned}$$

En utilisant (7.48) pour $x = X_t^{T_n}$ et $x = X_0^{T_n}$ puis (7.49) combiné avec le théorème de Fubini ci-dessous :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s^{T_n}>a\}}dX_s^{T_n}\,\mu_\varphi(da) &= \int_0^t\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{1}_{]a,+\infty[}(X_s^{T_n})\,\mu_\varphi(da)\right)dX_s^{T_n}\\ &= \int_0^t\big(\varphi_-'(X_s^{T_n}) - \varphi_-'(-n)\big)\,dX_s^{T_n}\\ &= \left(\int_0^t\varphi_-'(X_s^{T_n})\,dX_s^{T_n}\right) - \varphi_-'(-n)(X_t^{T_n} - X_0^{T_n}),\end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}&-(X_t^{T_n}+n)\varphi_-'(-n) + f(X_t^{T_n}) - f(-n) = -(X_0^{T_n}+n)\varphi_-'(-n) + f(X_0^{T_n}) - f(-n)\\ &+\left(\int_0^t\varphi_-'(X_s^{T_n})\,dX_s^{T_n}\right) - \varphi_-'(-n)(X_t^{T_n} - X_0^{T_n}) + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(L_t^a)^{T_n}\,\mu_\varphi(da).\end{aligned}$$

Après simplifications, on obtient

$$\varphi(X_t^{T_n}) = \varphi(X_0^{T_n}) + \int_0^t\varphi_-'(X_s^{T_n})dX_s^{T_n} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(L_t^a)^{T_n}\,\mu_\varphi(da)$$

puis la formule de Itô-Tanaka (7.47) en faisant $T_n \nearrow +\infty$ avec $n \to +\infty$. $\square$

Chapitre 8

Théorème de Girsanov

La formule d'Itô étudiée au Chapitre 7 explique comment se transforme une semimartingale quand on lui applique une transformation C^2. On étudie maintenant comment se transforme une semimartingale lorsqu'on change de mesure de probabilité $\mathbb{P}$. C'est l'objet du théorème de Girsanov qu'on prouve en Section 8.2 et dont on étudie les premières conséquences en Section 8.3.

Commençons par une approche heuristique pour des variables aléatoires : la densité gaussienne standard $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})$ possède la propriété suivante : $\phi(x-a) = \phi(x)e^{ax-a^2/2}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ qui se réécrit

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(N+a)] &= \int f(x+a)\phi(x)dx \\
&= \int f(x)\phi(x-a)dx \\
&= \int f(x)e^{ax-a^2/2}\phi(x)dx \\
&= \mathbb{E}[f(N)\exp(aN-a^2/2)] = \mathbb{E}_a[f(N)] \qquad (8.1)
\end{aligned}$$

pour f mesurable bornée et $N \sim \mathcal{N}(0,1)$ et en notant $\mathbb{E}_a$ pour l'espérance sous

$$d\mathbb{Q}^{(a)} = \exp(aN - a^2/2)\ d\mathbb{P}.$$

Observer que $\mathbb{Q}^{(a)}$ est bien une probabilité car le calcul précédent spécialisé à $f = 1$ assure $\mathbb{Q}^{(a)}(\Omega) = \mathbb{E}_a[1] = \mathbb{E}[1] = 1$.

L'identité (8.1) signifie que la variable aléatoire translatée $N + a$ suit la même loi que N en changeant la probabilité en $d\mathbb{Q}^{(a)} = \exp(aN - a^2/2)\ d\mathbb{P}$ ie. $\mathbb{P}_{N+a} = \mathbb{Q}^{(a)}_N$.
C'est cette observation, généralisée au mouvement brownien, qui constitue la formule de Cameron-Martin (1944, cf. Corollaire 8.15) puis le Théorème de Girsanov original (1960, cf. Corollaire 8.14). Ce théorème a ensuite été étendu à des martingales locales plus générales, c'est cette version que nous présentons.

Dans ce chapitre, on considère $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace filtré satisfaisant les conditions habituelles.

8.1 Logarithme stochastique

La propriété de martingale est liée à la probabilité utilisée : si on change $\mathbb{P}$ en $\mathbb{Q}$, une martingale X (pour $\mathbb{P}$) n'a pas de raison de rester une martingale pour $\mathbb{Q}$. Dans cette section, on étudie comment se transforme une semimartingale quand on change la probabilité $\mathbb{P}$ en $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$. La réponse est donnée par le Théorème de Girsanov (Th. 8.4). Pour éviter les confusions dans un tel contexte, on indique la probabilité par rapport à laquelle une martingale est considérée et on écrira ainsi : soit X une $\mathbb{P}$-martingale ou une $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P})$-martingale et on notera $\mathbb{E}_\mathbb{P}$ pour une espérance relative à $\mathbb{P}$.

Dans la suite, on considère $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_\infty$. Bien sûr, on a alors $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_t$ pour tout $t \geq 0$ et on note $D_t = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}_{|\mathcal{F}_t}$ la dérivée de Radon-Nikodym de $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_t$. Dans un contexte statistique, D s'appelle la vraisemblance de $\mathbb{Q}$ (par rapport à $\mathbb{P}$). Le processus D vérifie les propriétés suivantes :

Proposition 8.1 (Processus dérivée de Radon-Nikodym)

(1) D est une $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P})$-martingale uniformément intégrable.

(2) D admet une modification càdlàg ; pour cette version et pour tout temps d'arrêt T, on a $D_T = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}_{|\mathcal{F}_T}$.

(3) Si $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_\infty$ (ie. $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ et $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$) alors ps pour tout $t \geq 0$, $D_t > 0$.

Démonstration : 1) Pour $A \in \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_\infty$, on a

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_\mathbb{Q}[\mathbf{1}_A] = \mathbb{E}_\mathbb{P}[\mathbf{1}_A D_\infty] = \mathbb{E}_\mathbb{P}\big[\mathbf{1}_A \mathbb{E}_\mathbb{P}[D_\infty|\mathcal{F}_t]\big].$$

Comme $\mathbb{E}_\mathbb{P}[D_\infty|\mathcal{F}_t]$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable, par unicité de la dérivée de Radon-Nikodym, il vient $D_t = \mathbb{E}_\mathbb{P}[D_\infty|\mathcal{F}_t]$ ps, ce qui assure que D est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale (filtration complète) ; de plus, elle est uniformément intégrable car fermée.

2) D'après le Théorème 4.24 (régularisation trajectorielle des martingales), D admet une version càdlàg. On peut donc considérer que D est càdlàg, ce qui permet d'appliquer le théorème d'arrêt (D est uniformément intégrable) : si T est un temps d'arrêt et $A \in \mathcal{F}_T$, on a :

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_\mathbb{Q}[\mathbf{1}_A] = \mathbb{E}_\mathbb{P}[\mathbf{1}_A D_\infty] = \mathbb{E}_\mathbb{P}[\mathbf{1}_A D_T].$$

Comme D_T est $\mathcal{F}_T$-mesurable, par unicité de la dérivée de Radon-Nikodym, on a $D_T = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}_{|\mathcal{F}_T}$.

3) Posons $S = \inf\big(t \geq 0 : D_t = 0\big)$; il s'agit d'un temps d'arrêt. Sur $\{S < +\infty\}$, on peut considérer $s_n \searrow S$ avec $D_{s_n} = 0$, la continuité à droite de D assure alors $D_S = 0$. Avec $A = \{S < +\infty\} \in \mathcal{F}_S$, on a d'après le 2) : $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_\mathbb{P}[\mathbf{1}_A D_S] = 0$ et donc par hypothèse on a aussi $\mathbb{P}(A) = 0$. Ainsi, $S = +\infty$ $\mathbb{P}$ (ou $\mathbb{Q}$)-presque sûrement, c'est à dire $D_t > 0$ pour tout $t \geq 0$. □

Dans la suite, on suppose en général D à trajectoires continues. La notion d'exponentielle stochastique a été visitée au Chapitre 7. On lui associe maintenant la notion de logarithme stochastique :

Proposition 8.2 (Logarithme stochastique) *Soit D une martingale locale à trajectoires continues strictement positive. Alors, il existe une unique martingale locale, à trajectoires continues, L, appelée logarithme stochastique de D, telle que*

$$D_t = \exp\left(L_t - \frac{1}{2}\langle L, L\rangle_t\right) = \mathcal{E}(L)_t. \tag{8.2}$$

De plus, L est donnée par l'expression

$$L_t = \ln D_0 + \int_0^t D_s^{-1} dD_s. \tag{8.3}$$

Démonstration : Unicité. Si $D_t = \exp\left(L_t - \frac{1}{2}\langle L, L\rangle_t\right) = \exp\left(L'_t - \frac{1}{2}\langle L', L'\rangle_t\right)$ pour tout $t \geq 0$ alors $L_t - L'_t = \frac{1}{2}\langle L, L\rangle_t - \frac{1}{2}\langle L', L'\rangle_t$ pour tout $t \geq 0$ ce qui exige $L = L'$ par le Théorème 5.30 (une martingale locale à variation bornée et issue de 0 est nulle !).

Existence. Prenons L donné par (8.3) et remarquons que

$$\langle L, L\rangle_t = \int_0^t \frac{d\langle D, D\rangle_s}{D_s^2}.$$

Comme $D > 0$ et ln est C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$, on applique la formule d'Itô à $\ln D$:

$$\ln D_t = \ln D_0 + \int_0^t \frac{dD_s}{D_s} - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d\langle D, D\rangle_s}{D_s^2} = L_t - \frac{1}{2}\langle L, L\rangle_t,$$

ce qui donne (8.2) en appliquant la fonction exponentielle. □

Proposition 8.3 ($\mathbb{P}$-martingale et $\mathbb{Q}$-martingale) *Soit $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_\infty$ et L le logarithme stochastique associé à la martingale $D_t = (d\mathbb{Q}/d\mathbb{P})_{|\mathcal{F}_t}$ qu'on suppose à trajectoires continues.*

(1) Soit X un processus continu adapté et T un temps d'arrêt tel que $(XD)^T$ est une $\mathbb{P}$-martingale alors X^T est une $\mathbb{Q}$-martingale.

(2) En particulier, si XD est une $\mathbb{P}$-martingale locale alors X est une $\mathbb{Q}$-martingale locale.

Démonstration : La seconde partie de la proposition découle facilement de la première partie qu'on se contente de prouver.
Pour cela, on a d'abord $X_t^T \in L^1(\mathbb{Q})$ car d'après la Proposition 8.1,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[|X_{T\wedge t}|] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|X_{T\wedge t} D_{T\wedge t}|] < +\infty,$$

puisque $(XD)^T$ est une $\mathbb{P}$-martingale. Puis considérons $s < t$ et $A \in \mathcal{F}_s$. Comme $A\cap\{T > s\} = A\cap\{T\le s\}^c \in \mathcal{F}_s$ et $(XD)^T$ est une $\mathbb{P}$-martingale, on a

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[\mathbf{1}_{A\cap\{T>s\}}X_{T\wedge t}D_{T\wedge t}\big] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[\mathbf{1}_{A\cap\{T>s\}}X_{T\wedge s}D_{T\wedge s}\big] \tag{8.4}$$

par propriété de $\mathbb{P}$-martingale pour $(XD)^T$. On a aussi $A\cap\{T > s\} \in \mathcal{F}_T$ car pour tout $u \ge 0$,

$$\begin{array}{ll} \text{si } s\le u & A\cap\{T>s\}\cap\{T\le u\}\in\mathcal{F}_s\cap\mathcal{F}_u\subset\mathcal{F}_u,\\ \text{si } s>u & A\cap\{T>s\}\cap\{T\le u\}=\emptyset\in\mathcal{F}_u. \end{array}$$

Comme aussi $A\cap\{T > s\} \in \mathcal{F}_s$, on a donc $A\cap\{T > s\} \in \mathcal{F}_{T\wedge s} \subset \mathcal{F}_{T\wedge t}$, l'égalité (8.4) se réécrit

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\big[\mathbf{1}_{A\cap\{T>s\}}X_{T\wedge t}\big] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\big[\mathbf{1}_{A\cap\{T>s\}}X_{T\wedge s}\big]$$

car on rappelle que par la Proposition 8.1 :

$$D_{T\wedge t} = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}_{|\mathcal{F}_{T\wedge t}}, \quad D_{T\wedge s} = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}_{|\mathcal{F}_{T\wedge s}}.$$

Par ailleurs, comme il est évident que $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbf{1}_{A\cap\{T\le s\}}X_{T\wedge t}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbf{1}_{A\cap\{T\le s\}}X_{T\wedge s}]$ (car dans ces deux intégrales $X_{T\wedge t} = X_T = X_{T\wedge s}$), il vient $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbf{1}_A X_{T\wedge t}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbf{1}_A X_{T\wedge s}]$ pour tout $A \in \mathcal{F}_s$. Cela établit que X^T est une $\mathbb{Q}$-martingale et prouve la Proposition 8.3. □

8.2 Théorème de Girsanov

Théorème 8.4 (Girsanov) *Soit $\mathbb{Q}\sim\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_\infty$ et L le logarithme stochastique (supposé à trajectoires continues) associé à la martingale $D_t = (d\mathbb{Q}/d\mathbb{P})_{|\mathcal{F}_t}$. Si M est une $(\mathcal{F}_t,\mathbb{P})$-martingale locale à trajectoires continues, alors le processus $\widetilde{M} = M - \langle M, L\rangle$ est une $(\mathcal{F}_t,\mathbb{Q})$-martingale locale à trajectoires continues.*

Démonstration : On applique la formule d'Itô avec $F(x, y) = xy$ de classe C^2 aux $\mathbb{P}$-semimartingales $\widetilde{M} = M - \langle M, L\rangle$ et D :

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_tD_t &= \widetilde{M}_0D_0 + \int_0^t \widetilde{M}_s dD_s + \int_0^t D_s d\widetilde{M}_s + \langle \widetilde{M}, D\rangle_t \\ &= M_0D_0 + \int_0^t \widetilde{M}_s dD_s + \int_0^t D_s dM_s - \int_0^t D_s d\langle M, L\rangle_s + \langle M, D\rangle_t \\ &= M_0D_0 + \int_0^t \widetilde{M}_s dD_s + \int_0^t D_s dM_s \end{aligned} \tag{8.5}$$

puisque d'après la Proposition 8.2 on a $d\langle M, L\rangle_s = D_s^{-1}d\langle M, D\rangle_s$. Comme M et D sont des $\mathbb{P}$-martingales locales, les intégrales stochastiques contre D et M en sont aussi aussi et l'égalité (8.5) montre alors que $\widetilde{M}D$ est une $\mathbb{P}$-martingale locale. La conclusion vient de la Proposition 8.3. □

En notant $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}^{\mathbb{P}}(M) := \widetilde{M}$, le Théorème 8.4 affirme que $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}^{\mathbb{P}}$ envoie l'ensemble des $\mathbb{P}$-martingales locales à trajectoires continues dans l'ensemble des $\mathbb{Q}$-martingales locales à trajectoires continues. On a aussi :

Corollaire 8.5 *Une $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P})$-martingale locale M á trajectoires continues reste une $(\mathcal{F}_t, \mathbb{Q})$-semimartingale à trajectoires continues avec la décomposition $M = \widetilde{M} + \langle M, L\rangle$.*

Démonstration : Comme $\widetilde{M}$ est une $\mathbb{Q}$-martingale et $\langle M, L\rangle$ est un processus à variation finie, l'écriture $M = \widetilde{M} + \langle M, L\rangle$ justifie l'affirmation. □

En particulier, ce corollaire montre que la classe des $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ semimartingales à trajectoires continues est contenue dans celle des $(\mathcal{F}_t, \mathbb{Q})$ semimartingales à trajectoires continues puisque si M est une $\mathbb{P}$-semimartingale de décomposition $M = N + A$ avec N une $\mathbb{P}$-martingale locale alors $M = \widetilde{N} + \langle N, L\rangle + A$ est une $\mathbb{Q}$-semimartingale puisque $\widetilde{N}$ est une $\mathbb{Q}$-martingale locale (Théorème 8.4) et $\langle N, L\rangle + A$ est un processus à variation finie. En fait, on a mieux :

Corollaire 8.6 *Sous les hypothèses du Théorème 8.4 (Girsanov), les classes des $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ semimartingales à trajectoires continues et des $(\mathcal{F}_t, \mathbb{Q})$ semimartingales à trajectoires continues coïncident.*

Démonstration : La classe des $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ semimartingales à trajectoires continues est incluse dans celle des $(\mathcal{F}_t, \mathbb{Q})$ semimartingales à trajectoires continues. Pour montrer l'inclusion réciproque, il suffit de montrer que sous les hypothèses du Théorème : 8.4 (Girsanov), les rôles de $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ sont symétriques. Notons que $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}_{|\mathcal{F}_t} = 1/\big(\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}_{|\mathcal{F}_t}\big) = D_t^{-1}$. On applique alors le Théorème 8.4 à $M = -L$. On a $\widetilde{M} = M - \langle M, L\rangle = -L + \langle L, L\rangle$ est une $\mathbb{Q}$-martingale locale à trajectoires continues avec $\langle \widetilde{M}, \widetilde{M}\rangle = \langle L, L\rangle$. Ainsi

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}\big(\widetilde{M}\big)_t &= \exp\left(\widetilde{M}_t - \frac{1}{2}\langle \widetilde{M}, \widetilde{M}\rangle_t\right) \\
&= \exp\left(-L_t + \langle L, L\rangle_t - \frac{1}{2}\langle L, L\rangle_t\right) \\
&= \exp\left(-L_t + \frac{1}{2}\langle L, L\rangle_t\right) \\
&= \mathcal{E}\big(L\big)_t^{-1} = D_t^{-1}.
\end{aligned}
$$

On peut donc échanger les rôles de $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ quitte à remplacer D par D^{-1} et L par $-L + \langle L, L\rangle$. □

Corollaire 8.7 *Sous les hypothèses du Théorème 8.4, on a* $\mathcal{G}_{\mathbb{P}}^{\mathbb{Q}} \circ \mathcal{G}_{\mathbb{Q}}^{\mathbb{P}} = Id$.

Démonstration : En notant comme précédemment $\widetilde{M} = M - \langle M, L\rangle$ et $\widetilde{L} = -L + \langle L, L\rangle$, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}^{\mathbb{P}}(M) &= M - \langle M, L\rangle \\
\mathcal{G}_{\mathbb{P}}^{\mathbb{Q}}(N) &= N - \langle N, \widetilde{L}\rangle \\
&= N - \big\langle N, (-L + \langle L, L\rangle)\big\rangle \\
&= N + \langle N, L\rangle
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{\mathbb{P}}^{\mathbb{Q}} \circ \mathcal{G}_{\mathbb{Q}}^{\mathbb{P}}(M) &= \mathcal{G}_{\mathbb{Q}}^{\mathbb{P}}(M) + \langle \mathcal{G}_{\mathbb{Q}}^{\mathbb{P}}(M), L\rangle \\
&= M - \langle M, L\rangle + \big\langle (M - \langle M, L\rangle), L\big\rangle \\
&= M - \langle M, L\rangle + \langle M, L\rangle = M.
\end{aligned}$$

□

Corollaire 8.8 (Girsanov et intégrale stochastique) *La transformation de Girsanov* $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}^{\mathbb{P}}$ *commute avec l'intégrale stochastique, ie. si* H *est un processus localement borné alors* $\int_0^{\cdot} H_s\, d(\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}^{\mathbb{P}}(M))_s = \mathcal{G}_{\mathbb{Q}}^{\mathbb{P}}\Big(\int_0^{\cdot} H_s\, dM_s\Big)$.

Démonstration : On a

$$\begin{aligned}
\widetilde{\int_0^{\cdot} H_s dM_s} &= \int_0^{\cdot} H_s dM_s - \left\langle \int_0^{\cdot} H_s\, dM_s, L\right\rangle = \int_0^{\cdot} H_s\, dM_s - \int_0^{\cdot} H_s\, d\langle M, L\rangle_s \\
&= \int_0^{\cdot} H_s\, d(M - \langle M, L\rangle)_s = \int_0^{\cdot} H_s\, d\widetilde{M}_s.
\end{aligned}$$

□

Corollaire 8.9 *Soit* X, Y *deux semimartingales à trajectoires continues (relativement à* $\mathbb{P}$ *ou à* $\mathbb{Q}$*). La valeur du crochet* $\langle X, Y\rangle$ *est la même sous* $\mathbb{P}$ *et sous* $\mathbb{Q}$.

Démonstration : En effet dans les deux cas, $\langle X, Y\rangle$ est donné par l'approximation de la Proposition 5.47 qui ne change pas si on change $\mathbb{P}$ en $\mathbb{Q}$. Ou encore, le changement de probabilité n'affecte que la partie à variation finie d'une semimartingale donc pas son crochet. □

De même, si H est un processus localement borné, l'intégrale stochastique $H \cdot X$ est la même sous $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ (utiliser des approximations par des processus élémentaires).

Le Théorème de Girsanov s'utilise souvent à horizon fini :

Corollaire 8.10 *Pour $T > 0$ une date déterministe fixée, on se donne une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ et on suppose qu'elle vérifie les conditions habituelles (chaque $\mathcal{F}_t$ contient les $\mathbb{P}$-négligeables de $\mathcal{F}_T$). Si $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$, on définit comme précédemment la martingale $(D_t)_{t\in[0,T]}$ et, si D a une version à trajectoires continues, on définit la martingale $(L_t)_{t\in[0,T]}$. Alors, l'analogue du Théorème 8.4 (Girsanov) reste vrai pour $[0, T]$.*

8.3 Mise en œuvre de Girsanov

Dans les applications pratiques du théorème de Girsanov (Th. 8.4), on ne dispose pas en général de la probabilité $\mathbb{Q}$ mais plutôt de ce qui joue le rôle du logarithme stochastique L de sa dérivée de Radon-Nikodym $D = d\mathbb{Q}/d\mathbb{P}$. On reconstruit alors la probabilité $\mathbb{Q}$ comme suit :

— on part d'une martingale locale à trajectoires continues L telle que $L_0 = 0$;

— alors $\mathcal{E}(L)_t$ est une martingale locale à trajectoires continues à valeurs strictement positives, c'est donc une surmartingale (Proposition 5.24) ;

— cela assure l'existence ps de la limite $\mathcal{E}(L)_\infty$ (Théorème 4.25) ; en plus, d'après le lemme de Fatou, on a
$$\mathbb{E}[\mathcal{E}(L)_\infty] \leq 1 \tag{8.6}$$
puisque
$$\mathbb{E}[\mathcal{E}(L)_\infty] = \mathbb{E}\left[\lim_{t\to+\infty} \mathcal{E}(L)_t\right] = \mathbb{E}\left[\liminf_{t\to+\infty} \mathcal{E}(L)_t\right] \leq \liminf_{t\to+\infty} \mathbb{E}[\mathcal{E}(L)_t] \leq 1 \tag{8.7}$$
car, si $0 \leq s \leq t$, $\mathbb{E}[\mathcal{E}(L)_t] \leq \mathbb{E}[\mathcal{E}(L)_s] \leq \mathbb{E}[\mathcal{E}(L)_0] = 1$.

— Mais si on a égalité dans (8.6) :
$$\mathbb{E}[\mathcal{E}(L)_\infty] = 1, \tag{8.8}$$
on a bien mieux : dans ce cas, $\mathbb{Q} = \mathcal{E}(L)_\infty \cdot \mathbb{P}$ est une probabilité équivalente à $\mathbb{P}$ avec processus dérivée de Radon-Nikodym $D = \mathcal{E}(L)$ et donc de logarithme stochastique L. Cela assure qu'on est donc bien dans le cadre du théorème de Girsanov (Th. 8.4).

En pratique, si M est une $\mathbb{P}$-martingale locale, si on change sa partie à variation finie en retranchant $\langle M, L\rangle$, on a toujours une martingale locale en changeant $\mathbb{P}$ en $\mathbb{Q}$, probabilité équivalente de densité donnée par l'exponentielle stochastique $\mathcal{E}(L)$. Il faut cependant que la condition (8.8) soit satisfaite. Il est donc important de pouvoir donner des conditions qui assurent (8.8). C'est l'objet du résultat suivant :

Théorème 8.11 (Conditions de Novikov) *Soit L une martingale locale à trajectoires continues telle que $L_0 = 0$. Considérons les conditions suivantes :*

(1) $\mathbb{E}\big[\exp \frac{1}{2}\langle L, L\rangle_\infty\big] < +\infty$ *;*

(2) L est une martingale uniformément intégrable et $\mathbb{E}\big[\exp(\frac{1}{2}L_\infty)\big] < +\infty$ *;*

(3) $\mathbb{E}[\mathcal{E}(L)_\infty] = 1$*, c'est à dire (8.8) :*

(4) $\mathcal{E}(L)$ *est une martingale uniformément intégrable et* $\mathbb{Q} = \mathcal{E}(L)_\infty \mathbb{P}$ *définit une probabilité.*

Alors on a les implications 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4).

Démonstration : $\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$ Comme d'après (1) $\mathbb{E}[\langle L, L\rangle_\infty] < +\infty$, L est une vraie martingale bornée dans L^2 (cf. Th. 5.36). Elle est donc uniformément intégrable. Puis, par définition de $\mathcal{E}(L)_\infty$:

$$\exp\Big(\frac{1}{2}L_\infty\Big) = \mathcal{E}(L)_\infty^{1/2} \exp\Big(\frac{1}{2}\langle L, L\rangle_\infty\Big)^{1/2}.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, comme l'inégalité (8.6) est toujours vraie, on a

$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big(\frac{1}{2}L_\infty\Big)\Big] \leq \mathbb{E}\left[\mathcal{E}(L)_\infty\right]^{1/2} \mathbb{E}\Big[\exp\Big(\frac{1}{2}\langle L, L\rangle_\infty\Big)\Big]^{1/2} \leq \mathbb{E}\Big[\exp\Big(\frac{1}{2}\langle L, L\rangle_\infty\Big)]^{1/2} < +\infty.$$

$\boxed{(2) \Rightarrow (3)}$ Puisque L est une martingale uniformément intégrable, elle est fermée et on a $L_t = \mathbb{E}[L_\infty|\mathcal{F}_t]$. Par l'inégalité de Jensen avec exponentielle, on a alors

$$\exp\Big(\frac{1}{2}L_t\Big) = \exp\Big(\frac{1}{2}\mathbb{E}[L_\infty|\mathcal{F}_t]\Big) \leq \mathbb{E}\Big[\exp\Big(\frac{1}{2}L_\infty\Big)\Big|\mathcal{F}_t\Big],$$

ce qui assure, par (2), que $\exp(\frac{1}{2}L_t) \in L^1$. Par convexité de exp, $\exp(\frac{1}{2}L_t)$ est une sous-martingale qui, par l'inégalité précédente, est fermée par $\exp(\frac{1}{2}L_\infty)$ (en tant que sous-martingale). En appliquant le théorème d'arrêt (Th. 4.32) pour les (sur)sous-martingales fermées, pour tout temps d'arrêt T, on a $\exp(\frac{1}{2}L_T) \leq \mathbb{E}[\exp(\frac{1}{2}L_\infty)|\mathcal{F}_T]$. Cela assure que la famille $\big\{\exp(\frac{1}{2}L_T) : T \text{ temps d'arrêt}\big\}$ est uniformément intégrable.

On commence par montrer que $\mathcal{E}(aL)$ est une vraie martingale uniformément intégrable-pour tout $0 < a < 1$. Pour un tel $a \in]0, 1[$ fixé, on pose $Z_t^{(a)} = \exp\big(\frac{aL_t}{1+a}\big)$. Un calcul direct donne

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(aL)_t &= \exp\Big(aL_t - \frac{a^2}{2}\langle L, L\rangle_t\Big) \\
&= \exp\Big(a^2 L_t - \frac{a^2}{2}\langle L, L\rangle_t\Big)\exp(a(1-a)L_t) \\
&= (\mathcal{E}(L)_t)^{a^2}(Z_t^{(a)})^{1-a^2}.
\end{aligned}$$

Soit $\Gamma \in \mathcal{F}_\infty$ et T est un temps d'arrêt. L'inégalité de Hölder avec les indices conjugués $p = 1/a^2$ et $q = 1/(1-a^2)$ donne

$$\mathbb{E}\big[\mathbf{1}_\Gamma \mathcal{E}(aL)_T\big] \leq \mathbb{E}\big[\mathcal{E}(L)_T\big]^{a^2} \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_\Gamma Z_t^{(a)}\big]^{1-a^2} \leq \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_\Gamma Z_t^{(a)}\big]^{1-a^2} \tag{8.9}$$

où, pour la dernière inégalité, on a utilisé que $\mathcal{E}(L)$ est une surmartingale positive, ie.

$$\mathbb{E}\left[\mathcal{E}(L)_T\right] \leq \mathbb{E}\left[\mathcal{E}(L)_0\right] = 1.$$

En utilisant l'inégalité de Jensen avec $\varphi(x) = x^{(1+a)/(2a)}$ (convexe pour $0 < a < 1$), on a

$$\left(\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_\Gamma Z_t^{(a)}\right]\right)^{(1+a)/(2a)} = \varphi\left(\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_\Gamma Z_t^{(a)}\right]\right) \leq \mathbb{E}\left[\varphi(\mathbf{1}_\Gamma Z_t^{(a)})\right] = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_\Gamma \exp\left(\frac{1}{2}L_T\right)\right],$$

ce qui permet de poursuivre (8.9) en

$$\mathbb{E}\big[\mathbf{1}_\Gamma \mathcal{E}(aL)_T\big] \leq \mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_\Gamma \exp\left(\frac{1}{2}L_T\right)\Big]^{2a(1-a)}. \tag{8.10}$$

Comme la famille $\big\{\exp(\frac{1}{2}L_T) : T \text{ temps d'arrêt}\big\}$ est uniformément intégrable, l'inégalité (8.10) montre que la famille $\big\{\mathcal{E}(aL)_T : T \text{ temps d'arrêt}\big\}$ l'est aussi. D'après la Proposition 5.27, cela entraîne alors que $\mathcal{E}(aL)$ est une vraie martingale uniformément intégrable. Il suit alors

$$1 = \mathbb{E}\left[\mathcal{E}(aL)_0\right] = \mathbb{E}\left[\mathcal{E}(aL)_\infty\right] \leq \mathbb{E}\left[\mathcal{E}(L)_\infty\right]^{a^2} \mathbb{E}\left[Z_\infty^{(a)}\right]^{1-a^2} \leq \mathbb{E}\left[\mathcal{E}(L)_\infty\right]^{a^2} \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}L_\infty\right)\right]^{2a(1-a)}$$

avec, à nouveau pour la dernière égalité, l'inégalité de Jensen avec $\varphi(x) = x^{(1+a)/(2a)}$. En faisant $a \to 1$, la dernière borne implique $\mathbb{E}\left[\mathcal{E}(L)_\infty\right] \geq 1$ et donc avec (8.6) toujours valable on a obtenu $\mathbb{E}\left[\mathcal{E}(L)_\infty\right] = 1$.

$\boxed{(3) \Rightarrow (4)}$ On montre d'abord que $\mathcal{E}(L)$ est une vraie martingale sous (8.8) : en effet sous (8.8), il y a égalité dans les inégalités (8.7), soit nécessairement $\mathbb{E}[\mathcal{E}(L)_t] = \mathbb{E}[\mathcal{E}(L)_s]$ pour tout $s \leq t$, ce qui combiné avec $\mathbb{E}[\mathcal{E}(L)_t|\mathcal{F}_s] \leq \mathcal{E}(L)_s$ exige $\mathbb{E}[\mathcal{E}(L)_t|\mathcal{F}_s] = \mathcal{E}(L)_s$, c'est à dire $\mathcal{E}(L)$ est une vraie martingale.

Puis comme $\mathcal{E}(L)_t \xrightarrow{ps} \mathcal{E}(L)_\infty$ avec $\mathbb{E}\big[|\mathcal{E}(L)_t|\big] = \mathbb{E}\big[|\mathcal{E}(L)_\infty|\big] = 1$ alors le lemme de Scheffé (Lemme 8.12 ci-dessous) garantit que $\mathcal{E}(L)_t \to \mathcal{E}(L)_\infty$ dans L^1.

D'après le Th. 4.28 sur la convergence des martingales, c'est équivalent à avoir $\mathcal{E}(L)$ uniformément intégrable (ou martingale fermée). □

Lemme 8.12 (Scheffé) *Soit $X_n \xrightarrow{ps} X$. Alors $\mathbb{E}\big[|X_n|\big] \to \mathbb{E}\big[|X|\big]$ si et seulement si $\mathbb{E}\big[|X_n - X|\big] \to 0$, ie. $X_n \to X$ dans L^1.*

8.4 Girsanov dans le cadre brownien

Dans cette section, on spécialise de plus en plus le théorème de Girsanov (Th. 8.4) dans le cadre brownien.

Corollaire 8.13 (Girsanov brownien 1) *Soit B un $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P})$-mouvement brownien et L satisfaisant (8.8) (en satisfaisant une des conditions de Novikov du Th. 8.11). Alors $\widetilde{B} = B - \langle B, L\rangle$ est un $(\mathcal{F}_t, \mathbb{Q})$-mouvement brownien.*

Démonstration : Par le Théorème 8.4 (Girsanov), $\widetilde{B} = B - \langle B, L\rangle$ est une $(\mathcal{F}_t, \mathbb{Q})$-martingale locale à trajectoires continues de variation quadratique $\langle \widetilde{B}, \widetilde{B}\rangle_t = \langle B, B\rangle_t = t$, $t \geq 0$. Le Théorème de Lévy (Th. 7.9) assure alors que $\widetilde{B}$ est un $(\mathcal{F}_t, \mathbb{Q})$-mouvement brownien. □

Dans le corollaire suivant, on prend $L_t = \int_0^t f(s)dB_s$; il s'agit du théorème de Girsanov original (1960). On rappelle que, pour le mouvement brownien B,

$$L^2_{loc}(B) = \left\{H : \Omega \to \mathbb{R} : \text{ progressif avec pour tout } t \geq 0\ \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s(\cdot)^2 ds\right] < +\infty\right\}$$

et ici on considère

$$L^2_{[0,T]}(B) = \left\{H : \Omega \to \mathbb{R} : \text{ progressif avec } \mathbb{E}\left[\int_0^T H_s(\cdot)^2 ds\right] < +\infty\right\}.$$

Corollaire 8.14 (Girsanov brownien 2) *Soit B un $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P})$-mouvement brownien et, pour T déterministe fixé, $f \in L^2_{[0,T]}(B)$ telle que $L_t = \int_0^t f(s)dB_s$ satisfait (8.8) (en satisfaisant une des conditions de Novikov du Th. 8.11). Soit $\mathbb{Q}$ de densité (par rapport à $\mathbb{P}$)*

$$D_T = \exp\left(\int_0^T f(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T f(s)^2 ds\right).$$

Sous $\mathbb{Q}$, le processus B s'écrit

$$B_t = B_t^{\mathbb{Q}} + \int_0^t f(s)ds \tag{8.11}$$

où $B^{\mathbb{Q}}$ est un $(\mathcal{F}_t, \mathbb{Q})$-mouvement brownien.

Démonstration : On applique le théorème de Girsanov (Th. 8.4) à $M = B$ avec $L_t = \int_0^t f(s)dB_s$ et on remarque que $\langle B, L\rangle_t = \int_0^t f(s)ds$. Alors $\widetilde{B} = B - \langle B, L\rangle = B^{\mathbb{Q}}$ est une $\mathbb{Q}$-martingale locale à trajectoires continues de crochet $\langle \widetilde{B}, \widetilde{B}\rangle_t = \langle B, B\rangle_t = t$. Donc $B^{\mathbb{Q}} = \widetilde{B}$ est un $\mathbb{Q}$-mouvement brownien. □

On spécialise encore davantage le théorème de Girsanov (Th. 8.4) dans le cadre brownien en prenant maintenant des intégrales stochastiques avec des intégrants f déterministes. On obtient la formule de Cameron-Martin (1944) :

Corollaire 8.15 (Cameron-Martin) *Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P})$-mouvement brownien et $f \in L^2([0,T])$.*

(1) La variable aléatoire

$$D_T = \exp\left(\int_0^T f(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T f(s)^2 ds\right)$$

est une densité de probabilité qui définit une probabilité $\mathbb{Q}$ (par $d\mathbb{Q} = D_T d\mathbb{P}$).

(2) Le processus

$$B_t^{\mathbb{Q}} = B_t - \int_0^{t\wedge T} f(s)ds, t \geq 0,$$

est un $\mathbb{Q}$-mouvement brownien. Autrement dit, sous $\mathbb{Q}$, le $\mathbb{P}$-mouvement brownien B s'écrit

$$B_t = B_t^{\mathbb{Q}} + \int_0^t f(s)ds.$$

Démonstration : Il suffit de prouver le point 1). Le point 2) est alors donné par le Corollaire 8.14. On prend $L_t = \int_0^t f(s)dB_s$ dans (8.2). On a $\langle L, L\rangle_t = \int_0^t f(s)^2 ds$ et comme f est déterministe, la condition $\mathbb{E}[\exp\langle L, L\rangle_T] < +\infty$ est garantie. Le Théorème 8.11 assure alors la condition de Novikov (8.8) et donc $(D_t)_{t\in[0,T]}$ est bien une densité de probabilité et $\mathbb{Q}$ une probabilité. □

Dans le cadre gaussien pour $L_t = \int_0^t f(s)\ dB_s$ avec $f \in L^2_{[0,T]}(B)$, on donne une condition plus explicite qui garantit (8.8) mais pour un horizon T fini :

Proposition 8.16 *Soit T une date déterministe fixée et $f \in L^2_{[0,T]}(B)$. On suppose qu'il existe $a > 0$ et $C \in]0, +\infty[$ tels que pour tout $t \in [0, T]$ on ait*

$$\mathbb{E}\big[\exp(af(t)^2)\big] \leq C < +\infty,$$

alors $\mathbb{E}[\mathcal{E}(L)_T] = 1$, ie. la condition (8.8) garantissant le théorème de Girsanov (Th. 8.4) sur $[0, T]$ est satisfaite.

Démonstration : On localise afin de pouvoir appliquer la Proposition 7.7 qui garantit que si $\int_0^T f(s)^2 ds$ est bornée alors $\mathbb{E}\big[\mathcal{E}(\int_0^\cdot f(s)dB_s)_T\big] = 1$. Pour cela, on pose $\tau_n = \inf\big(t \geq 0 : \int_0^t f(s)^2 ds \geq n\big)$. La suite $f_n = f\mathbf{1}_{[0,\tau_n]}$ est telle que quand $n \to +\infty$

$$\int_0^T f_n(u)^2 du \leq n, \tag{8.12}$$

$$\int_0^T f_n(u)^2 du \nearrow \int_0^T f(u)^2 du, \tag{8.13}$$

$$\int_0^T f_n(u)dB_u \xrightarrow{L^2} \int_0^T f(u)dB_u \quad \text{(isométrie d'Itô)}. \tag{8.14}$$

On note $V_n = \mathcal{E}\big(\int_0^\cdot f_n(s)dB_s\big)$ et $V = \mathcal{E}\big(\int_0^\cdot f(s)dB_s\big)$. Avec ces notations, il s'agit de montrer que $\mathbb{E}[V(T)] = 1$. Fixons r, s tels que $0 \leq r \leq s \leq T$ avec $|s-r| \leq a/6$ et écrivons

$$\begin{aligned}\left(\frac{V_n(s)}{V_n(r)}\right)^2 &= \exp\left(2\int_r^s f_n(u)dB_u - \int_r^s f_n(u)^2 du\right)\\ &= \exp\left(2\int_r^s f_n(u)dB_u - 4\int_r^s f_n(u)^2 du\right)\exp\left(3\int_r^s f_n(u)^2 du\right).\end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left(\frac{V_n(s)}{V_n(r)}\right)^2\right]\\
&\leq \Bigg(\underbrace{\mathbb{E}\left[\exp\left(4\int_r^s f_n(u)dB_u - 8\int_r^s f_n(u)^2du\right)\right]}_{\mathbb{E}[\mathcal{E}(\int_r^\cdot f_n(u)dB_u)_s]=1}\Bigg)^{1/2} \times \left(\mathbb{E}\left[\exp\left(6\int_r^s f_n(u)^2du\right)\right]\right)^{1/2}\\
&= 1 \times \left(\mathbb{E}\left[\exp\left(6\int_r^s f_n(u)^2du\right)\right]\right)^{1/2}\\
&\leq \left(\int_r^s \mathbb{E}\big[\exp(6(s-r)f_n(u)^2)\big]\frac{du}{s-r}\right)^{1/2}\\
&\leq C^{1/2}
\end{aligned}$$

en utilisant le théorème de Fubini, l'inégalité de Jensen pour la fonction convexe exp et la mesure uniforme $du/(s-r)$ sur $[r,s]$ et enfin l'hypothèse sur $a \geq 6(s-r)$ ainsi que la Proposition 7.7 pour

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(4\int_r^s f_n(u)dB_u - 8\int_r^s f_n(u)^2du\right)\right] = 1.$$

Comme les moments d'ordre 2 de $\frac{V_n(s)}{V_n(r)}$ sont bornés, on en déduit que $\frac{V_n(s)}{V_n(r)}$ est uniformément intégrable. De plus, avec (8.13) et (8.14), on montre que $V_n(t) \xrightarrow{\mathbb{P}} V(t)$ (cf. preuve de la Proposition 7.7). On a donc aussi $\frac{V_n(s)}{V_n(r)} \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{V(s)}{V(r)}$ et avec le théorème de Vitali :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{V_n(s)}{V_n(r)} = \frac{V(s)}{V(r)} \quad \text{dans } L^1.$$

Par continuité L^1 de l'espérance conditionnelle, il vient

$$\mathbb{E}\left[\frac{V(s)}{V(r)}\Big|\mathcal{F}_r\right] = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[\frac{V_n(s)}{V_n(r)}\Big|\mathcal{F}_r\right] = 1$$

où la limite 1 vient de ce que pour f_n, on a (8.12), assurant par la Proposition 7.7 que $V_n = \mathcal{E}\big(\int_0^\cdot f_n(s)dB_s\big)$ est une vraie martingale :

$$\mathbb{E}\left[\frac{V_n(s)}{V_n(r)}\Big|\mathcal{F}_r\right] = \frac{\mathbb{E}[V_n(s)\,|\mathcal{F}_r]}{V_n(r)} = \frac{V_n(r)}{V_n(r)} = 1.$$

Pour conclure, on décompose $[0,T]$ en une subdivision $t_k = \frac{k}{m}T$, $0 \leq k \leq m$, avec m assez grand pour que le pas vérifie $T/m \leq a/6$. On écrit alors $V(T) = V(t_{m-1}) \times \big(V(t_m)/V(t_{m-1})\big)$ avec $V(t_{m-1})$ variable aléatoire $\mathcal{F}_{t_{m-1}}$-mesurable et par ce qui précède :

$$\mathbb{E}\big[V(t_m)/V(t_{m-1})\,|\mathcal{F}_{t_{m-1}}\big] = 1.$$

Finalement, par récurrence :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[V(T)] = \mathbb{E}[V(t_m)] &= \mathbb{E}\big[V(t_{m-1}) \times \big(V(t_m)/V(t_{m-1})\big)\big] \\ &= \mathbb{E}\big[V(t_{m-1})\mathbb{E}[V(t_m)/V(t_{m-1})\,|\mathcal{F}_{t_{m-1}}]\big] \\ &= \mathbb{E}[V(t_{m-1})] = 1,\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve de la Proposition 8.16. □

Exemple 8.17 (Étude du sup d'un mouvement brownien avec dérive) Pour étudier la loi du sup de $\widetilde{B}_t = B_t + bt$ sur $[0,T]$, il suffit de connaître la loi du couple $(B_T, \sup_{0\le t\le T} B_t)$. En effet, d'après la formule de Cameron-Martin, on a

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\le t\le T}(B_t+bt) \ge x\right) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(bB_T - \frac{1}{2}b^2T\right)\mathbf{1}_{\{\sup_{0\le t\le T} B_t \ge x\}}\right].$$

Exemple 8.18 (Application statistique à la détection d'un signal) Considérons un signal (temporel, déterministe) représenté par une fonction m. On cherche à tester la présence ou non du signal m. La difficulté vient de ce que le test se pratique dans une ambiance bruitée (représentée par B). On observe alors

— soit B (le bruit pur) si le signal est absent,

— soit $m + B$ (le signal utile m bruité par B) si le signal est présent.

L'observateur n'observe (!!) qu'une seule des deux fonctions (sans savoir laquelle) $\omega = (\omega_t : t \in [0,T]) \in \{B, m+B\}$ et le but est précisément de déterminer laquelle des deux fonctions il observe.

Plutôt que de considérer les deux fonctions aléatoires B et $m + B$ dont la loi est mesurée par la même probabilité $\mathbb{P}$, il est équivalent de considérer qu'il ne peut observer qu'une fonction X, qui modélise son observation, mais sous deux probabilités différentes selon que le signal est présent ou pas. Ainsi ω est observée avec la probabilité $\mathbb{P}(d\omega)$ ou $\mathbb{Q}(d\omega)$ selon le cas.

On suppose que

— le bruit est modélisé par un mouvement brownien B ;

— le signal est de la forme $m(t) = \int_0^t f(s)ds$ où f est déterministe mesurable.

On interprète alors m comme le crochet $m(t) = \langle B, \int_0^\cdot f(s)dB_s\rangle_t$. Sous la probabilité $\mathbb{Q}$ donnée par $d\mathbb{Q} = D_T d\mathbb{P}$ avec

$$D_T = \exp\left(\int_0^T f(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T f(s)^2 ds\right)$$

B est un processus (mouvement brownien) décentré par m (ie. $B = B^{\mathbb{Q}} + m$), tandis que sous $\mathbb{P}$, B est un mouvement brownien standard donc centré.

La vraisemblance associée à l'observation de la trajectoire ω est donnée par $D_T(\omega)$ qui vaut 1 s'il n'y a pas de signal et qui peut être très grand s'il y en a un. On en déduit une règle de décision : *si on observe ω, on décide que le signal est présent lorsque*

$$U := \int_0^T f(s)dB_s > \frac{1}{2}\operatorname{Var}_{\mathbb{P}}(U) = \frac{1}{2}\int_0^T f(s)^2 ds = \frac{1}{2}\sigma^2.$$

Cette règle n'est pas infaillible : Sous $\mathbb{P}$, $U \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2) \sim \sigma N_0$ (où $N_0 \sim \mathcal{N}(0,1)$) et si le signal m est réellement absent, la probabilité de prendre une mauvaise décision est

$$p = \mathbb{P}\Big(U > \frac{1}{2}\sigma^2\Big) = \mathbb{P}\Big(N_0 > \frac{1}{2}\sigma\Big).$$

Tandis que si le signal est vraiment présent, $\mathbb{Q}$ est la probabilité qui gouverne le phénomène ; sous $\mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} U = \int_0^T f(s)dB_s &= \int_0^T f(s)dB_s^{\mathbb{Q}} + \int_0^T f(s)dm(s) \\ &= \int_0^T f(s)dB_s^{\mathbb{Q}} + \int_0^T f(s)^2 ds \\ &\sim \mathcal{N}(\sigma^2, \sigma^2). \end{aligned}$$

La probabilité d'erreur est alors

$$\begin{aligned} q &= \mathbb{Q}\Big(U < \frac{1}{2}\operatorname{Var}_{\mathbb{P}}(U)\Big) = \mathbb{P}\Big(\sigma N_0 + \sigma^2 \leq \frac{1}{2}\sigma^2\Big) \\ &= \mathbb{P}\Big(\sigma N_0 \leq -\frac{1}{2}\sigma^2\Big) = \mathbb{P}\Big(\sigma N_0 \geq \frac{1}{2}\sigma^2\Big) = p \end{aligned}$$

(selon les cas, c'est $\mathbb{P}$ ou $\mathbb{Q}$ qui gouverne les lois). D'après la table de la loi $\mathcal{N}(0,1)$, on a $p, q \leq 5\%$ si $\sigma \geq 4$.

Chapitre 9

Équation différentielle stochastique

On présente dans ce chapitre la notion d'équation différentielle stochastique (EDS) brownienne. On commence par en donner une motivation en Section 9.1 en tant que généralisation des équations différentielles ordinaires dans un contexte d'incertitude représentée par un bruit aléatoire. Des exemples d'EDS classiques sont présentés en Section 9.2. Les principaux résultats d'existence et d'unicité sont donnés en Section 9.3. On étudie les solutions d'EDS dirigée par un mouvement brownien comme fonctionnelle sur l'espace de Wiener en Section 9.5. La propriété de Markov pour les solutions d'EDS homogène est présentée en Section 9.6.

9.1 Introduction et définitions

Équations différentielles et EDS

Les équations différentielles (ordinaires) gouvernent de nombreux phénonènes déterministes. Pour prendre en compte des phénomènes aléatoires, formellement on doit prendre en compte des « différentielles stochastiques », ce qui transforme les équations en équations différentielles stochastiques (EDS).
Les équations différentielles sont des équations d'évolution du type

$$\dot{x}(t) = a(t, x(t)) \tag{9.1}$$

où l'inconnue est une fonction $x(t)$ qui doit vérifier une équation impliquant sa dérivée $\dot{x}$ et elle même. Les cas les plus simples sont les équations différentielles d'ordre 1 comme en (9.1) (seule la dérivée 1ère est impliquée) avec $a(t, x) = a + bx$ indépendant de t et affine par rapport à x. Symboliquement, l'équation (9.1) se réécrit

$$dx(t) = a(t, x(t))\, dt. \tag{9.2}$$

Cette équation modélise typiquement une quantité $(x(t))_{t\geq 0}$ qui évolue avec le temps de façon que x s'accroît, à la date t, selon le taux $a(t, x(t))$. Par exemple, avec $a(t, x) = a(t)x$, l'équation $dx(t) = a(t)x(t)\, dt$ modélise le cours d'un actif financier $x(t)$ soumis au taux d'intérêt variable $a(t)$ ou d'une population avec un taux de natalité $a(t)$. Il est bien connu que la solution est

$$x(t) = x_0 \exp\left(\int_0^t a(s)\, ds\right).$$

Les EDS sont des généralisations des équations (9.2) où la dynamique déterministe d'évolution a est perturbée par un terme aléatoire (stochastique). On parle alors d'équation différentielle stochastique. En général la perturbation aléatoire est considérée comme un bruit. Par un argument du type TCL [1], il est légitime de considérer que ce bruit est un processus gaussien et en général il est modélisé par un mouvement brownien B et une intensité de bruit $\sigma(t,x)$:

$$dX_t = a(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dB_t \tag{9.3}$$

où σ est une fonction du temps t et de l'inconnue X_t au temps t mais pourrait juste dépendre du temps (σ_t) ou de la valeur X_t en t $(\sigma(X_t))$ ou encore être constante σ.

Définitions

En fait, l'écriture (9.3) est symbolique car dB_t n'a pas de sens, le mouvement brownien n'étant pas dérivable ! Il faudrait écrire (9.3) sous la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s \tag{9.4}$$

qui, elle, a un sens si l'intégrale stochastique $\int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s$ en a un, cf. Chapitre 6. On généralise encore dans la définition suivante la notion d'EDS dans un cadre vectoriel.

Définition 9.1 (EDS) *On appelle équation différentielle stochastique (EDS) une équation en le processus X (à valeurs dans $\mathbb{R}^d$) de la forme*

$$dX_t = a(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dB_t \tag{$E(a,\sigma)$}$$

ce qui, en terme intégrale, s'écrit

$$X_t^{(i)} = X_0^{(i)} + \int_0^t a_i(s, X_s)\, ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{i,j}(s, X_s)\, dB_s^{(j)}, \quad 1 \le i \le d, \tag{9.5}$$

où, pour m, d des entiers positifs,

- *$a(t,x) = (a_i(t,x))_{1\le i\le d}$ est un vecteur mesurable de $\mathbb{R}^d$ défini sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ appelé* **dérive** *ou* **drift** *de l'EDS,*
- *$\sigma(t,x) = (\sigma_{i,j}(t,x))_{\substack{1\le i\le d\\ 1\le j\le m}}$ est une matrice $d\times m$ mesurable définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ appelé* **coefficient de diffusion** *de l'EDS,*

1. la résultante d'un grand nombre d'erreurs indépendantes X_i indépendantes (de carrés intégrables) a pour loi approchée une loi normale $\mathcal{N}\big(n \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i], \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i)\big)$

et $B = (B^{(1)}, \dots, B^{(m)})$ est un mouvement brownien standard en dimension m.

La solution d'une EDS est une fonction aléatoire. Il s'agit donc d'un processus qu'on note $X = (X_t)_{t\geq 0}$. Plus précisément, on a :

Définition 9.2 (Solution d'une EDS) *On appelle solution de l'EDS $E(a,\sigma)$ la donnée de*

- *un espace de probabilité filtré $\big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\big)$ satisfaisant les conditions habituelles ;*
- *un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien $B = \big(B^{(1)}, \dots, B^{(m)}\big)$ dans $\mathbb{R}^m$ défini sur cet espace de probabilité ;*
- *un processus $(\mathcal{F}_t)$-adapté continu $X = \big(X^{(1)}, \dots, X^{(d)}\big)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ tel que (9.4) soit vérifiée, c'est à dire, coordonnée par coordonnée, pour tout $1 \leq i \leq d$: (9.5).*

Lorsque de plus $X_0 = x \in \mathbb{R}^d$, on dit que le processus X est solution de $E_x(a,\sigma)$.

En pratique (dans les cas simples), pour trouver la solution d'une EDS, on intuite la forme de la solution et on vérifie que l'EDS de départ est bien satisfaite en appliquant la formule d'Itô, cf. Section 9.2. On propose des résultats généraux d'existence et d'unicité des EDS, du type théorème de Cauchy-Lipschitz dans la Section 9.3.

9.2 Exemples d'EDS

Les EDS affines admettent des solutions explicites qu'on peut obtenir comme dans le cas déterministe par la méthode de variation de la constante. Le cas affine est important car les EDS affines apparaissent comme des linéarisées d'EDS plus complexes qu'on ne sait pas toujours résoudre. On se place dans le cas réel, ie. $d = m = 1$.

9.2.1 Équations linéaires

Ornstein-Uhlenbeck : équation $a(t,x) = -ax$ $(a > 0)$ et $\sigma(x) = \sigma$. Il s'agit de l'équation de Langevin :

$$dX_t = -aX_t\,dt + \sigma\,dB_t \tag{9.6}$$

c'est à dire avec $a(t,x) = -ax$, et $\sigma(x) = \sigma$. La solution est donnée par

$$X_t = X_0 e^{-at} + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)}\,dB_s. \tag{9.7}$$

Sans le terme σdB_t, l'équation $dX_t = -aX_t\,dt$ se résout immédiatement en $X_t = Ce^{-at}$. Pour tenir compte du terme σdB_t, on fait « varier la constante C » :

$$\begin{aligned} dC\,e^{-at} - aCe^{-at}\,dt &= dX_t = -aX_t\,dt + \sigma\,dB_t \\ dC &= \sigma e^{at}\,dB_t \end{aligned}$$

$$C = X_0 + \int_0^t \sigma e^{as}\, dB_s$$

et, avec $X_t = Ce^{-at}$, l'expression (9.7) est obtenue.

On peut observer directement que (9.7) est satisfaite en dérivant $X_t = X_0 e^{-at} + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as}\, dB_s$ avec la formule d'Itô (sous la forme dérivée de l'IPP (7.8), Corollaire 7.3) :

$$\begin{aligned} dX_t &= X_0(-ae^{-at}) + \sigma(-ae^{-at})\Big(\int_0^t e^{as}\, dB_s\Big)dt + \sigma e^{-at}\big(e^{at} dB_t\big) \\ &= -a\Big(X_0 e^{-at} + e^{-at}\int_0^t e^{as}\, dB_s\Big)dt + \sigma dB_t \\ &= -aX_t dt + \sigma dB_t. \end{aligned}$$

Il s'agit du processus d'Ornstein-Uhlenbeck (cf. Section 2.4). Ce cas se généralise au cadre vectoriel.

Équation $a(t,x) = a_t x$ et $\sigma(x) = \sigma_t x$. On suppose les processus $(a_t)_{t\geq 0}$ et $(\sigma_t)_{t\geq 0}$ vérifient la condition d'intégrabilité $\int_0^T |a_t|\, dt < +\infty$, $\int_0^T |\sigma_t|^2\, dt < +\infty$ (par exemple en étant bornés). L'EDS

$$dX_t = X_t(a_t dt + \sigma_t dB_t), \quad X_0 = x, \tag{9.8}$$

admet pour solution

$$X_t = x \exp\left(\int_0^t a_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds\right). \tag{9.9}$$

Pour le voir, on suppose X positivement bornée sur $[0,T]$ (minorée par $1/n$ et majorée par n). Sinon, on introduit le temps d'arrêt $T_n = \inf(t : X_t \leq 1/n \text{ ou } X_t > n)$ et on arrête les processus à ces dates ; on applique la formule d'Itô à $X_{t\wedge T_n}$ et à la fonction ln (qui est C^2 sur $[1/n, n]$). De l'équation (9.8), on déduit $d\langle X, X\rangle_t = X_t^2 \sigma_t^2 dt$. Le processus $Y_t = \ln\big(X_{t\wedge T_n}\big)$ vérifie alors

$$dY_t = \frac{1}{X_t} dX_t - \frac{1}{2}\frac{d\langle X, X\rangle_t}{X_t^2} = \big(a_t dt + \sigma_t dB_t\big) - \frac{\sigma_t^2}{2} dt = \left(a_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2\right) dt + \sigma_t\, dB_t,$$

ce qui prouve l'expression (9.9).

Black et Scholes. C'est le cas particulier où $a(t,x) = ax$ et $\sigma(t,x) = \sigma x$, ie.

$$dX_t = aX_t\, dt + \sigma X_t\, dB_t. \tag{9.10}$$

Cette EDS modélise l'évolution d'un cours X soumis à un taux d'intérêt déterministe a et à une perturbation stochastique $\sigma X_t dB_t$. Dans un contexte financier, le coefficient de diffusion σ est appelé volatilité. Noter que la partie déterministe de l'accroissement de X_t (aX_t) et sa partie aléatoire (σX_t) sont toutes les deux proportionnelles à la valeur courante X_t en t (ce qui est typique des modèles de croissance).
La solution de (9.10) est un cas particulier de (9.9) :

$$X_t = X_0 \exp\left(at - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma B_t\right).$$

On retrouve le **mouvement brownien géométrique** .

9.2.2 Équations affines

On suppose que $a(t,x) = a_t x + c_t$ et $\sigma(t,x) = \sigma_t x + \delta_t$, c'est à dire qu'on considère l'EDS affine générale

$$dX_t = X_t(a_t\,dt + \sigma_t\,dB_t) + c_t\,dt + \delta_t\,dB_t. \tag{9.11}$$

Elle a une solution construite à partir de la solution Z de l'EDS linéaire associée $dZ_t = Z_t(a_t\,dt + \sigma_t\,dB_t)$ de condition initiale $Z_0 = 1$ donné par (9.9), ie.

$$Z_t = \exp\left(\int_0^t a_s\,ds + \int_0^t \sigma_s\,dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2\,ds\right).$$

En notant $\widetilde{c}_t = c_t - \sigma_t\delta_t$, la solution de (9.11) est alors donnée par

$$X_t = Z_t\left(X_0 + \int_0^t Z_s^{-1}(\widetilde{c}_s\,ds + \delta_s\,dB_s)\right). \tag{9.12}$$

En effet, avec la formule d'Itô, on vérifie que (9.12) satisfait l'équation (9.11) :

$$\begin{aligned}
dX_t &= Z_t\,d\left(X_0 + \int_0^t Z_s^{-1}(\widetilde{c}_s\,ds + \delta_s\,dB_s)\right) + dZ_t\left(X_0 + \int_0^t Z_s^{-1}(\widetilde{c}_s\,ds + \delta_s\,dB_s)\right) \\
&\qquad + d\left\langle Z, \left(X_0 + \int_0^\cdot Z_s^{-1}(\widetilde{c}_s\,ds + \delta_s\,dB_s)\right)\right\rangle_t \\
&= Z_t\left(Z_t^{-1}(\widetilde{c}_t dt + \delta_t dB_t)\right) + X_t(a_t dt + \sigma_t dB_t) + d\left\langle Z_t, \int_0^\cdot Z_s^{-1}(\widetilde{c}_s\,ds + \delta_s\,dB_s)\right\rangle_t.
\end{aligned}$$

Comme l'expression de Z assure

$$d\langle Z, B\rangle_t = Z_t\sigma_t\,d\langle B, B\rangle_t = Z_t\sigma_t\,dt,$$

Le crochet se calcule comme suit

$$\begin{aligned}
\left\langle Z, \int_0^\cdot Z_s^{-1}(\widetilde{c}_s\,ds + \delta_s\,dB_s)\right\rangle_t &= \int_0^t Z_s^{-1}\big(\widetilde{c}_s\,d\langle Z, s\rangle_s + \delta_s\,d\langle Z, B\rangle_s\big) \\
&= \int_0^t Z_s^{-1}\delta_s\,d\langle Z, B\rangle_s = \int_0^t \delta_s\sigma_s\,ds.
\end{aligned}$$

On a donc $d\left\langle Z, \int_0^\cdot Z_s^{-1}(\widetilde{c}_s\,ds + \delta_s\,dB_s)\right\rangle_t = \delta_t\sigma_t\,dt$ et on obtient :

$$\begin{aligned}
dX_t &= \widetilde{c}_t\,dt + \delta_t\,dB_t + X_t(a_t\,dt + \sigma_t\,dB_t) + \sigma_t\delta_t\,dt \\
&= X_t(a_t\,dt + \sigma_t\,dB_t) + c_t\,dt + \delta_t\,dB_t,
\end{aligned}$$

justifiant que (9.12) est bien solution de (9.11).

9.3 Existences et unicités

Comme d'habitude pour les équations différentielles, les notions d'existence et d'unicité sont essentielles. Dans le contexte des EDS, il existe plusieurs types d'existence et d'unicité des EDS. Dans toute cette section, on considère l'EDS $E(a,\sigma)$.

Définition 9.3 (Existence, unicité des EDS) *Pour l'équation $E(a,\sigma)$, on dit qu'il y a*

- *existence faible si pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, il existe une solution de $E_x(a,\sigma)$ c'est à dire un triplet $\big\{X, B, (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})\big\}$ où B est un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien et pour lequel X est solution satisfaisant (9.4) (c'est à dire (9.5)) ;*
- *existence et unicité faibles si de plus toutes les solutions de $E_x(a,\sigma)$ ont même loi ;*
- *unicité trajectorielle si, l'espace de probabilité filtré $\big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\big)$ et le mouvement brownien B étant fixés, deux solutions X et X' de $E(a,\sigma)$ telles que $X_0 = X'_0$ ps sont indistinguables.*
- *existence forte si une solution X de $E_x(a,\sigma)$ est adaptée par rapport à la filtration canonique de B ; X est alors appelée solution forte.*
- *unicité forte pour $E(a,\sigma)$ si pour tout mouvement brownien B, deux solutions fortes associées à B sont indistinguables.*

Il peut y avoir existence et unicité faibles sans qu'il y ait unicité trajectorielle.

Exemple 9.4 C'est le cas par exemple de :

$$dX_t = \operatorname{sgn}(X_t)\, dB_t, \quad X_0 = y, \tag{9.13}$$

associé à un mouvement brownien B standard, cf. aussi l'Exemple 7.27.

Pour voir cela, on considère un mouvement brownien β issu de $\beta_0 = y$ et on pose

$$\widetilde{B}_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(\beta_s)\, d\beta_s \tag{9.14}$$

avec $\operatorname{sgn}(x) = 1$ si $x \geq 0$ et $\operatorname{sgn}(x) = -1$ si $x < 0$. On observe que $d\widetilde{B}_t = \operatorname{sgn}(\beta_t)\, d\beta_t$ et donc

$$\operatorname{sgn}(\beta_t)\, d\widetilde{B}_t = \operatorname{sgn}(\beta_t)^2\, d\beta_t = d\beta_t,$$

soit :

$$\beta_t = y + \int_0^t \operatorname{sgn}(\beta_s)\, d\widetilde{B}_s. \tag{9.15}$$

Comme $\widetilde{B}$ en (9.14) est une martingale locale à trajectoires continues et que

$$\langle \widetilde{B}, \widetilde{B}\rangle_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(\beta_s)^2\, d\langle \beta, \beta\rangle_s = \int_0^t ds = t,$$

le théorème de Lévy (Théorème 7.9) assure que $\widetilde{B}$ est un mouvement brownien (issu de 0). On voit alors que β est solution de l'EDS (9.13) pour laquelle il y a donc existence faible.

Par contre, β n'est pas solution forte de (9.13) : si elle l'était, β serait $\mathcal{F}^B$-adapté, ce qui impliquerait $\mathcal{F}^\beta \subset \mathcal{F}^B$, ce qui n'est pas possible car on montre ci-dessous que $\mathcal{F}^B \subset \mathcal{F}^{|\beta|}$, ce qui impliquerait encore $\mathcal{F}^\beta \subset \mathcal{F}^B \subset \mathcal{F}^{|\beta|} \subset \mathcal{F}^\beta$ et donc des égalités alors que $\mathcal{F}^{|\beta|} \subsetneq \mathcal{F}^\beta$, β n'étant pas de signe constant.

Pour justifier $\mathcal{F}^B \subset \mathcal{F}^{|\beta|}$, on utilise la formule de Tanaka pour le mouvement brownien β (cf. Exemple 7.27) et pour $a = 0$:

$$|\beta_t| = |y| + \int_0^t \operatorname{sgn}(\beta_s)\, d\beta_s + L_t^\beta = |y| + B_t + L_t^\beta$$

d'où $B_t = |\beta_t| - L_t^\beta - |y|$. Mais comme $\int_0^t |\beta_s|\, dL_s^\beta = 0$, la mesure dL_t^β est concentrée sur $\{t \geq 0 : |\beta_t| = 0\}$; le processus L_t^β est donc $\mathcal{F}^{|\beta|}$-adapté. Il suit que B_t est $\mathcal{F}_t^{|\beta|}$-mesurable et donc $\mathcal{F}^B \subset \mathcal{F}^{|\beta|}$. (En fait, on peut même montrer qu'il y a égalités des filtrations $Fc^B = \mathcal{F}^{|\beta|}$.)

À nouveau, par le théorème de Lévy (Théorème 7.9), on prouve l'unicité faible : toute solution X de (9.13) est une martingale locale à trajectoires continues et vérifie

$$\langle X, X\rangle_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s)^2\, d\langle B, B\rangle_s = \int_0^t ds = t$$

et doit donc être un mouvement brownien (théorème de Lévy : Th. 7.9).

Par contre, il n'y a pas en général unicité trajectorielle : pour $y = 0$, on voit facilement que β et $-\beta$ sont deux solutions de (9.13) associées au même brownien B. Noter que $\int_0^t \mathbf{1}_{\{\beta_s=0\}}\, dB_s = 0$ car avec l'isométrie d'Itô :

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \mathbf{1}_{\{\beta_s=0\}}\, dB_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \mathbf{1}_{\{\beta_s=0\}}^2\, ds\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \mathbf{1}_{\{\beta_s=0\}}\, ds\right] = \int_0^t \mathbb{P}(\beta_s = 0)\, ds = 0$$

et donc $\int_0^t \mathbf{1}_{\{\beta_s=0\}}\, dB_s = 0$ ps.

Finalement, pour l'EDS (9.13), il n'y a pas unicité trajectorielle, et on a observé que β en (9.15) est solution faible mais pas forte de (9.13).

Toutefois, le théorème suivant donne un résultat positif entre ces diffèrentes notions d'existence et d'unicité :

Théorème 9.5 (Yamada-Watanabe) *Lorsque les coefficients a et σ sont boréliennes et localement bornées alors existence faible et unicité trajectorielle impliquent unicité faible. De plus, dans ce cas, pour tout espace de probabilité filtré $\big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\big)$ et tout $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien B, il existe pour chaque $x \in \mathbb{R}^d$ une (unique) solution forte de $E_x(a, \sigma)$.*

La preuve de ce théorème est donnée au Chapitre 12 avec la notion de problème de martingale, cf. Théorème 12.11.

Dans toute la suite, on suppose remplies les conditions suivantes :

Hypothèses lipschitziennes. *Les fonctions a et σ sont continues sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ et lipschitziennes en x, ie. il existe une constante $K \in]0,+\infty[$ telle que pour tout $t \geq 0$ et $x, y \in \mathbb{R}^d$*

$$\begin{aligned} |a(t,x) - a(t,y)| &\leq K|x-y| \\ |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| &\leq K|x-y| \end{aligned}$$

et pour tout $T \geq 0$

$$\int_0^T |a(t,0)| + |\sigma(t,0)|^2\, dt < +\infty$$

où $|a|$ et $|\sigma|$ représentent la norme du vecteur a et de la matrice σ.

Noter que sous la condition de Lipschitz, on a

$$|a(t,x)| \leq |a(t,0)| + K|x| \quad \text{et} \quad |\sigma(t,x)| \leq |\sigma(t,0)| + K|x| \tag{9.16}$$

ce qui assure

$$\begin{aligned} \int_0^T |\sigma(t,x)|^2\, dt &\leq 2\int_0^T |\sigma(t,0)|^2 dt + 2K^2 T x^2, \\ \int_0^T |a(t,x)|\, dt &\leq \int_0^T |a(t,0)|^2 dt + KT|x|. \end{aligned}$$

Proposition 9.6 *Sous les hypothèses lipschitziennes, une solution*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s + \int_0^t a(s, X_s)\, ds$$

de $E(a,\sigma)$ n'explose pas ps.

Démonstration : On considère $t \in [0,T]$. À partir de

$$X_t^2 \leq 3\Big(X_0^2 + \Big(\int_0^t \sigma(s,X_s)\, dB_s\Big)^2 + \Big(\int_0^t a(s,X_s)\, ds\Big)^2\Big)$$

due à la convexité de $x \mapsto x^2$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_t^2] &\leq 3\Big(\mathbb{E}[X_0^2] + \mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t \sigma(s,X_s)\, dB_s\Big)^2\Big] + \mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t a(s,X_s)\, ds\Big)^2\Big]\Big) \\ &\leq 3\Big(\mathbb{E}[X_0^2] + \mathbb{E}\Big[\int_0^t \sigma(s,X_s)^2\, ds\Big] + \mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t |a(s,X_s)|\, ds\Big)^2\Big]\Big) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \text{(isométrie d'Itô)} \\
\leq\ & 3\Big(\mathbb{E}[X_0^2] + \mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t 2(\sigma(s,0)^2 + K^2X_s^2)\,ds\Big)\Big] + \mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t |a(s,0)| + K|X_s|\,ds\Big)^2\Big]\Big) \\
& \text{(conditions lipschitziennes)} \\
\leq\ & 3\Big(\mathbb{E}[X_0^2] + \mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t 2(\sigma(s,0)^2 + K^2X_s^2)\,ds\Big)\Big] + \mathbb{E}\Big[2\Big(\int_0^t |a(s,0)|\,ds\Big)^2 + 2K^2 t\int_0^t |X_s|^2\,ds\Big]\Big) \\
& \text{(inégalité de Cauchy-Schwarz)} \\
\leq\ & 3\Big(\mathbb{E}[X_0^2] + \Big(\int_0^T 2\sigma(s,0)^2\,ds + 2K^2\int_0^t \mathbb{E}[X_s^2]\,ds\Big) + 2\Big(\int_0^T |a(s,0)|\,ds\Big)^2 + 2K^2T\int_0^t \mathbb{E}[X_s^2]\,ds\Big) \\
& \text{(Fubini et } t\in[0,T]) \\
\leq\ & C + D\int_0^t \mathbb{E}[X_s^2]\,ds
\end{aligned}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
C &= 3\mathbb{E}[X_0^2] + 6\int_0^T \sigma(s,0)^2\,ds + 6\Big(\int_0^T |a(s,0)|\,ds\Big) \\
D &= 6K^2(1+T).
\end{aligned}
$$

Le lemme de Grönwall qui suit assure alors que $\mathbb{E}[X_t^2] \leq Ce^{BT}$ pour tout $t \in [0,T]$ et établit la Proposition 9.6. □

Lemme 9.7 (Grönwall) *Soit $T > 0$ et g une fonction positive mesurable bornée sur $[0,T]$. On suppose qu'il existe des constantes $a \geq 0$, $b \geq 0$ telles que pour tout $t \in [0,T]$, on a*

$$
g(t) \leq a + b\int_0^t g(s)\,ds. \tag{9.17}
$$

Alors on a $g(t) \leq a\exp(bt)$ pour tout $t \in [0,T]$.

Démonstration :[Grönwall] En itérant la condition (9.17) sur g, on a pour tout $n \geq 1$:

$$
g(t) \leq a + a(bt) + a\frac{(bt)^2}{2} + \cdots + a\frac{(bt)^n}{n!} + b^{n+1}\int_0^t ds_1\int_0^{s_1} ds_2 \cdots \int_0^{s_n} g(s_{n+1})\,ds_{n+1}.
$$

Si g est majorée par A, le dernier terme se majore par $A(bt)^{n+1}/(n+1)!$ et il tend vers 0 quand $n \to +\infty$, ce qui prouve le lemme car le développement à droite tend vers $a\exp(bt)$. □

On a alors le principal résultat d'existence et d'unicité pour des EDS :

Théorème 9.8 (Cauchy-Lipschitz pour EDS) *Sous les hypothèses lipschitziennes, il y a unicité trajectorielle pour $E(a,\sigma)$. De plus, pour tout espace de probabilité filtré $\big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\big)$ et tout $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien B, il existe pour chaque $x \in \mathbb{R}^d$ une (unique) solution forte de $E_x(a,\sigma)$.*

Ce résultat entraîne en particulier qu'il y a existence faible pour $E(a,\sigma)$. L'unicité faible sera une conséquence du Théorème 9.13 (cf. remarque qui suit ce résultat) ; elle vient aussi de l'unicité trajectorielle si on utilise le théorème de Yamata-Watanabe (Théorème 9.5).

Remarque 9.9 On peut affaiblir l'hypothèse de continuité en t, celle-ci n'intervient essentiellement que pour majorer $\sup_{0\le t\le T}|\sigma(t,x)|$ et $\sup_{0\le t\le T}|a(t,x)|$ pour x fixé : on peut « localiser » l'hypothèse lipschitzienne sur a et σ et se contenter d'une constante K qui dépend du compact sur lequel t et x sont considérés. Il faut alors conserver une condition de croissance sous-linéaire :

$$|\sigma(t,x)| \le K(1+|x|), \quad |a(t,x)| \le K(1+|x|).$$

Comme pour les équations différentielles (ordinaires), la croissance sous-linéaire prévient l'explosion de la solution de l'EDS comme dans la Proposition 9.6.

Démonstration : Pour simplifier la présentation de la preuve, on considère le cas $d=m=1$.

Unicité trajectorielle. On considère deux solutions X et X' de $E(a,\sigma)$ avec $X_0 = X'_0$, définies sur le même espace et avec le même mouvement brownien B. Pour $M>0$ fixé, on considère le temps d'arrêt

$$\tau = \inf\big(t\ge 0 : |X_t|\ge M, |X'_t|\ge M\big).$$

Noter que grâce à la Proposition 9.6, on a $\tau\to+\infty$ lorsque $M\to+\infty$. D'après $E(a,\sigma)$, on a pour tout $t\ge 0$:

$$\begin{aligned} X_{t\wedge\tau} &= X_0 + \int_0^{t\wedge\tau}\sigma(s,X_s)\,dB_s + \int_0^{t\wedge\tau} a(s,X_s)\,ds \\ X'_{t\wedge\tau} &= X'_0 + \int_0^{t\wedge\tau}\sigma(s,X'_s)\,dB_s + \int_0^{t\wedge\tau} a(s,X'_s)\,ds. \end{aligned}$$

On considère $t\in[0,T]$. Par différence, comme $X_0=X'_0$ et comme X,X' sont bornées par M sur $]0,\tau]$, l'expression de la variance d'une intégrale stochastique L^2, l'inégalité de Cauchy-Schwarz, les hypothèses lipschitziennes et la majoration $(x+y)^2\le 2(x^2+y^2)$ donnent

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\big[(X_{t\wedge\tau}-X'_{t\wedge\tau})^2\big] \\ &\le 2\left(\mathbb{E}\left[\left(\int_0^{t\wedge\tau}\big(\sigma(s,X_s)-\sigma(s,X'_s)\big)\,dB_s\right)^2\right] + \mathbb{E}\left[\left(\int_0^{t\wedge\tau}\big(a(s,X_s)-a(s,X'_s)\big)\,ds\right)^2\right]\right) \\ &\quad \text{(convexité)} \\ &\le 2\left(\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau}\big(\sigma(s,X_s)-\sigma(s,X'_s)\big)^2\,ds\right] + T\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau}\big(a(s,X_s)-a(s,X'_s)\big)^2\,ds\right]\right) \\ &\quad \text{(isométrie d'Itô et inégalité de Cauchy-Schwarz)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq\ 2K^2(1+T)\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau}\left(X_s-X'_s\right)^2 ds\right]\\
&\quad\ \text{(hypothèse lipschitziennes)}\\
&=\ 2K^2(1+T)\int_0^t \mathbb{E}\big[\big(X_{s\wedge\tau}-X'_{s\wedge\tau}\big)^2\big]\,ds\\
&\quad\ \text{(Fubini).}
\end{aligned}
$$

Si on pose $h(t)=\mathbb{E}\big[\big(X_{t\wedge\tau}-X'_{t\wedge\tau}\big)^2\big]$ et $C=2K^2(1+T)$, alors on a établi que h vérifie pour $t\in[0,T]$ l'inéquation :

$$h(t)\leq C\int_0^t h(s)\,ds.$$

De plus, par définition de τ, la fonction h est bornée par $4M^2$, le lemme de Grönwall (Lemme 9.7) s'applique avec $a=0$ et $b=C$ et donne $h=0$, c'est à dire $X_{t\wedge\tau}=X'_{t\wedge\tau}$ ps.

Finalement, en faisant $M\to+\infty$, on a $\tau\to+\infty$ et donc $X_t=X'_t$ ps. Les processus X et X' sont des modifications à trajectoires continues, ils sont donc indistinguables par la Proposition 1.8, ce qui prouve l'unicité trajectorielle.

Existence forte. On procède comme pour les équations différentielles (ordinaires) avec une méthode d'approximation de Picard. Pour cela, on pose

$$
\begin{aligned}
X_t^{(0)} &= x\\
X_t^{(1)} &= x+\int_0^t \sigma(s,x)\,dB_s+\int_0^t a(s,x)\,ds\\
X_t^{(2)} &= x+\int_0^t \sigma(s,X_s^{(1)})\,dB_s+\int_0^t a(s,X_s^{(1)})\,ds\\
\dots &= \dots\\
X_t^{(n)} &= x+\int_0^t \sigma(s,X_s^{(n-1)})\,dB_s+\int_0^t a(s,X_s^{(n-1)})\,ds. \qquad (9.18)
\end{aligned}
$$

Les intégrales stochastiques ci-dessus sont bien définies puisque par récurrence, on constate que, pour chaque n, $X_t^{(n)}$ est continu et adapté donc localement borné si bien que le processus $\sigma(t,X_t^{(n)})$ l'est aussi (hypothèses lipschitziennes) et l'intégrale correspondante est bien définie.

On fixe maintenant $T>0$ et on raisonne sur $[0,T]$. On prouve par récurrence qu'il existe C_n tel que, pour tout $t\in[0,T]$,

$$\mathbb{E}\big[(X_t^{(n)})^2\big]\leq C_n. \qquad (9.19)$$

En effet, (9.19) est immédiate si $n=0$ avec $C_0=x^2$. Puis, on suppose que (9.19) est vraie au rang $n-1$. Avec (9.16), on déduit

$$|\sigma(t,x)|\leq C+K|x|,\quad |a(t,x)|\leq D+K|x|,\quad t\in[0,T],x\in\mathbb{R},$$

avec des constantes

$$C=\sup_{t\in[0,T}|\sigma(t,0)|,\quad D=\sup_{t\in[0,T}|a(t,0)|$$

Noter que par la croissance sous-linéaire de σ et l'hypothèse de récurrence (9.19), on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\int_0^t \sigma(s,X_s^{n-1})^2\,ds\Big] &\leq 2\mathbb{E}\Big[\int_0^t (C^2+K^2|X_s^{n-1}|^2)\,ds\Big]\\ &\leq 2C^2T+2K^2\int_0^t \mathbb{E}\big[|X_s^{n-1}|^2\big]\,ds\\ &\leq 2C^2T+2K^2TC_{n-1}<+\infty.\end{aligned}$$

On a donc par l'isométrie d'Itô

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \sigma(s,X_s^{(n-1)})\,dB_s\right)^2\right]=\mathbb{E}\left[\int_0^t \sigma(s,X_s^{(n-1)})^2\,ds\right]<+\infty.$$

Comme $(x+y+z)^2\leq 3(x^2+y^2+z^2)$, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'isométrie d'Itô, et les hypothèses lipschitziennes, on majore comme suit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[(X_t^{(n)})^2\big] &\leq 3\left(|x|^2+\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \sigma(s,X_s^{(n-1)})\,dB_s\right)^2\right]+\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t a(s,X_s^{(n-1)})\,ds\right)^2\right]\right)\\ &\quad\text{(convexité)}\\ &\leq 3\left(|x|^2+\mathbb{E}\left[\int_0^t \sigma(s,X_s^{(n-1)})^2\,ds\right]+\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t |a(s,X_s^{(n-1)})|\,ds\right)^2\right]\right)\\ &\quad\text{(isométrie d'Itô)}\\ &\leq 3\left(|x|^2+\mathbb{E}\left[\int_0^t (C+K|X_s^{(n-1)}|)^2\,ds\right]+\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t D+K|X_s^{(n-1)}|\,ds\right)^2\right]\right)\\ &\quad\text{(hypothèses lipschitziennes)}\\ &\leq 3\left(|x|^2+\mathbb{E}\left[\int_0^t (2C^2+2K^2|X_s^{(n-1)}|^2)\,ds\right]+\mathbb{E}\left[2\big(DT\big)^2+2K^2t\int_0^t |X_s^{(n-1)}|^2\,ds\right]\right)\\ &\quad\text{(convexité de } x^2 \text{ et inégalité de Cauchy-Schwarz)}\\ &\leq 3\big(|x|^2+2(C^2T+D^2T^2)+2K^2(1+T)\int_0^t \mathbb{E}\big[|X_s^{(n-1)}|^2\big]ds\\ &\quad\text{(Fubini et } t\in[0,T])\\ &\leq 3\big(|x|^2+2(C^2T+D^2T^2)+2K^2(1+T)T2C_{n-1})\big)=:C_n\end{aligned}$$

ce qui établit (9.19) par récurrence.

La borne (9.19) et la croissance sous-linéaire de σ assurent alors que, pour chaque n, la martingale locale $\int_0^t \sigma(s,X_s^{(n)})dB_s$ est une vraie martingale bornée dans L^2 sur l'intervalle $[0,T]$. En effet, son crochet est intégrable, ce qui garantit l'affirmation par le Théorème 5.36 :

$$\mathbb{E}\left[\left\langle \int_0^\cdot \sigma(s,X_s^{(n)})dB_s, \int_0^\cdot \sigma(s,X_s^{(n)})dB_s\right\rangle_t\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \sigma(s,X_s^{(n)})^2 d\langle B,B\rangle_s\right]$$

$$= \quad \mathbb{E}\left[\int_0^t \sigma(s, X_s^{(n)})^2 ds\right] < +\infty.$$

On majore maintenant par récurrence $\mathbb{E}\big[\sup_{0\le t\le T}|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}|^2\big]$. On a

$$\begin{aligned} X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)} &= \int_0^t \big(\sigma(s, X_s^{(n)}) - \sigma(s, X_s^{(n-1)})\big)\, dB_s + \int_0^t \big(a(s, X_s^{(n)}) - a(s, X_s^{(n-1)})\big)\, ds \\ \big(X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}\big)^2 &\le \Big(\int_0^t \big(\sigma(s, X_s^{(n)}) - \sigma(s, X_s^{(n-1)})\big)\, dB_s\Big)^2 + \Big(\int_0^t \big(a(s, X_s^{(n)}) - a(s, X_s^{(n-1)})\big)\, ds\Big)^2. \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités de moment de Doob (Prop. 4.18) et de Cauchy-Schwarz ainsi que les hypothèses lipschitziennes, on déduit

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le t}|X_s^{(n+1)} - X_s^{(n)}|^2\right] \\ &\le 2\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le t}\left|\int_0^s \big(\sigma(u, X_u^{(n)}) - \sigma(u, X_u^{(n-1)})\big)\, dB_u\right|^2 + \sup_{0\le s\le t}\left|\int_0^s \big(a(u, X_u^{(n)}) - a(u, X_u^{(n-1)})\big)\, du\right|^2\right] \\ &\quad \text{(convexité)} \\ &\le 2\left(4\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \big(\sigma(u, X_u^{(n)}) - \sigma(u, X_u^{(n-1)})\big)\, dB_u\right)^2\right] + \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \big|a(u, X_u^{(n)}) - a(u, X_u^{(n-1)})\big|\, du\right)^2\right]\right) \\ &\quad \text{(inégalité de Doob)} \\ &\le 2\left(4\mathbb{E}\left[\int_0^t \big(\sigma(u, X_u^{(n)}) - \sigma(u, X_u^{(n-1)})\big)^2 du\right] + T\mathbb{E}\left[\int_0^t \big(a(u, X_u^{(n)}) - a(u, X_u^{(n-1)})\big)^2 du\right]\right) \\ &\quad \text{(isométrie d'Itô, inégalité de Cauchy-Schwarz)} \\ &\le 2(4+T)K^2\mathbb{E}\left[\int_0^t \big|X_u^{(n)} - X_u^{(n-1)}\big|^2 du\right] \qquad (9.20) \\ &\quad \text{(hypothèses lipschitziennes)} \\ &\le C_T\mathbb{E}\left[\int_0^t \sup_{0\le r\le u}\big|X_r^{(n)} - X_r^{(n-1)}\big|^2 du\right] \qquad (9.21) \end{aligned}$$

avec $C_T = 2(4+T)K^2$. Si on note

$$g_n(u) = \mathbb{E}\big[\sup_{0\le r\le u}\big|X_r^{(n)} - X_r^{(n-1)}\big|^2\big] \quad \text{et} \quad g_0(u) = \mathbb{E}\big[\sup_{0\le r\le u}\big|X_r^{(0)}\big|^2\big] = x^2,$$

alors (9.21) s'écrit

$$g_{n+1}(t) \le C_T \int_0^t g_n(u)du. \qquad (9.22)$$

Par ailleurs, par (9.19) et les inégalités précédentes telles (9.20), on voit que les fonctions g_n sont bornées sur $[0,T]$. En effet, $g_0(t) = x^2$ pour $t\in[0,T]$ et par une récurrence utilisant (9.22), on établit que pour tout $n\ge 1$ et $t\in[0,T]$, on a

$$g_n(t) \le x^2 C_T^n \frac{t^n}{n!}.$$

On déduit alors que $\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(T)^{1/2} < +\infty$. Comme

$$\left\|\sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{0\le s\le T} |X_s^{(n+1)} - X_s^{(n)}|\right\|_2 \le \sum_{n=0}^{+\infty} \left\|\sup_{0\le s\le T} \left|X_s^{(n+1)} - X_s^{(n)}\right|\right\|_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(T)^{1/2} < +\infty,$$

cela entraîne que ps

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{0\le s\le T} \left|X_s^{(n+1)} - X_s^{(n)}\right| < +\infty,$$

et donc ps la suite $(X_t^{(n)})_{t\in[0,T]}$ converge uniformément sur $[0,T]$ vers un processus limite $(X_t)_{t\in[0,T]}$ qui est nécessairement continu. Comme par récurrence, chaque processus $X^{(n)}$ est adapté par rapport à la filtration canonique de B, X l'est aussi à la limite.

Les estimations (9.21) établissent aussi que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le T} \left|X_s^{(n)} - X_s\right|^2\right]^{1/2} &= \left\|\sup_{0\le s\le T} \left|X_s^{(n)} - X_s\right|\right\|_2 = \left\|\sup_{0\le s\le T} \left|\sum_{k=n}^{+\infty} (X_s^{(k)} - X_s^{(k+1)}\right|\right\|_2 \\
&\le \sum_{k=n}^{+\infty} \left\|\sup_{0\le s\le T} \left|(X_s^{(k)} - X_s^{(k+1)}\right|\right\|_2 \le \sum_{k=n}^{+\infty} g_k(T)^{1/2} \to 0, \quad n\to+\infty.
\end{aligned}$$

On déduit alors de l'isométrie L^2, des hypothèses lipschitziennes que, avec des limites dans L^2, on a :

$$\begin{aligned}
\left\|\int_0^t \sigma(s, X_s^{(n)})\, dB_s - \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s\right\|_2^2 &= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \big(\sigma(s, X_s^{(n)}) - \sigma(s, X_s)\big)\, dB_s\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^t \big(\sigma(s, X_s^{(n)}) - \sigma(s, X_s)\big)^2\, ds\right] \\
&\le \mathbb{E}\left[\int_0^t K^2 |X_s^{(n)} - X_s|^2\, ds\right] \\
&\le K^2 T\, \mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le T} |X_s^{(n)} - X_s|^2\right] \to 0, \quad n\to+\infty,
\end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned}
\left\|\int_0^t a(s, X_s^{(n)})\, ds - \int_0^t a(s, X_s)\, ds\right\|_2^2 &= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \big(a(s, X_s^{(n)}) - a(s, X_s)\big)\, ds\right)^2\right] \\
&\le \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t K^2 |X_s^{(n)} - X_s|\, ds\right)^2\right] \\
&\le K^2 T\, \mathbb{E}\left[\int_0^t |X_s^{(n)} - X_s|^2\, ds\right] \\
&\le K^2 T^2\, \mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le T} |X_s^{(n)} - X_s|^2\right] \to 0, \quad n\to+\infty.
\end{aligned}$$

On a donc

$$L^2\text{-}\lim_{n\to+\infty}\int_0^t \sigma(s,X_s^{(n)})\,dB_s = \int_0^t \sigma(s,X_s)\,dB_s,$$
$$L^2\text{-}\lim_{n\to+\infty}\int_0^t a(s,X_s^{(n)})\,ds = \int_0^t a(s,X_s)\,ds.$$

Finalement, en passant à la limite dans le schéma de Picard (9.18), on obtient que X est solution forte de $E_x(a,\sigma)$ sur $[0,T]$:

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(s,X_s)\,dB_s + \int_0^t a(s,X_s)\,ds.$$

□

9.4 Utilisation de Girsanov pour les EDS

Le théorème de Girsanov permet de montrer l'existence de solution faible d'EDS quand elle n'admet pas nécessairement de solution forte.

Proposition 9.10 *Soit B un mouvement brownien standard dans $\mathbb{R}^d$ et $a : \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$. On considère l'EDS*

$$dX_t = a(t,X_t)\,dt + dB_t. \tag{9.23}$$

(1) Il y a existence faible lorsque a est une fonction bornée.

(2) Il y a unicité faible sur $[0,T]$ lorsque a est presque sûrement carré intégrable sur $[0,T]$ (ie. $\int_0^T a(s,X_s)^2ds < +\infty$ ps) :
Soit pour $i=1,2$ $X^{(i)}$ une solution sur $\big(\Omega^{(i)},\mathcal{F}^{(i)},(\mathcal{F}_t^{(i)})_{t\geq 0},\mathbb{P}^{(i)}\big)$ associée au mouvement brownien $B^{(i)}$ et de même loi initiale μ (indépendante de $i=1,2$). Alors $\big(X^{(1)},B^{(1)}\big)$ et $\big(X^{(2)},B^{(2)}\big)$ ont la même loi sous $\mathbb{P}^{(1)}$ et $\mathbb{P}^{(2)}$ (unicité faible) si

$$\mathbb{P}^{(i)}\left(\int_0^T \big\|a(t,X_t^{(i)})\big\|^2dt < +\infty\right) = 1.$$

Remarque 9.11
- La condition sur a est trop faible pour que le Théorème 9.8 s'applique mais le théorème de Girsanov (Théorème 8.4) permet de montrer l'existence faible d'une solution.
- On peut affaiblir l'hypothèse a bornée en a à croissance sous-linéaire :

$$\|a(t,x)\| \leq K(1+\|x\|), \quad 0\leq t\leq T,\ x\in\mathbb{R}^d.$$

- Ce résultat met en évidence l'effet régularisant du mouvement brownien B (en fait $\widetilde{B}$, cf. ci-dessous) dans (9.23) puisque sans $\widetilde{B}$, l'équation différentielle ordinaire $x_t = \int_0^t a(s,x_s)\,ds$ n'admet pas de solution en général lorsque a est seulement borné.

Démonstration : Pour simplifier la présentation de la preuve, on suppose $d = 1$.

1) Existence faible. En partant de $\big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\big)$ et B un mouvement brownien, on construit une solution faible par le théorème de Girsanov (Théorème 8.4). Pour cela, on considère $L_t = \int_0^t a(s, B_s)\, dB_s$ (bien défini puisque que a est bornée) et on pose

$$Z_t = \mathcal{E}(L)_t = \exp\left(\int_0^t a(s, B_s)\, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t a(s, B_s)^2\, ds\right).$$

Comme $\langle L, L\rangle_t = \int_0^t a(s, B_s)^2\, ds$, on a

$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big(\frac{1}{2}\langle L, L\rangle_t\Big)\Big] = \mathbb{E}\Big[\exp\Big(\frac{1}{2}\int_0^t a(s, B_s)^2\, ds\Big)\Big] \leq \exp\big(t\|a\|_\infty^2/2\big),$$

le critère de Novikov (Théorème 8.11) est satisfait sur tout intervalle $[0, t]$ et Z est donc une (vraie) $(\mathcal{F}_t^B)$-martingale sur $\mathbb{R}_+$. On définit alors une probabilité sur chaque $\mathcal{F}_t^B$ en posant $d\mathbb{Q}^{(a)}_{|\mathcal{F}_t^B} = Z_t\, d\mathbb{P}$. Dans ce contexte, le théorème de Girsanov (Théorème 8.4) assure que

$$\begin{aligned}
\widetilde{B}_t &= B_t - \langle B, L\rangle_t \\
&= B_t - \int_0^t a(s, B_s)\, ds
\end{aligned}$$

est un $\mathbb{Q}^{(a)}$-mouvement brownien. Sous $\mathbb{Q}^{(a)}$, le processus B est solution de

$$X_t = \widetilde{B}_t + \int_0^t a(s, X_s)\; ds$$

c'est à dire de l'EDS (9.23) dirigée par le mouvement brownien $\widetilde{B}$. On a donc construit une probabilité $\mathbb{Q}^{(a)}$ et des processus $(B, \widetilde{B})$ tels que $\widetilde{B}$ est un mouvement brownien sous $\mathbb{Q}^{(a)}$ et B est solution faible de (9.23).

2) Unicité faible. Soit T une date déterministe fixée et μ une loi initiale. On suppose maintenant $a(t, X_t) \in L^2([0, T])$ ps. Pour $k \geq 1$ et $i = 1, 2$, on considère

$$\tau_k^{(i)} = \inf\left(0 \leq t \leq T : \int_0^t \|a(s, X_s^{(i)})\|^2\, ds \geq k\right).$$

Par hypothèse sur a, on a $\lim_{k\to+\infty} \tau_k^{(i)} = +\infty$, $\mathbb{P}^{(i)}$-ps. En posant

$$Z_t^{(k,i)} = \exp\left(\int_0^{t\wedge\tau_k^{(i)}} a(s, X_s^{(i)})\, dB_s^{(i)} - \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau_k^{(i)}} \|a(s, X_s^{(i)})\|^2\, ds\right),$$

on a

$$\Big\langle \int_0^{\cdot\wedge\tau_k^{(i)}} a(s, X_s^{(i)})\, dB_s^{(i)}, \int_0^{\cdot\wedge\tau_k^{(i)}} a(s, X_s^{(i)})\, dB_s^{(i)}\Big\rangle_t = \int_0^{t\wedge\tau_k^{(i)}} a(s, X_s^{(i)})^2\, ds \leq k$$

par choix de l'arrêt $\tau_k^{(i)}$. On a donc

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\Big\langle\int_0^{\cdot\wedge\tau_k^{(i)}} a(s,X_s^{(i)})\,dB_s^{(i)}, \int_0^{\cdot\wedge\tau_k^{(i)}} a(s,X_s^{(i)})\,dB_s^{(i)}\Big\rangle_t\right)\right] \leq \exp(k/2) < +\infty$$

et comme précédemment, le critère de Novikov assure que $Z^{(k,i)}$ est une (vraie) martingale. On définit alors des probabilités par $d\mathbb{Q}^{(k,i)} = Z_T^{(k,i)} d\mathbb{P}^{(i)}$ et le théorème de Girsanov (Théorème 8.4) assure que sous $\mathbb{Q}^{(k,i)}$

$$X_{t\wedge\tau_k^{(i)}}^{(i)} = X_0^{(i)} + \int_0^{t\wedge\tau_k^{(i)}} a(s,X_s^{(i)})ds + B_{t\wedge\tau_k^{(i)}}^{(i)}, \quad 0\leq t\leq T,$$

est un mouvement brownien standard de loi initiale μ, arrêté à $\tau_k^{(i)}$. De plus, on montre que $\tau_k^{(i)}$, $(B_t^{(i)} : t \leq \tau_k^{(i)})$ et $Z_T^{(k,i)}$ s'expriment en termes de $X_{t\wedge\tau_k^{(i)}}^{(i)}$ indépendamment de $i = 1, 2$.

Pour $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ et $A \in \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^{2(n+1)}\big)$, on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^{(1)}\big((X_{t_0}^{(1)}, B_{t_0}^{(1)}, \dots, X_{t_n}^{(1)}, B_{t_n}^{(1)}) \in A, \tau_k^{(1)} = T\big)\\
&= \int_{\Omega^{(1)}} \frac{1}{Z_T^{(k,1)}} \mathbf{1}_{\{(X_{t_0}^{(1)}, B_{t_0}^{(1)}, \dots, X_{t_n}^{(1)}, B_{t_n}^{(1)})\in A, \tau_k^{(1)}=T\}}\, d\mathbb{Q}^{(k,1)}\\
&= \int_{\Omega^{(2)}} \frac{1}{Z_T^{(k,2)}} \mathbf{1}_{\{(X_{t_0}^{(2)}, B_{t_0}^{(2)}, \dots, X_{t_n}^{(2)}, B_{t_n}^{(2)})\in A, \tau_k^{(2)}=T\}}\, d\mathbb{Q}^{(k,2)}\\
&= \mathbb{P}^{(2)}\big((X_{t_0}^{(2)}, B_{t_0}^{(2)}, \dots, X_{t_n}^{(2)}, B_{t_n}^{(2)}) \in A, \tau_k^{(2)} = T\big)
\end{aligned}$$

où la deuxième égalité vient de l'observation précédente et du fait que sous $\mathbb{Q}^{(k,i)}$, $X^{(i),\tau_k^{(i)}}$ est un mouvement brownien (arrêté, de loi initiale μ). L'hypothèse sur a implique $\lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}^{(i)}\big(\tau_k^{(i)} = T\big) = 1$, $i = 1, 2$. On peut donc passer à la limite $k \to +\infty$ pour conclure pour tout $n \geq 1$, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ et $A \in \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^{2(n+1)}\big)$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^{(1)}\big((X_{t_0}^{(1)}, B_{t_0}^{(1)}, \dots, X_{t_n}^{(1)}, B_{t_n}^{(1)}) \in A, \big)\\
&= \lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}^{(1)}\big((X_{t_0}^{(1)}, B_{t_0}^{(1)}, \dots, X_{t_n}^{(1)}, B_{t_n}^{(1)}) \in A, \tau_k^{(1)} = T\big)\\
&= \lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}^{(2)}\big((X_{t_0}^{(2)}, B_{t_0}^{(2)}, \dots, X_{t_n}^{(2)}, B_{t_n}^{(2)}) \in A, \tau_k^{(2)} = T\big)\\
&= \mathbb{P}^{(2)}\big((X_{t_0}^{(2)}, B_{t_0}^{(2)}, \dots, X_{t_n}^{(2)}, B_{t_n}^{(2)}) \in A\big).
\end{aligned}$$

□

Le résultat suivant (admis) est une généralisation de la Proposition 9.10 pour une EDS avec un coefficient de diffusion plus général :

Théorème 9.12 (Beneš) *Soit $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction (globalement) lipschitzienne et ne s'annulant pas et B un mouvement brownien réel standard. L'EDS*

$$dX_t = a(X_t)\,dt + \sigma(X_t)\,dB_t$$

admet une solution faible qui est unique en loi.

L'hypothèse cruciale est que le coefficient de diffusion ne s'annule pas : le processus diffuse tout le temps. La non-nullité de ce coefficient joue un rôle essentiel dans l'étude de la régularité des lois de solutions d'EDS. Cela est exploré à l'aide du *calcul de Malliavin*.

9.5 Flot sur l'espace de Wiener

Dans l'exemple des EDS affines (9.11), la dépendance de la solution par rapport aux conditions initiales est explicite puisque (9.12) se réécrit $X_t = Z_t(X_0 + D_t)$. La solution X_t est donc une fonction affine de la condition initiale X_0. Lorsque les coefficients sont déterministes, les processus Z_t et D_t sont adaptés par rapport à la filtration $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s : s \le t)$, $t \ge 0$. Autrement dit, X_t est une fonction déterministe de X_0 et de la trajectoire du mouvement brownien sur $[0,t]$. En écrivant $[x]_t = \{s \mapsto x_s : s \le t\}$ la trajectoire d'une fonction x sur $[0,t]$, on peut écrire pour l'EDS affine

$$X_t(\omega) = F_{X_0}(t, [B(\omega)]_t)$$

où $F_x(t,w)$ est continue par rapport à x. On généralise cette observation en interprétant la solution de l'EDS $E(a,\sigma)$, ie. $dX_t = a(t,X_t)\,dt + \sigma(t,X_t)\,dB_t$, comme fonctionnelle sur l'espace de Wiener $\big(C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^m), \mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^m)), \mathbb{W}\big)$ (espace des trajectoires du mouvement brownien).

On rappelle que l'espace de Wiener est l'espace canonique d'un mouvement brownien B, issu de 0 à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, il s'agit donc de l'ensemble $C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^m)$ des fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}^m$, muni de la mesure de Wiener $\mathbb{W}$. En particulier, la mesure de Wiener $\mathbb{W}$ est la loi d'un mouvement brownien B.

Théorème 9.13 (Fonctionnelle sur l'espace de Wiener) *Sous les hypothèses lipschitziennes, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, il existe une fonctionnelle*

$$F_x : \left\{ \begin{array}{ccc} C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^m) & \to & C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d) \\ w & \mapsto & F_x(w) \end{array} \right.$$

mesurable et satisfaisant les propriétés suivantes :

(1) pour tout $t \ge 0$, $F_x(w)_t$ coïncide $\mathbb{W}(dw)$-ps avec une fonction mesurable de $[w]_t = \big\{w(r) : 0 \le r \le t\big\}$; avec un abus de notation, on écrira $F_x(t,[B]_t)$;

(2) pour tout $w \in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^m)$, l'application

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \longrightarrow & C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^m) \\ x & \mapsto & F_x(w) \end{array} \right.$$

est continue ;

(3) pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, pour tout choix d'espace de probabilité filtré $\big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\big)$ et tout $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien B en dimension m, le processus X défini par $X_t = F_x(B)_t$ est l'unique solution de $E(a,\sigma)$ avec valeur initiale x ; de plus, si Z est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable, le processus $(F_Z(B)_t)_{t\geq 0}$ est l'unique solution avec valeur initiale Z.

Remarque 9.14 L'assertion (3) montre en particulier qu'il y a unicité faible pour l'EDS $E(a,\sigma)$: les solutions de $E_x(a,\sigma)$ sont toutes de la forme $F_x(B)$ et ont donc la même loi, image de la mesure de Wiener $\mathbb{W}$ par F_x.

Démonstration : À nouveau, on simplifie la présentation de la preuve en considérant le cas $d = m = 1$. On note $\mathcal{N}$ la classe des sous-ensembles $\mathbb{W}$-négligeables de $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et on considère la filtration donnée pour tout $t \in [0, +\infty]$ par

$$\mathcal{G}_t = \sigma\big(w(s) : 0 \leq s \leq t\big) \vee \mathcal{N}.$$

D'après la Remarque 7.25, la filtration $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ est continue à droite, comme en plus elle est complète, elle satisfait les conditions habituelles. Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, on note X^x la solution de l'EDS $E_x(a,\sigma)$ associée à l'espace canonique $\big(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \mathcal{G}_\infty, (\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{W}\big)$ et au mouvement brownien (canonique) $B_t(w) = w(t)$. D'après le Théorème 9.8, sous les hypothèses lipschitziennes cette solution existe et est unique à indistinguabilité près.

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ et T_n le temps d'arrêt défini par

$$T_n = \inf\big(t \geq 0 : |X_t^x| \geq n \text{ ou } |X_t^y| \geq n\big).$$

Soit $p \geq 2$ et $T \geq 1$. On travaille sur $[0, T]$. En utilisant $(x+y+z)^p \leq 3^{p-1}(x^p + y^p + z^p)$, les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy (Théorème 7.14) et l'inégalité de Hölder, on a pour tout $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{s\leq t} |X^x_{s\wedge T_n} - X^y_{s\wedge T_n}|^p\right] \\
&\leq \; C_p \left(|x-y|^p + \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left|\int_0^{s\wedge T_n} \big(\sigma(r, X_r^x) - \sigma(r, X_t^y)\big)\, dB_r\right|^p\right]\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left|\int_0^{s\wedge T_n} \big(a(r, X_r^x) - a(r, X_r^y)\big)\, dr\right|^p\right]\right) \\
&\qquad \text{(convexité de } x^p) \\
&\leq \; C_p \left(|x-y|^p + C'_p \mathbb{E}\left[\left(\int_0^{t\wedge T_n} \big(\sigma(r, X_r^x) - \sigma(r, X_t^y)\big)^2\, dr\right)^{p/2}\right]\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \mathbb{E}\left[\left(\int_0^{t\wedge T_n} \big|a(r, X_r^x) - a(r, X_r^y)\big|\, dr\right)^p\right]\right) \\
&\qquad \text{(inégalité BDG droite pour } p \geq 2)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le C_p\bigg(|x-y|^p + C_p' t^{p/2-1}\mathbb{E}\bigg[\int_0^t \big|\sigma(r\wedge T_n, X^x_{r\wedge T_n}) - \sigma(r\wedge T_n, X^y_{t\wedge T_n})\big|^p\,dr\bigg] \\
&\qquad\qquad + t^{p-1}\mathbb{E}\bigg[\int_0^t \big|a(r\wedge T_n, X^x_{r\wedge T_n}) - a(r\wedge T_n, X^y_{r\wedge T_n})\big|^p\,dr\bigg]\bigg) \\
&\quad \text{(inégalité de Hölder)} \\
&\le C_p''\bigg(|x-y|^p + T^p\int_0^t \mathbb{E}\big[|X^x_{t\wedge T_n} - X^y_{r\wedge T_n}|^p\big]\,dr\bigg) \\
&\quad \text{(hypothèses lipschitziennes et } T\ge 1)
\end{aligned}
$$

où la constante $C_p''<+\infty$ dépend de p et de la constante K intervenant dans les hypothèses lipschitziennes sur σ et a mais pas de n, x, y ou T.

Puisque par définition de T_n, la fonction $t\mapsto \mathbb{E}\big[\sup_{s\le t}|X^x_{s\wedge T_n} - X^y_{s\wedge T_n}|^p\big]$ est bornée, le lemme de Grönwall (Lemme 7.8) s'applique avec $a=C_p''|x-y|^p$ et $b=C_p''T^p$ et entraîne que pour tout $t\in[0,T]$, on a

$$
\mathbb{E}\Big[\sup_{s\le t}|X^x_{s\wedge T_n} - X^y_{s\wedge T_n}|^p\Big] \le C_p''|x-y|^p\exp\big(C_p''T^pt\big). \tag{9.24}
$$

Comme

$$
\sup_{s\le t}|X^x_{s\wedge T_n} - X^y_{s\wedge T_n}|^p = \sup_{s\le t\wedge T_n}|X^x_s - X^y_s|^p \tag{9.25}
$$

et $T_n\nearrow+\infty$ (la Proposition 9.6 s'applique avec les hypothèses lipschitziennes), (9.25) est croissant en $n\ge 1$. Par convergence monotone, il vient alors de (9.24)

$$
\mathbb{E}\Big[\sup_{s\le t}|X^x_s - X^y_s|^p\Big] \le C_p''|x-y|^p\exp\big(C_p''T^pt\big).
$$

On considère sur $C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. Elle est définie par une distance du type

$$
d(w,w') = \sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k\Big(\sup_{s\le k}|w(s)-w'(s)|\wedge 1\Big)
$$

pour tout choix de la suite de réels positifs $\alpha_k>0$ tels que la série $\sum_{k\ge1}\alpha_k$ soit convergente. Ici, on fait le choix des coefficients α_k tels que

$$
\sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k\exp\big(C_p''k^{p+1}\big) < +\infty. \tag{9.26}
$$

D'après (9.24), ce choix (9.26) garantit que pour une constante $\widetilde{C}_p<+\infty$, on a :

$$
\sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k\mathbb{E}\Big[\sup_{s\le k}|X^x_s - X^y_s|^p\Big] \le \widetilde{C}_p|x-y|^p. \tag{9.27}
$$

Alors, les estimations précédentes et l'inégalité de Jensen montrent que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[d(X^x,X^y)^p\big] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k\left(\sup_{s\le k}|X_s^x-X_s^y|\wedge 1\right)\right)^p\right]\\
&= \left(\sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k\right)^p\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\alpha_k}{\sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k}\left(\sup_{s\le k}|X_s^x-X_s^y|\wedge 1\right)\right)^p\right]\\
&\le \left(\sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k\right)^p\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\alpha_k}{\sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k}\left(\sup_{s\le k}|X_s^x-X_s^y|\wedge 1\right)^p\right)\right]\\
&\quad\text{(inégalité de Jensen pour la probabilité } \textstyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\alpha_k}{\sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k}\delta_k\text{)}\\
&= \left(\sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k\right)^{p-1}\sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k\mathbb{E}\left[\sup_{s\le k}|X_s^x-X_s^y|^p\right]\le \widetilde{C}_p|x-y|^p.\\
&\quad\text{(avec la borne (9.27))}
\end{aligned}$$

Le théorème de Kolmogorov-Čentsov (Théorème 1.12) appliqué au processus $(X^x, x\in\mathbb{R})$ à valeurs dans $C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ muni de la distance d donne l'existence d'une modification $(\widetilde{X}^x, x\in\mathbb{R})$ dont les trajectoires sont continues. On note alors

$$F(t,x,w)=F_x(w)_t=\widetilde{X}_t^x(w).$$

Par choix de la version $\widetilde{X}$, $x\mapsto F_x(w)$ est continue ce qui établit la propriété (2) de l'énoncé.

L'application $w\mapsto F_x(w)$ est mesurable de $C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ muni de la tribu $\mathcal{G}_\infty$ dans $C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ muni de la tribu borélienne $\sigma(w(s):s\ge 0)$. De même, pour chaque $t\ge 0$, $F_x(w)_t=\widetilde{X}_t^x(w)$ est $\mathcal{G}_t$-mesurable donc coïncide ps avec une fonction mesurable de $[w]_t=\{w(s):0\le s\le t\}$, ce qui établit maintenant l'assertion (1).

On termine en montrant l'assertion (3). On commence par fixer l'espace de probabilité filtré $\big(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\ge0},\mathbb{P}\big)$ et un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien B. Il s'agit de voir que $F_x(B)$ est solution de l'EDS $E_x(a,\sigma)$:

$$dX_t=a(t,X_t)\,dt+\sigma(t,X_t)\,dB_t,\quad X_0=x.$$

On observe que le processus $F_x(B)$ est continu et adapté d'après (1) puisque $F_x(B)_t$ coïncide ps avec une fonction mesurable de $[B]_t=\{B_r:0\le r\le t\}$ en effet pour une fonction f_x mesurable sur $C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, par le théorème de transfert

$$\mathbb{P}\big(F_x(B)_t=f_x([B]_t)\big)=\mathbb{W}\big(F_x(w)_t=f_x([w]_t)\big)=1.$$

D'autre part, par construction de F_x, on a $\mathbb{W}(dw)$-ps

$$F_x(w)_t=x+\int_0^t\sigma(s,F_x(w)_s)\,dw(s)+\int_0^t a(s,F_x(w)_s)\,ds. \tag{9.28}$$

Il s'agit de récupérer la même identité (9.28) pour $F_x(B)$. Pour cela, on passe par des approximations de Riemann des intégrales dans (9.28).

De façon standard, l'intégrale de Stieltjes s'approxime par des sommes de Riemann (Prop. 5.10-5)) : on a $\mathbb{W}$-ps

$$\int_0^t a(s, F_x(w)_s)\, ds = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{p_n-1} a\left(t_i^{(n)}, F_x(w)_{t_i^{(n)}}\right)\left(t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}\right)$$

où $0 = t_0^{(n)} \le t_1^{(n)} \le \dots \le t_{p_n}^{(n)} = t$ est une subdivision de $[0,t]$ de pas qui tend vers 0. De la même façon, d'après 6) dans la Proposition 6.20, on a une approximation de Riemann pour l'intégrale stochastique $\int_0^t \sigma(s, F_x(w)_s)\, dw(s)$ mais dans le sens de la convergence en probabilité $\mathbb{W}$:

$$\int_0^t \sigma(s, F_x(w)_s)\, dw(s) = \mathbb{W}\text{-}\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{p_n-1} \sigma\left(t_i^{(n)}, F_x(w)_{t_i^{(n)}}\right)\left(w\big(t_{i+1}^{(n)}\big) - w\big(t_i^{(n)}\big)\right).$$

En prenant une sous-suite $(n_k)_{k\ge1}$ correctement choisie, on a une convergence $\mathbb{W}$-presque sûre :

$$\int_0^t \sigma(s, F_x(w)_s)\, dw(s) = \lim_{k\to+\infty} \sum_{i=0}^{p_{n_k}-1} \sigma\left(t_i^{(n_k)}, F_x(w)_{t_i^{(n_k)}}\right)\left(w\big(t_{i+1}^{(n_k)}\big) - w\big(t_i^{(n_k)}\big)\right).$$

Comme en plus $\mathbb{W}$-ps $F_x(w)_t = f_x([w]_t)$ pour une fonction f_x mesurable sur $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m)$, on a finalement

$$\begin{aligned} f_x([w]_t) \;&=\; x + \lim_{k\to+\infty} \left\{ \sum_{i=0}^{p_{n_k}-1} \sigma\left(t_i^{(n_k)}, F_x(w)_{t_i^{(n_k)}}\right)\left(w\left(t_{i+1}^{(n_k)}\right) - w\left(t_i^{(n_k)}\right)\right)\right. \\ &\qquad\qquad \left. + \sum_{i=0}^{p_{n_k}-1} a\big(t_i^{(n_k)}, F_x(w)_{t_i^{(n_k)}}\big)\big(t_{i+1}^{(n_k)} - t_i^{(n_k)}\big)\right\}. \end{aligned}$$

Maintenant qu'on s'est ramené à une convergence $\mathbb{W}$-presque sûre, on peut, comme précédemment, remplacer w par B (puisque sa loi sous $\mathbb{P}$ est $\mathbb{W}$) :

$$\begin{aligned} 1 \;&=\; \mathbb{W}\left(f_x([w]_t) = x + \lim_{k\to+\infty} \left\{ \sum_{i=0}^{p_{n_k}-1} \sigma\left(t_i^{(n_k)}, f_x([w]_{t_i^{(n_k)}})\right)\left(w\left(t_{i+1}^{(n_k)}\right) - w\left(t_i^{(n_k)}\right)\right)\right.\right. \\ &\qquad\qquad \left.\left. + \sum_{i=0}^{p_{n_k}-1} a\big(t_i^{(n_k)}, f_x([w]_{t_i^{(n_k)}})\big)\big(t_{i+1}^{(n_k)} - t_i^{(n_k)}\big)\right\}\right) \\ &=\; \mathbb{P}\left(f_x([B]_t) = x + \lim_{k\to+\infty} \left\{ \sum_{i=0}^{p_{n_k}-1} \sigma\left(t_i^{(n_k)}, f_x([B]_{t_i^{(n_k)}})\right)\left(B\left(t_{i+1}^{(n_k)}\right) - B\left(t_i^{(n_k)}\right)\right)\right.\right. \end{aligned}$$

$$+\sum_{i=0}^{p_{n_k}-1} a\big(t_i^{(n_k)}, f_x([B]_{t_i^{(n_k)}})\big)\big(t_{i+1}^{(n_k)}-t_i^{(n_k)}\big)\Bigg\}\Bigg).$$

Mais, en utilisant encore 6) dans la Proposition 6.20, on a

$$\begin{aligned}\int_0^t \sigma(s, f_x([B]_s))\,dB_s &= \mathbb{P}\text{-}\lim_{k\to+\infty}\sum_{i=0}^{p_{n_k}-1}\sigma\left(t_i^{(n_k)}, f_x([B]_{t_i^{(n_k)}})\right)\left(B\left(t_{i+1}^{(n_k)}\right)-B\left(t_i^{(n_k)}\right)\right) \text{ (en proba)}\\ \int_0^t a(s, f_x([B]_s))\,ds &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{p_n-1} a\big(t_i^{(n)}, f_x([B]_{t_i^{(n)}})\big)\big(t_{i+1}^{(n)}-t_i^{(n)}\big) \quad \mathbb{P}\text{-ps}\end{aligned}$$

c'est à dire finalement (par unicité de la limite en probabilité) : $\mathbb{P}$-ps

$$F_x(B)_t = f_x([B]_t) = x + \int_0^t \sigma(s, F_x(B)_s)\,dB_s + \int_0^t a(s, F_x(B)_s)\,ds.$$

On obtient donc que $F_x(B)$ est la solution recherchée de l'EDS $E_x(a,\sigma)$.

Pour finir, on établit la deuxième partie de (3). On fixe à nouveau l'espace de probabilité filtré $\big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\big)$ et le $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien B. Soit Z une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable. En remplaçant formellement, dans l'EDS vérifiée par $F_x(B)$, x par Z, on obtient que $F_Z(B)$ est solution de $E(a,\sigma)$ avec valeur initiale Z. On justifie maintenant ce remplacement formel.

D'abord comme $(x,\omega)\mapsto F_x(B)_t$ est continue par rapport à x et $\mathcal{F}_t$-mesurable par rapport à ω, on a facilement que cette application est mesurable pour la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{F}_t$. Comme Z est $\mathcal{F}_0$-mesurable, il s'en déduit par composition que $F_Z(B)_t$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable et le processus $F_Z(B)$ est donc continu et adapté.

On a vu précédemment que

$$\begin{aligned}F_x(B)_t \;=\; x+\mathbb{P}\text{-}\lim_{k\to+\infty}&\left\{\sum_{i=0}^{p_{n_k}-1}\sigma\left(t_i^{(n_k)}, F_x(B)_{t_i^{(n_k)}}\right)\left(B\left(t_{i+1}^{(n_k)}\right)-B\left(t_i^{(n_k)}\right)\right)\right.\\ &\left.+\sum_{i=0}^{p_{n_k}-1} a\big(t_i^{(n_k)}, F_x(B)_{t_i^{(n_k)}}\big)\big(t_{i+1}^{(n_k)}-t_i^{(n_k)}\big)\right\}.\end{aligned}$$

De plus, comme Z est $\mathcal{F}_0$-mesurable, on a $Z \perp\!\!\!\perp B$. On peut donc remplacer précédemment x par Z et, en utilisant encore 6) dans la Proposition 6.20, avoir (avec $Z\perp\!\!\!\perp B$ encore)

$$F_Z(B)_t = Z + \int_0^t \sigma(s, F_Z(w)_s)\,dB_s + \int_0^t a(s, F_Z(B)_s)\,ds$$

ce qui établit que $F_Z(B)$ est solution de $E(a,\sigma)$ avec valeur initiale Z. □

Pour chaque $x \in \mathbb{R}^d$, on note P_x la loi sur $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ des solutions de $E_x(a, \sigma)$ (unicité faible). D'après le Théorème 9.13, on a $P_x = \mathbb{W}F_x^{-1}$. L'assertion (2) dans le Théorème 9.13 montre que $x \mapsto P_x$ est continue pour la topologie de la convergence étroite : soit $x_n \to x$, pour $f \in C_b\big(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)\big)$

$$\mathbb{E}_{x_n}[f] = \int f\, dP_{x_n} = \int f(F_{x_n}(w))\, d\mathbb{W}(w) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int f(F_x(w))\, d\mathbb{W}(w) = \int f\, dP_x = \mathbb{E}_x[f] \tag{9.29}$$

où on utilise $\lim_{n\to+\infty} F_{x_n}(w) = F_x(w)$ due au 2) du Théorème 9.13 et la convergence dominée puisque $f \in C_b\big(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)\big)$. Par un argument de classe monotone, on peut généraliser cette propriété ci-dessus :

Proposition 9.15 *Pour toute fonction Φ borélienne de $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ dans $\mathbb{R}$, l'application $x \in \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{E}_x[\Phi]$ est elle aussi mesurable.*

Pour prouver la Proposition 9.15, on utilise les notions suivantes :

Définition 9.16 *Soit Ω un ensemble.*

1. *Une collection $\mathcal{H}$ de fonctions à valeurs réelles sur Ω est appelée un* **espace vectoriel monotone** *si*
   (a) *$\mathcal{H}$ est un espace vectoriel ;*
   (b) *toute $f \in \mathcal{H}$ est bornée ;*
   (c) *les fonctions constantes sont dans $\mathcal{H}$;*
   (d) *si $(f_n)_{n\geq1} \subset \mathcal{H}$ et $f_n \uparrow f$ pour une fonction f bornée alors $f \in \mathcal{H}$.*
2. *Une collection $\mathcal{M}$ de fonctions réelles sur Ω est une* **classe multiplicative** *si $f, g \in \mathcal{M}$ implique $fg \in \mathcal{M}$.*

On a alors le résultat suivant :

Théorème 9.17 (Classes monotones version fonctionnelle) *Soit Ω un ensemble. Si $\mathcal{M}$ est une classe multiplicative telle que $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{F}$ alors tout espace vectoriel monotone contenant $\mathcal{M}$ contient $L^\infty(\mathcal{F})$.*

Démonstration : Voir [JCB-proba].

Démonstration :[Prop. 9.15] On applique le Théorème 9.17 avec

$$\Omega = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d), \quad \mathcal{F} = \mathcal{B}\big(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)\big).$$

On considère

$$\mathcal{A} = \{\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^+ \text{ bornée} : x \mapsto \mathbb{E}_x[\Phi] \text{ est mesurable}\}.$$

Comme $\mathcal{A}$ est clairement un espace vectoriel contenant les fonctions constantes, comme $\Phi \in \mathcal{A}$ est bornée (par définition de $\mathcal{A}$) et comme lorsque $\Phi_n \in \mathcal{A} \uparrow \Phi$ bornée alors (par convergence monotone) $\mathbb{E}_x[\Phi] = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}_x[\Phi_n]$ est mesurable en tant que limite de fonctions mesurables, alors $\mathcal{A}$ est espace vectoriel monotone. Puis $\mathcal{M} = C_b\big(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)\big)$ est une classe multiplicative puisque le produit de deux fonctions continues bornées le reste.

Comme par le Théorème 9.13, on a vu en (9.29) que $\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$, et comme $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{F}$, le théorème de classes monotones version fonctionnelle (Théorème 9.17) assure alors que

$$L^\infty\Big(\mathcal{B}\big(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)\big)\Big) \subset \mathcal{A},$$

c'est à dire Φ borélienne bornée est dans $\mathcal{A}$.

Si Φ est borélienne positive non bornée, on a $\Phi = \lim_{n\to+\infty} \Phi_n$ où $\Phi_n = \Phi \mathbf{1}_{\{\Phi \le n\}} \in \mathcal{A}$. Comme $\mathbb{E}_x[\Phi_n]$ est mesurable par le cas précédent, la limite obtenue par convergence monotone $\mathbb{E}_x[\Phi] = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}_x[\Phi_n]$ est encore mesurable et on a donc $\Phi \in \mathcal{A}$.

Si Φ est de signe quelconque, on écrit $\Phi = \Phi^+ - \Phi^-$ et on conclut de façon standard puisque par le cas précédent $\mathbb{E}_x[\Phi^\pm]$ est mesurable et donc $\mathbb{E}[\Phi] = \mathbb{E}_x[\Phi^+] - \mathbb{E}_x[\Phi^-]$ l'est aussi. □

Propriété de flot

On suppose toujours valides les hypothèses lipschitziennes.
On considère maintenant le cas général de l'EDS $E(a, \sigma)$ qui part de x à la date r, ie. avec $X_r = x$ et on note la solution $X_t^{r,x}$ pour $t \ge r$. D'après le Théorème 9.13, on peut écrire

$$X_t^{r,x} = F\big(r, x, t, [B_\cdot - B_r]_t\big)$$

où $(B_\cdot - B_r)_{s+r} = B_{s+r} - B_r$ est la valeur en s du mouvement brownien translaté en temps de r (c'est bien un mouvement brownien d'après la propriété de Markov faible).

Théorème 9.18 (Propriété de flot) *Sous les hypothèses lipschitziennes, la solution de l'EDS $E(a, \sigma)$ avec $X_r = x$ vérifie la propriété de flot : pour $t_0 \ge 0$,*

$$\begin{aligned} F\big(r, x, t_0 + t, [B_\cdot - B_r]_{t_0+t}\big) &= F\big(t_0, X_{t_0}^{r,x}, t_0 + t, [B_\cdot - B_{t_0}]_{t_0+t}\big) \\ \text{ie.} \quad X_{t_0+t}^{r,x} &= X_{t_0+t}^{t_0, X_{t_0}^{r,x}}. \end{aligned} \tag{9.30}$$

Cette propriété s'étend pour des temps aléatoires : soit T un temps d'arrêt borné

$$\begin{aligned} F\big(r, x, T + t, [B_\cdot - B_r]_{T+t}\big) &= F\big(T, X_T^{r,x}, T + t, [B_\cdot - B_T]_{T+t}\big) \\ \text{ie.} \quad X_{T+t}^{r,x} &= X_{T+t}^{T, X_T^{r,x}}. \end{aligned} \tag{9.31}$$

Démonstration : La propriété de flot (9.30) vient de l'unicité forte de la solution de l'EDS $E(a, \sigma)$ sous les hypothèses lipschitziennes (Théorème 9.8). En effet, le processus

$$t \mapsto F\big(t_0, X_{t_0}^{r,x}, t_0 + t, [B_\cdot - B_{t_0}]_{t_0+t}\big)$$

est une solution issue de $X_{t_0}^{r,x}$ à l'instant $t = 0$. Il en est de même du processus

$$t \mapsto F\big(r, x, t_0 + t, [B_\cdot - B_r]_{t_0+t}\big)$$

puisque à la date $t = 0$, il est en $F(r, x, t_0, [B_\cdot - B_r]_{t_0}) = X_{t_0}^{r,x}$. Les deux processus sont adaptés par rapport à la filtration $\mathcal{G}_t = \sigma(B_{t_0+t} - B_{t_0}) \vee \sigma(B_s - B_r : r \le r \le t_0)$, $t \ge 0$, et $X_{t_0}^{r,x}$ est bien mesurable par rapport à $\mathcal{G}_0 = \sigma(B_s - B_r : r \le r \le t_0)$. Par unicité forte dans le 3) du Théorème 9.13, ces deux processus continus en t sont égaux.

Pour un temps d'arrêt T, on procède de même en notant que, par la propriété de Markov forte, $(B_{T+t} - B_T)_{t\ge 0}$ est un mouvement brownien, cf. Théorème 3.40. □

9.6 Markov fort pour EDS homogène

Dans cette section, on suppose toujours satisfaites les hypothèses lipschitziennes de la Section 9.3. Pour avoir des propriétés markoviennes homogènes, on suppose de plus que l'EDS est homogène, c'est à dire que les coefficients de l'EDS ne dépendent pas du temps :

$$a(t, x) = a(x), \quad \sigma(t, x) = \sigma(x).$$

Théorème 9.19 (Markov fort pour EDS homogène) *On considère une EDS $E(a, \sigma)$ satisfaisant les conditions lipschitziennes. Soit X une solution de $E(a, \sigma)$ sur un espace de probabilité filtré $\big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}, \mathbb{P}\big)$ et soit T un temps d'arrêt fini ps. Alors pour $\Phi : C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}_+$ borélienne, on a*

$$\mathbb{E}\big[\Phi(X_{T+t} : t \ge 0)\,|\mathcal{F}_T\big] = \mathbb{E}_{X_T}[\Phi]$$

c'est à dire pour toute variable aléatoire Z positive $\mathcal{F}_T$-mesurable

$$\mathbb{E}\big[Z\Phi(X_{T+t} : t \ge 0)\big] = \mathbb{E}\big[Z\mathbb{E}_{X_T}[\Phi]\big]$$

ie. $\mathcal{L}\big((X_{T+t})_{t\ge 0}\,|\mathcal{F}_T\big) = \mathcal{L}\big((X_t)_{t\ge 0}\,|X_T\big)$.

Remarque 9.20 Ce résultat signifie que la solution X de l'EDS vérifie la propriété de Markov forte par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$: pour tout temps d'arrêt fini T, la loi conditionnelle du « futur » $(X_{T+t} : t \ge 0)$ connaissant le « passé » $\mathcal{F}_T$ est la loi de X partant de X_T, qui ne dépend que du présent à l'instant T. Dans le cas particulier $\sigma = Id$ et $a = 0$, on retrouve la propriété de Markov forte pour le mouvement brownien. C'est du reste sur celle-ci qu'on s'appuie pour la preuve.

Démonstration : Pour simplifier la présentation de la preuve, on suppose encore que $m = 1$, $d = 1$. Notons $B_t^{(T)} = B_{T+t} - B_T$. Il s'agit d'un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_T$ (propriété de Markov forte pour le mouvement brownien B, cf. Théorème 3.40). On pose aussi $X'_t = X_{T+t}$ et on remarque que le processus X' est adapté par rapport à la filtration $(\mathcal{F}'_t)_{t\ge 0}$ donnée par $\mathcal{F}'_t = \mathcal{F}_{T+t}$ et qu'elle satisfait les conditions habituelles. De plus, d'après $E(a, \sigma)$ satisfaite par X, on a

$$X'_t \;=\; X_{T+t} = X_0 + \int_0^{T+t} a(X_s)\,ds + \int_0^{T+t} \sigma(X_s)\,dB_s$$

$$
\begin{aligned}
&= X_0 + \int_0^T a(X_s)\,ds + \int_0^T \sigma(X_s)\,dB_s + \int_T^{T+t} a(X_s)\,ds + \int_T^{T+t} \sigma(X_s)\,dB_s \\
&= X_T + \int_T^{T+t} a(X_s)\,ds + \int_T^{T+t} \sigma(X_s)\,dB_s. \qquad (9.32)
\end{aligned}
$$

Par le changement de variable $x = T + u$, on a de suite

$$\int_T^{T+t} a(X_s)\,ds = \int_0^t a(X'_u)\,du \qquad (9.33)$$

(comme il s'agit d'une intégrale de Riemann définie ω par ω, on peut faire le changement de variable sans problème ω par ω, la valeur $T = T(\omega)$ étant alors figée).

On fait aussi un changement de variable dans l'intégrale stochastique à l'aide du lemme suivant :

Lemme 9.21 *Si h est un processus continu adapté, on a*

$$\int_T^{T+t} h(s,\omega)\,dB_s = \int_0^t h(T+u,\omega)\,dB_u^{(T)}.$$

On déduit alors du Lemme 9.21 que

$$\int_T^{T+t} \sigma(X_s)\,dB_s = \int_0^t \sigma(X_{T+u})\,dB_u^{(T)} = \int_0^t \sigma(X'_u)\,dB_u^{(T)}. \qquad (9.34)$$

On a donc en injectant (9.33), (9.34) dans (9.32) :

$$X'_{T+t} = X_T + \int_0^t a(X'_u)\,du + \int_0^t \sigma(X'_u)\,dB_u^{(T)}.$$

De plus, on remarque que X' est adapté par rapport à la filtration $(\mathcal{F}'_t)_{t\geq 0}$, que $B^{(T)}$ est un $(\mathcal{F}'_t)$-mouvement brownien et que X_T est mesurable par rapport à $\mathcal{F}'_0 = \mathcal{F}_T$. D'après (3) dans le Théorème 9.13, on doit avoir ps $X' = F_{X_T}\big(B^{(T)}\big)$. Le résultat du théorème suit alors facilement : comme X_T est $\mathcal{F}_T$-mesurable et $B^{(T)}$ est indépendant de $\mathcal{F}_T$ (propriété de Markov forte pour B), on a

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[\Phi(X'_t : t\geq 0)\,|\mathcal{F}_T\big] &= \mathbb{E}\big[\Phi\big(F_{X_T}(B^{(T)})\big)\,|\mathcal{F}_T\big] \\
&= \int_{C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})} \Phi(F_{X_T}(w))\;\mathbb{W}(dw) = \mathbb{E}_{X_T}\big[\Phi(X_t : t\geq 0)\big],
\end{aligned}
$$

puisque $F_x(w)$ est solution sur l'espace de Wiener de $E_x(a,\sigma)$. $\square$

Démonstration :[Lemme 9.21] En utilisant les arguments usuels d'approximation, il suffit de faire la preuve pour h combinaison linéaire finie de processus de la forme $h(s,\omega) = \varphi(\omega)\mathbf{1}_{]r,r']}(s)$ où φ est $\mathcal{F}_r$-mesurable :

$$\int_T^{T+t} h(s,\omega)\,dB_s = \int_T^{T+t} \varphi(\omega)\mathbf{1}_{]r,r']}(s)\,dB_s = \varphi(\omega)\int \mathbf{1}_{[T,T+t]}(s)\mathbf{1}_{]r,r']}(s)\,dB_s$$

$$= \quad \varphi(\omega)\int \mathbf{1}_{]r\vee T,(r'\wedge(T+t))\vee(r\vee T)]}(s)\,dB_s = \varphi(\omega)\int_{r\vee T}^{(r'\wedge(T+t))\vee(r\vee T)} B_s$$

car

$$[a,b]\cap]c,d] =]a\vee c,(b\wedge d)\vee(a\vee c)] \tag{9.35}$$

(à noter qu'on prend comme borne supérieure $(b\wedge d)\vee(a\vee c)$ pour avoir un intervalle vide lorsque $[a,b]\cap]c,d]=\emptyset$). On a donc

$$\int_T^{T+t} h(s,\omega)\,dB_s = \varphi(\omega)\big(B((r'\wedge(T+t))\vee(r\vee T)) - B(r\vee T)\big).$$

Puis comme $T\le r\vee T\le (r'\wedge(T+t))\vee(r\vee T)$, on a

$$\begin{aligned}
&B((r'\wedge T+t)\vee(r\vee T)) - B(r\vee T)\\
&\quad = \big(B((r'\wedge(T+t))\vee(r\vee T)) - B_T\big) - \big(B(r\vee T)-B_T\big)\\
&\quad = B^{(T)}((r'-T)\wedge t\vee((r-T)\vee 0)) - B^{(T)}((r-T)\vee 0)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_T^{T+t} h(s,\omega)\,dB_s &= \varphi(\omega)B^{(T)}((r'-T)\wedge t\vee((r-T)\vee 0)) - B^{(T)}((r-T)\vee 0)\big)\\
&= \varphi(\omega)\int_{(r-T)\vee 0}^{(r'-T)\wedge t\vee((r-T)\vee 0)} dB_u^{(T)} = \int_{(r-T)\vee 0}^{(r'-T)\wedge t\vee((r-T)\vee 0)} \varphi(\omega)\,dB_u^{(T)}\\
&= \int \varphi(\omega)\mathbf{1}_{[0,t]\cap]r-T,r'-T]}(u)\,dB_u^{(T)},
\end{aligned}$$

en utilisant (9.35), et donc

$$\begin{aligned}
\int_T^{T+t} h(s,\omega)\,dB_s &= \int_0^t \varphi(\omega)\mathbf{1}_{]r-T,r'-T]}(u)\,dB_u^{(T)} = \int_0^t \varphi(\omega)\mathbf{1}_{]r,r']}(T+u)\,dB_u^{(T)}\\
&= \int_0^t h(T+u,\omega)\,dB_u^{(T)}.
\end{aligned}$$

□

Chapitre 10

Mouvement brownien et EDP

Des liens importants existent entre probabilités et équations aux dérivées partielles (EDP) via les processus stochastiques. Ceux-ci sont souvent reliés à des opérateurs différentiels linéaires, ce qui permet d'exprimer les solutions de certaines EDP en termes de processus stochastiques. L'opérateur le plus simple est le laplacien Δ et il est directement relié au mouvement brownien. On étudie dans ce chapitre les connexions entre mouvement brownien et équations liées au laplacien : équation de Laplace, problème de Dirichlet, équation de la chaleur, formule de Feynman-Kac.

Notations. Pour $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ suffisamment régulière, on note

$$\begin{aligned}
\partial_t f(t,x) &= \frac{\partial f}{\partial t}(t,x), \\
\partial_{x_i} f(t,x) &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,x_1,\dots,x_d), \\
\partial^2_{x_i,x_j} f(t,x) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(t,x_1,\dots,x_d), \\
\nabla f(t,x) &= \Big(\partial_{x_1} f(t,x),\dots,\partial_{x_d} f(t,x)\Big) \quad \text{(le gradient de } f) \\
\Delta f(t,x) &= \sum_{i=1}^d \partial^2_{x_i,x_i} f(t,x) \quad \text{(le laplacien de } f).
\end{aligned}$$

On a facilement $\nabla \cdot \nabla = \Delta$. Si nécessaire, on précise la variable de dérivation en notant ∇_x ou Δ_x.

10.1 Fonctions harmoniques

On a vu au Chapitre 7 avec (7.9) que le laplacien est naturellement relié au mouvement brownien standard B dans $\mathbb{R}^d$. En effet, on rappelle que par la formule d'Itô on montre que si $\Phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est C^2 alors

$$\Phi(B_t) = \Phi(B_0) + \int_0^t \nabla\Phi(B_s)\cdot dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \Delta\Phi(B_s)ds, \tag{10.1}$$

où
$$\nabla\Phi(B_s)\cdot dB_s=\sum_{i=1}^d \partial_{x_i}\Phi(B_s)dB_s^{(i)}.$$
Ainsi, si $\Delta\Phi=0$, alors $\Phi(B)$ est une martingale locale.

Définition 10.1 (Fonction harmonique) *Soit $D\subset\mathbb{R}^d$ un domaine (ouvert, connexe). Une fonction $u:D\to\mathbb{R}$ est dite harmonique si u est de classe C^2 sur D et satisfait l'équation de Laplace $\Delta u=0$ dans D.*

Exemple 10.2 En dimension 2 : $\ln(x_1^2+x_2^2)$ et $e^{x_1}\sin x_2$ sont harmoniques sur $\mathbb{R}^2$.
En effet, on a
$$\begin{aligned}\partial_{x_1}\big(\ln(x_1^2+x_2^2)\big) &= \frac{2x_1}{x_1^2+x_2^2},\\ \partial^2_{x_1,x_1}\big(\ln(x_1^2+x_2^2)\big) &= \frac{2}{x_1^2+x_2^2}-\frac{4x_1^2}{(x_1^2+x_2^2)^2}=\frac{2x_2^2-2x_1^2}{(x_1^2+x_2^2)^2},\end{aligned}$$
et on a donc
$$\begin{aligned}\Delta\big(\ln(x_1^2+x_2^2)\big) &= \partial^2_{x_1,x_1}\big(\ln(x_1^2+x_2^2)\big)+\partial^2_{x_2,x_2}\big(\ln(x_1^2+x_2^2)\big)\\ &= \frac{2x_2^2-2x_1^2}{(x_1^2+x_2^2)^2}+\frac{2x_1^2-2x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2}=0.\end{aligned}$$
Puis
$$\partial^2_{x_1,x_1}\big(e^{x_1}\sin x_2\big)=e^{x_1}\sin x_2 \quad \text{et} \quad \partial^2_{x_2,x_2}\big(e^{x_1}\sin x_2\big)=-e^{x_1}\sin x_2$$
donne
$$\begin{aligned}\Delta\big(e^{x_1}\sin x_2\big) &= \partial^2_{x_1,x_1}\big(e^{x_1}\sin x_2\big)+\partial^2_{x_2,x_2}\big(e^{x_1}\sin x_2\big)\\ &= e^{x_1}\sin x_2-e^{x_1}\sin x_2=0.\end{aligned}$$

En dimension $d\geq 3$: $1/\|x\|^{d-2}$ l'est sur $D=\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$.
En effet, on a
$$\begin{aligned}\partial_{x_i}\big(\|x\|^{2-d}\big) &= \partial_{x_i}\Big(\big(\sum_{i=1}^d x_i^2\big)^{(2-d)/2}\Big)=(2-d)x_i\Big(\sum_{i=1}^d x_i^2\Big)^{-d/2}\\ \partial^2_{x_i,x_i}\big(\|x\|^{2-d}\big) &= (2-d)\big(\sum_{i=1}^d x_i^2\big)^{-d/2}-d(2-d)x_i^2\Big(\sum_{i=1}^d x_i^2\Big)^{-(d+2)/2}\\ &= (2-d)\|x\|^{-d}-d(2-d)x_i^2\|x\|^{-(d+2)},\end{aligned}$$
et on a donc
$$\begin{aligned}\Delta\big(\|x\|^{2-d}\big) &= \sum_{i=1}^d \partial^2_{x_i,x_i}\big(\|x\|^{2-d}\big)\\ &= d(2-d)\|x\|^{-d}-d(2-d)\Big(\sum_{i=1}^d x_i^2\Big)\|x\|^{-(d+2)}=0.\end{aligned}$$

La propriété suivante joue un rôle essentiel pour relier les solutions d'EDP à des espérances de processus arrêtés en des temps de sortie de domaine. Dans la suite, pour G ouvert, on note pour B mouvement brownien :

$$\begin{aligned} \tau_G &= \inf(t \geq 0 : B_t \notin G) \text{ le temps d'entrée dans } G^c, \\ \sigma_G &= \inf(t > 0 : B_t \notin G) \text{ le temps de sortie de } G. \end{aligned}$$

On note que le temps de sortie de G est plus grand que le temps d'entrée dans G^c : $\sigma_G \geq \tau_G$. Par exemple si G est ouvert et B part de ∂G, on a $\tau_G = 0$ mais $\sigma_G > 0$ si B commence par entrer dans G.

Proposition 10.3 *Soit G un ouvert borné avec $\overline{G} \subset D$ et B un mouvement brownien issu de $a \in G$. Si $u : D \to \mathbb{R}$ est harmonique alors*

$$M_t = u(B_{t\wedge\tau_G}) - u(a), \quad t \geq 0,$$

est une (vraie) martingale centrée.

Démonstration : La fonction u n'est définie que sur D. Pour appliquer la formule d'Itô, on commence par la prolonger sur $\mathbb{R}^d$ en $\Phi \in C^2(\mathbb{R}^d)$ (qui coïncide avec u sur $\overline{G}$, mais pas nécessairement sur D). Par exemple, on peut obtenir un tel prolongement par convolution avec :

$$\Phi = \begin{cases} (\mathbf{1}_{G_{2\delta}} * \rho) \times u & \text{dans } D \\ 0 & \text{dans } D^c \end{cases}$$

où $G_{2\delta}$ est le (2δ)-voisinage de G avec $4\delta = \mathrm{dist}(G, D^c) > 0$ et où ρ est une fonction d'intégrale 1, C^∞ et à support dans $B(0,\delta)$. La formule d'Itô (10.1) pour $\Phi \in C^2(\mathbb{R}^d)$ s'écrit

$$\begin{aligned} \Phi(B_{t\wedge\tau_G}) &= \Phi(a) + \int_0^{t\wedge\tau_G} \nabla\Phi(B_s)\cdot dB_s + \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau_G} \Delta\Phi(B_s)ds \\ u(B_{t\wedge\tau_G}) &= u(a) + \int_0^{t\wedge\tau_G} \nabla\Phi(B_s)\cdot dB_s \end{aligned}$$

car $\Phi_{|\overline{G}} = u_{|\overline{G}}$ et comme u est harmonique sur G, on a $\Delta\Phi(B_s) = 0$ pour $s \in [0, t\wedge\tau_G]$. Puis, comme $\nabla\Phi$ est borné sur $\overline{G}$, on a

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\left\langle \int_0^{\cdot} \mathbf{1}_{[0,\tau_G]}(s)\nabla\Phi(B_s)\cdot dB_s, \int_0^{\cdot} \mathbf{1}_{[0,\tau_G]}(s)\nabla\Phi(B_s)\cdot dB_s \right\rangle_t\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^t \mathbf{1}_{[0,\tau_G]}(s)\|\nabla\Phi(B_s)\|^2\,ds\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \|\nabla\Phi(B_{s\wedge\tau_G})\|^2\,ds\right] < +\infty \end{aligned}$$

et le Théorème 5.36 assure que la martingale locale $\left(\int_0^t \mathbf{1}_{[0,\tau_G]}(s)\nabla\Phi(B_s)\cdot dB_s\right)_{t\geq 0}$ est une (vraie) martingale L^2. Finalement,

$$M_t = u(B_{t\wedge\tau_G}) - u(a) = \int_0^t \mathbf{1}_{[0,\tau_G]}(s)\nabla\Phi(B_s)\cdot dB_s$$

est une martingale L^2 et centrée car nulle en $t=0$. □

Définition 10.4 (Formule de la moyenne) *Une fonction réelle u est dite satisfaire la formule de la moyenne sur D si pour toute boule ouverte $B(a,r)$ telle que $\overline{B}(a,r)\subset D$, on a*

$$u(a)=\int_{\partial B(a,r)} u(y)\ \lambda_{a,r}(dy) \tag{10.2}$$

où $\lambda_{a,r}$ est la probabilité uniforme sur la sphère $\partial B(a,r)$.

Cette propriété signifie que la valeur de u en tout point a s'obtient comme moyenne de u sur n'importe quelle sphère centrée en a, d'adhérence dans D.

Notons que le volume de la boule $B(a,r)$ est

$$\mathrm{Vol}\big(B(a,r)\big)=\frac{2r^d\pi^{d/2}}{d\Gamma(\frac{d}{2})}:=V_r,$$

et son aire de surface est

$$S_r=\partial_r\mathrm{Vol}\big(B(a,r)\big)=\frac{2r^{d-1}\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2})}=\frac{d}{r}V_r.$$

Ainsi, on déduit l'expression suivante pour les intégrales sur les boules :

$$\int_{B(a,r)} f(x)\,dx=\int_0^r S_\rho\int_{\partial B(a,\rho)} f(y)\ \lambda_{a,\rho}(dy)d\rho. \tag{10.3}$$

Proposition 10.5 *Soit $u:D\to\mathbb{R}$. Alors u est harmonique sur D si et seulement si u vérifie la formule de la moyenne (10.2).*

Démonstration : $\boxed{\Rightarrow}$ On applique la Proposition 10.3 avec $G=B(a,r)$:

$$\mathbb{E}_a[u(B_{t\wedge\tau_G})]-u(a)=\mathbb{E}_a[M_t]=0,$$

par la propriété de martingale. Comme G est borné, $\tau_G<+\infty$ ps, et en faisant $t\to+\infty$, on déduit par convergence dominée (puisque u est bornée sur $B(a,r)$) :

$$u(a)=\mathbb{E}_a[u(B_{\tau_G})]. \tag{10.4}$$

On observe que le mouvement brownien standard issu de a est isotrope : aucune direction n'est privilégiée par le processus, ie. la loi de B est invariante par les rotations de centre a. En effet si R_a est une rotation centée en a alors $R_a(B)\sim B$. Par conséquent, la loi du point de sortie $B_{\tau_{\partial B(a,r)}}$ de B de la boule $B(a,r)$ est invariante aussi par les rotations de centre a : $R_a(B_{\tau_{\partial B(a,r)}})\sim B_{\tau_{\partial B(a,r)}}$. Comme la probabilité uniforme $\lambda_{a,r}$ est la seule loi sur la sphère $\partial B(a,r)$ invariante par rotation (de centre a), il s'agit nécessairement de la loi de B_{τ_G} : $\mathbb{P}_a(B_{\tau_{\partial B(a,r)}} \in \cdot) = \lambda_{a,r}$. On réécrit alors (10.4) comme suit

$$u(a) = \mathbb{E}_a[u(B_{\tau_G})] = \int_{\partial B(a,r)} u(y)\,\lambda_{a,r}(dy). \tag{10.5}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose maintenant que u vérifie la formule de la moyenne (10.2). On commence par montrer que u est de classe C^∞. Pour $\varepsilon > 0$, soit $g_\varepsilon : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ la fonction C^∞ donnée par

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} c_\varepsilon \exp\left(\frac{1}{\|x\|^2-\varepsilon^2}\right) & \text{si } \|x\| < \varepsilon \\ 0 & \text{si } \|x\| \geq \varepsilon \end{cases}$$

où la constante c_ε est choisie de façon que

$$\int_{B(0,\varepsilon)} g_\varepsilon(x)\,dx = c_\varepsilon \int_0^\varepsilon S_\rho \exp\left(\frac{1}{\rho^2-\varepsilon^2}\right) d\rho = 1. \tag{10.6}$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $a \in D$ tels que $\overline{B(a,\varepsilon)} \subset D$, on pose $u_\varepsilon = u * \rho_\varepsilon$. Il est clair que u_ε est C^∞ sur le domaine D où elle est définie. De plus pour tout $a \in D$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{B(a,\varepsilon)} \subset D$, on déduit alors, à l'aide du théorème de Fubini, de la formule de la moyenne et de la normalisation (10.6) :

$$\begin{aligned}
u_\varepsilon(a) &= \int_{\mathbb{R}^d} u(x) g_\varepsilon(x-a)\,dx = \int_{B(0,\varepsilon)} u(a+x) g_\varepsilon(x)\,dx \\
&= c_\varepsilon \int_0^\varepsilon S_\rho \int_{\partial B_\rho} u(a+y) \exp\left(\frac{1}{\rho^2-\varepsilon^2}\right)\ \lambda_{0,\rho}(dy) d\rho \\
&= c_\varepsilon \int_0^\varepsilon S_\rho \Big(\int_{\partial B(a,\rho)} u(y)\ \lambda_{a,\rho}(dy) \Big)\ \exp\left(\frac{1}{\rho^2-\varepsilon^2}\right) d\rho \\
&= c_\varepsilon \int_0^\varepsilon S_\rho u(a) \exp\left(\frac{1}{\rho^2-\varepsilon^2}\right) d\rho \\
&= u(a)
\end{aligned}$$

en utilisant l'écriture (10.3) des intégrales. Comme $u = u_\varepsilon$ sur D avec $u_\varepsilon = u * g_\varepsilon \in C^\infty$, on a aussi u de classe C^∞ sur D.

Pour voir que $\Delta u = 0$ sur D, on choisit $a \in D$ et on écrit la formule de Taylor en a :

$$u(a+y) = u(a) + \sum_{i=1}^d y_i \partial_{x_i} u(a) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d y_i y_j \partial^2_{x_i,x_j} u(a) + o(\|y\|^2), \quad y \in \overline{B(0,\varepsilon)}, \tag{10.7}$$

où $\varepsilon > 0$ est assez petit pour que $\overline{B(a,\varepsilon)} \subset D$ où u est C^∞. Comme par symétrie, on a

$$\int_{\partial B(0,\varepsilon)} y_i\ \lambda_{0,\varepsilon}(dy) = 0, \quad \int_{\partial B(0,\varepsilon)} y_i y_j\ \lambda_{0,\varepsilon}(dy) = 0,\ i \neq j,$$

en intégrant la formule de Taylor (10.7) sur $\partial B(0,\varepsilon)$, et en utilisant la formule de la moyenne, on obtient

$$u(a)=\int_{\partial B(0,\varepsilon)} u(a+y)\ \lambda_{0,\varepsilon}(dy)=u(a)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\partial^2_{x_i,x_i}u(a)\int_{\partial B(0,\varepsilon)} y_i^2\ \lambda_{0,\varepsilon}(dy)+o(\varepsilon^2).$$

Mais comme

$$\begin{aligned}\int_{\partial B(0,\varepsilon)} y_i^2\ \lambda_{0,\varepsilon}(dy) &= \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d}\int_{\partial B(0,\varepsilon)} y_i^2\ \lambda_{0,\varepsilon}(dy)\\ &= \frac{1}{d}\int_{\partial B(0,\varepsilon)}\|y\|^2\ \lambda_{0,\varepsilon}(dy)=\frac{\varepsilon^2}{d},\end{aligned}$$

on a

$$\frac{\varepsilon^2}{2}\Delta u(a)+o(\varepsilon^2)=0.$$

D'où il vient $\Delta u(a)=0$ pour $a\in D$ en faisant $\varepsilon\to 0$. □

Proposition 10.6 (Principe du maximum) *Soit u une fonction harmonique sur D. Alors*

(1) Si u atteint son maximum en un point intérieur à D et si l'ouvert D est connexe alors u est constante sur D.

(2) Sur tout compact $F\subset D$, u atteint son maximum sur le bord ∂F de F.

Démonstration : Pour 1), on pose $M=\sup(u(x):x\in D)$. Si $a\in D$, d'après la formule de la moyenne (satisfaite par u harmonique), $u(a)$ est moyenne des valeurs $\{u(x):x\in\partial B(a,r)\}$ pour tout r assez petit. Ainsi si $u(a)=M$, nécessairement u est constante égale à M sur toute sphère $\partial B(a,r)$. Comme ceci est valable pour tout r assez petit, cela exige que u soit constante sur un voisinage de a.
L'ensemble $A=\{x\in D:u(x)=M\}$ est donc ouvert mais il est aussi fermé par continuité de u. De plus, comme par hypothèse $A\neq\emptyset$ et D est connexe, on a $A=D$.

Pour montrer 2), on considère $a\in F^\circ$, intérieur de F compact, et on note G la composante connexe de F° qui contient a. D'après la formule de la moyenne, on a $u(a)\leq\max(u(x):x\in\partial G)$. Comme $\partial G\subset\partial F^\circ\subset\partial F$, on a donc aussi que $u(a)\leq\max(u(x):x\in\partial F)$. □

10.2 Problème de Dirichlet

Le problème de Dirichlet consiste à résoudre l'équation de Laplace sur un ouvert D avec des conditions aux bords imposées (sur ∂D). Étant donné un ouvert $D\subset\mathbb{R}^d$ et

$f : \partial D \to \mathbb{R}$ une fonction continue, le **problème de Dirichlet** (D, f) consiste à trouver une fonction $u : \overline{D} \to \mathbb{R}$ continue sur $\overline{D}$ et C^2 sur D telle que

$$\begin{cases} \Delta u &= 0 \quad \text{sur } D \\ u_{|\partial D} &= f. \end{cases} \tag{10.8}$$

Il s'agit d'un problème bien connu qu'on peut résoudre explicitement de façon analytique en utilisant la transformation de Fourier sur des domaines pertinents. L'approche probabiliste permet d'avoir accès rapidement à une expression de la solution pour des domaines D de géométrie (relativement) arbitraire. De plus, elle ouvre la porte à des techniques de simulations de ces solutions d'EDP (méthode de Monte-Carlo). Cependant pour simplifier, nous supposons que le domaine (ouvert, connexe) D est borné.

Théorème 10.7 (Dirichlet 1) *On considère le problème de Dirichlet (10.8). Soit*

$$u(x) = \mathbb{E}_x[f(B_{\tau_D})], \quad x \in \overline{D}. \tag{10.9}$$

(1) Si $\mathbb{E}_x[|f(B_{\tau_D})|] < +\infty$, $\forall x \in D$, alors u donnée par (10.9) vérifie (10.8).

(2) Si f est bornée et

$$\mathbb{P}_a(\tau_D < +\infty) = 1, \quad \forall a \in D,$$

alors toute solution bornée du problème de Dirichlet (D, f) s'écrit (10.9).

Remarque 10.8 (Domaine borné) Lorsque le domaine D est borné, alors :

— la condition dans 1) ci-dessus est satisfaite car B_{τ_D} reste dans ∂D (borné) sur lequel f continue est finie ;

— dans 2), on a f bornée comme ci-dessus et $\tau_D < +\infty$: on se ramène facilement au cas où D est un rectangle et on utilise les temps de sortie des marginales de B qui sont des mouvements browniens unidimensionnels dont les temps de sorties d'intervalles sont bien connus ; de plus une solution u est nécessairement borné puisque continue sur $\overline{D}$ borné.

D'après le Théorème 10.7, pour résoudre le problème de Dirichlet (10.8), il reste seulement à voir la continuité sur ∂D de u donnée par (10.9), c'est à dire

$$\lim_{\substack{x \in D \\ x \to a}} \mathbb{E}_x[f(B_{\tau_D})] = f(a), \quad a \in \partial D. \tag{10.10}$$

Ceci est lié à la notion de régularité du bord, cf. ci-dessous.

Démonstration : On montre d'abord 2) puis 1).

2) On suppose d'abord qu'il existe u vérifiant le problème de Dirichlet (10.8). Soit $x \in D$ et $D_-^\varepsilon = \{y \in D : \mathrm{dist}(y, D^c) > \varepsilon\}$ le ε-intérieur de D. Pour ε assez petit, $x \in D_-^\varepsilon$. On applique alors la Proposition 10.3 et en prenant l'espérance de la martingale obtenue, on a

$$u(x) = \mathbb{E}_x\big[u(B_{t \wedge \tau_{D_-^\varepsilon}})\big].$$

Par hypothèse, on a $\tau_{D_-^\varepsilon} < +\infty$ $\mathbb{P}_x$-ps ($D_-^\varepsilon \subset D$). On utilise le théorème de convergence dominée (u bornée par hypothèse) pour faire successivement $t \to +\infty$ et $\varepsilon \to 0$ par continuité de B et de u : d'abord comme $\tau_{D_-^\varepsilon} < +\infty$ ps

$$u(x) = \lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}_x\big[u(B_{t\wedge\tau_{D_-^\varepsilon}})\big] = \mathbb{E}_x\big[u(B_{\tau_{D_-^\varepsilon}})\big].$$

Puis comme $D = \bigcup_{\varepsilon>0} D_-^\varepsilon$, on a $\tau_{D_-^\varepsilon} \nearrow \tau_D$ lorsque $\varepsilon \to 0$ donc à nouveau par convergence dominée :

$$u(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathbb{E}_x\big[u(B_{\tau_{D_-^\varepsilon}})\big] = \mathbb{E}_x[u(B_{\tau_D})] = \mathbb{E}_x[f(B_{\tau_D})]$$

où la dernière égalité vient de la condition au bord du problème de Dirichlet (10.8) avec $B_{\tau_D} \in \partial D$. Finalement, si $x \in \partial D$ alors $\tau_D = 0$ et on a $u(x) = f(x)$. Si elle existe, la solution bornée de (10.8) est donc unique et nécessairement donnée par (10.9).

1) On considère maintenant u donnée par (10.9). Comme pour 2), il est immédiat que $u(x) = f(x)$ si $x \in \partial D$. Pour montrer que u est harmonique dans D, on montre que u vérifie la formule de la moyenne, ce qui est équivalent par la Proposition 10.5.
Soit $B(a,r) \subset D$. Quand B part de $a \in B(a,r) \subset D$, comme $\tau_{B(a,r)} \le \tau_D$, on a $\mathcal{F}_{\tau_{B(a,r)}} \subset \mathcal{F}_{\tau_D}$ et par conditionnement on a

$$u(a) = \mathbb{E}_a[f(B_{\tau_D})] = \mathbb{E}_a\big[\mathbb{E}_a[f(B_{\tau_D})|\mathcal{F}_{\tau_{B(a,r)}}]\big].$$

Mais

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_a[f(B_{\tau_D})|\mathcal{F}_{\tau_{B(a,r)}}] &= \mathbb{E}_a[f(B_{\tau_D} - B_{\tau_{B(a,r)}} + B_{\tau_{B(a,r)}})|\mathcal{F}_{\tau_{B(a,r)}}] \\
&= \mathbb{E}_a[f(B^{(\tau_{B(a,r)})}_{\tau_D-\tau_{B(a,r)}} + B_{\tau_{B(a,r)}})|\mathcal{F}_{\tau_{B(a,r)}}] \\
&= \mathbb{E}_a[f(B^{(\tau_{B(a,r)})}_{\tau'_D} + B_{\tau_{B(a,r)}})|\mathcal{F}_{\tau_{B(a,r)}}] \\
&= u(B_{\tau_{B(a,r)}})
\end{aligned}$$

car par la propriété de Markov forte, $B_t^{(\tau_{B(a,r)})} := B_{t+\tau_{B(a,r)}} - B_{\tau_{B(a,r)}}$, $t \ge 0$, est un mouvement brownien issu de 0, indépendant de $\mathcal{F}_{\tau_{B(a,r)}}$ et donc sachant $\mathcal{F}_{\tau_{B(a,r)}}$, $B^{(\tau_{B(a,r)})}_{t+\tau_{B(a,r)}} + B_{\tau_{B(a,r)}}$ est un mouvement brownien partant de $B_{\tau_{B(a,r)}} \in \partial B(a,r)$ pour lequel $\tau'_D := \tau_D - \tau_{B(a,r)}$ reste le temps de sortie de D (il s'agit de τ_D, reinitialisé à la date $\tau_{B(a,r)}$).
Finalement avec (10.5) qui utilise la loi de la sortie brownienne $B_{\tau_{B(a,r)}}$ de la sphère, on a

$$u(a) = \mathbb{E}_a[u(B_{\tau_{B(a,r)}})] = \int_{\partial B(a,r)} u(y)\ \lambda_{a,r}(dy)$$

ce qui établit la formule de la moyenne donc l'harmonicité par la Proposition 10.5, c'est à dire l'équation de Laplace sur D. $\square$

Régularité du bord

Pour avoir une solution au problème de Dirichlet (10.8) à partir de (10.9), il reste à voir la continuité (10.10) sur ∂D. Pour cela, on utilise la notion de régularité du bord telle que décrite dans [KS, p. 245].

Définition 10.9 (Régularité) *On rappelle que $\sigma_D = \inf(t > 0 : B_t \notin D)$ est le temps de sortie de D d'un mouvement brownien B.*

(1) Un point $x \in \partial D$ est régulier pour D si $\mathbb{P}_x(\sigma_D = 0) = 1$.

(2) Le domaine D est régulier si tous ses points frontières le sont :

$$\mathbb{P}_x(\sigma_D = 0) = 1 \quad \forall x \in \partial D. \tag{10.11}$$

En d'autres termes, la régularité demande que le mouvement brownien partant de ∂D sorte immédiatement de D.

Remarque 10.10 — Un point x est dit irrégulier si $\mathbb{P}_x(\sigma_D = 0) < 1$. Comme $\{\sigma_D = 0\} \in \mathcal{F}^B_{0^+}$, la loi du zéro/un de Blumenthal assure que, pour ces points, $\mathbb{P}_x(\sigma_D = 0) = 0$.
— La condition de régularité est locale : $x \in \partial D$ est régulier pour D si et seulement si x l'est pour $B(x, r) \cap D$ pour $r > 0$.

Exemple 10.11 (Régularité) — Un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ de bord une courbe simple C^1 est régulier. De même, un domaine $D \subset \mathbb{R}^d$ de bord une variété différentiable de classe C^1 est régulier.
— En dimension 1, tout point de ∂D est régulier. En effet, par exemple pour 0, le mouvement brownien réel issu de 0 visite $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ en des temps arbitrairement proches de 0, ce qui garantit $\sigma_D = 0$. Ainsi, on verra avec le Théorème 10.13 que le problème de Dirichlet en dimension 1 est résoluble avec une solution linéaire par morceaux donnée par (10.9).
— En dimension $d \geq 2$, un ouvert privé d'un point intérieur (par exemple $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$) n'est pas régulier.
— Pour $d \geq 2$, $D = \{x \in \mathbb{R}^d : 0 < \|x\| < 1\}$. Pour $x \in D$, le mouvement brownien partant de x quitte D par $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| = 1\}$, pas par l'origine. Ainsi u donnée par (10.9) est déterminée seulement par les valeurs de f sur la frontière extérieure S_1 et va coïncider (à part à l'origine) avec la fonction harmonique

$$\widetilde{u}(x) = \mathbb{E}_x[f(B_{\tau_{B(0,1)}})] = \mathbb{E}_x[f(B_{\sigma_D})], \quad x \in B(0, 1).$$

En posant $u(0) = f(0)$, u est continue en 0 si et seulement si $f(0) = \widetilde{u}(0)$.
— Quand $d \geq 3$, il est possible d'avoir ∂D connecté et avec des points irréguliers.

Proposition 10.12 (Régularité du bord) *Soit $d \geq 2$ et $a \in \partial D$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) La condition (10.10) *est remplie pour toute fonction mesurable bornée $f : \partial D \to \mathbb{R}$, continue en a.*

(2) Le point a est régulier pour D.

(3) Pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\lim_{\substack{x\in D\\ x\to a}} \mathbb{P}_x(\tau_D > \varepsilon) = 0.$$

Des Théorème 10.7 et Proposition 10.12, on déduit d'abord immédiatement :

Théorème 10.13 (Dirichlet 2) *Si le domaine D est régulier, alors la fonction u donnée par* (10.9) *est l'unique solution du problème de Dirichlet, ie. u est C^2 sur D et continue sur $\overline{D}$ et* (10.8) *est satisfait.*

Conséquences sur le mouvement brownien

On considère l'anneau D de centre 0 et de rayons intérieur r et extérieur R, $0 < r < R < +\infty$, ie.

$$D = \Big\{x \in \mathbb{R}^d : r^2 < \|x\|^2 = \sum_{i=1}^d x_i^2 < R^2\Big\}$$

et f la fonction donnée sur ∂D par

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si } \|x\| = r, \\ 0 & \text{si } \|x\| = R. \end{array}\right.$$

Comme le domaine D est borné et régulier (bord lisse, de classe C^1), le Théorème 10.13 assure que la solution du problème de Dirichlet (D, f) est donnée par (10.9), soit

$$\begin{aligned} u(x) &= \mathbb{E}_x\big[\mathbf{1}_{\{\|B_{\tau_D}\|=r\}}\big] \\ &= \mathbb{P}_x\big(B \text{ sort de } D \text{ par le cercle intérieur}\big), \quad x \in \overline{D}. \end{aligned} \tag{10.12}$$

Lorsque $d = 2$, on sait par l'Exemple 10.2 que

$$x \in \overline{D} \mapsto \frac{\ln R - \ln\|x\|}{\ln R - \ln r},$$

est harmonique et comme cette fonction satisfait les conditions aux bords considérées, elle vérifie le problème de Dirichlet (10.8). Par unicité, elle coïncide avec u en (10.12), ce qui établit en dimension $d = 2$:

$$\mathbb{P}_x\big(B \text{ sort de } D \text{ par le cercle intérieur}\big) = \frac{\ln R - \ln\|x\|}{\ln R - \ln r}, \quad x \in \overline{D}. \tag{10.13}$$

Lorsque $d \geq 3$, on sait par l'Exemple 10.2 que

$$x \in \overline{D} \mapsto \frac{\|x\|^{-d+2} - R^{-d+2}}{r^{-d+2} - R^{-d+2}}$$

est harmonique et comme cette fonction satisfait les conditions aux bords considérées, elle vérifie le problème de Dirichlet (10.8). Par unicité, elle coïncide avec u en (10.12), ce qui établit en dimension $d \geq 3$:

$$\mathbb{P}_x\big(B \text{ sort de } D \text{ par le cercle intérieur}\big) = \frac{\|x\|^{-d+2} - R^{-d+2}}{r^{-d+2} - R^{-d+2}}, \quad x \in \overline{D}. \tag{10.14}$$

Quand $R \to +\infty$, comme le temps d'atteinte de la sphère extérieure $S(0,R) = \partial B(0,R)$ tend presque sûrement vers $+\infty$ avec R, on a par convergence monotone :

$$\begin{aligned} &\lim_{R\to+\infty} \mathbb{P}_x\big(B \text{ sort de } D \text{ par le cercle intérieur}\big) \\ &\quad = \mathbb{P}_x\big(B \text{ atteint la boule } B(0,r) \text{ en temps fini}\big). \end{aligned}$$

Dans (10.13), on constate que

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{\ln R - \ln \|x\|}{\ln R - \ln r} = 1,$$

alors que dans (10.14), on constate que

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{\|x\|^{-d+2} - R^{-d+2}}{r^{-d+2} - R^{-d+2}} = (r/\|x\|)^{d-2}.$$

On a donc

$$\mathbb{P}_x\big(B \text{ atteint la boule } B(0,r) \text{ en temps fini}\big) = \begin{cases} 1 & \text{si } d = 2 \\ (r/\|x\|)^{d-2} & \text{si } d \geq 3. \end{cases}$$

Cela met en évidence deux types de comportements différents du mouvement brownien (standard) en dimension d selon que $d = 2$ ou $d \geq 3$.

En fait, en tant que processus de Markov, en dimension $d = 2$, le mouvement brownien est récurrent : avec probabilité 1, il finit par atteindre la boule $B(0,r)$ pour tout rayon $r > 0$ et pour tout point de départ (par invariance par translation) et aussi pour tout rayon positif (par scaling brownien). Au contraire en dimension $d \geq 3$, le mouvement brownien a une probabilité strictement positive de ne jamais atteindre la boule $B(0,r)$: il est transitoire. Il y a en quelque sorte trop de place en dimension $d \geq 3$ pour que la « marche au hasard brownienne » soit sûre de repasser près de l'origine.

10.3 Équation de la chaleur

Les lois de la thermodynamique expliquent que la solution u du problème de Dirichlet (D, f) en (10.8) est le champ de température à l'équilibre à l'intérieur D d'un récipient dont les parois ∂D sont maintenues à température f (cette interprétation suppose que $f \geq 0$) . On s'intéresse maintenant aux équations de Laplace avec évolution dans le temps : par exemple, pour poursuivre la même interprétation thermodynamique, on considère une plaque infiniment mince isolée homogène et infinie. La température $u(t; y, z)$ au point (y, z) à l'instant t se détermine en fonction de la température initiale f comme la solution de l'EDP

$$\partial_t u = \frac{\sigma^2}{2}\left(\partial^2_{y,y}u + \partial^2_{z,z}u\right)$$

partant de $u(0, \cdot) = f(\cdot)$. Le coefficient $\sigma > 0$ ne dépend pas de (y, z) et caractérise la conductance thermique de la plaque.

En dimension d quelconque, on appelle **équation de la chaleur**, le problème de Cauchy : $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \mapsto u(t, x) \in \mathbb{R}$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t u &=& \frac{1}{2}\Delta u \\ u(0,\cdot) &=& f. \end{array}\right. \tag{10.15}$$

Nous allons relier cette EDP à des objets probabilistes. On considère d'abord la loi de B_t sachant $\mathcal{F}_s$ pour $t \geq s$: par indépendance et stationnarité des accroissements brownien, en écrivant $B_t = B_t - B_s + B_s$, on constate qu'il s'agit de la loi gaussienne (conditionnelle) $\mathcal{N}_d(B_s, (t-s)I_d)$ de densité au point y, en notant $B_s = x$, donnée par

$$p(t-s; x, y) = g_{t-s}(y-x).$$

où on note

$$g_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}^d}\exp\Big(-\frac{\|x\|^2}{2t}\Big) \quad \text{densité de } \mathcal{N}(0,t).$$

Ainsi, $p(t; x, \cdot)$ est la densité de $\mathcal{N}(x, t)$. On voit sans difficulté que $p = p(t; x, y)$ vérifie

$$p^{-1}\partial_t p = -\frac{d}{2t} + \frac{\|y-x\|^2}{2t^2} \tag{10.16}$$

et que

$$p^{-1}\partial^2_{x_i,x_i}p = -\frac{1}{t} + \frac{(y_i - x_i)^2}{t^2}$$

pour $1 \leq i \leq d$, soit en sommant

$$\begin{aligned} p^{-1}\Delta_x p &= \sum_{i=1}^d p^{-1}\partial^2_{x_i,x_i}p = \sum_{i=1}^d \Big(-\frac{1}{t} + \frac{(y_i-x_i)^2}{t^2}\Big) \\ &= -\frac{d}{t} + \frac{\|y-x\|^2}{t^2}. \end{aligned} \tag{10.17}$$

En comparant (10.16) et (10.17), on montre que la fonction p est solution de l'*équation progressive* (dite forward) (ie. en la variable y de la position future)

$$\partial_t p = \frac{1}{2}\Delta_y p, \quad \lim_{t\searrow 0} p(y)\,dy = \delta_x \tag{10.18}$$

où δ_x est la mesure de Dirac en 0 et aussi par symétrie solution de l'*équation rétrograde* (dite backward) (ie. en la variable x de la position passée)

$$\partial_t p = \frac{1}{2}\Delta_x p, \quad \lim_{t \searrow 0} p(x)\,dx = \delta_y. \tag{10.19}$$

Ces relations justifient que p est la solution fondamentale de l'équation de la chaleur. (De ce fait, on appelle p le *noyau de la chaleur*.)

Proposition 10.14 *On suppose que la condition initiale f vérifie $\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|e^{-c|x|^2}\,dx < +\infty$ pour une constante $c > 0$. Alors la fonction*

$$u(t,x) = \mathbb{E}_x[f(B_t)]$$

est solution de l'équation de la chaleur (10.15) sur $[0, 1/(2c)[\times\mathbb{R}^d$.

Démonstration : D'abord, $u(0,x) = \mathbb{E}_x[f(B_0)] = f(x)$ puisque $B_0 = x$ sous $\mathbb{P}_x$. Ensuite, par définition, on a $u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)p(t;x,y)\,dy$. La propriété d'intégrabilité de f permet de dériver sous le signe intégrale pour $t \in [0, 1/(2c)[$ et d'avoir

$$\begin{aligned}
\partial_t u(t,x) &= \int f(y)\partial_t p(t;x,y)\,dy, \\
\partial^2_{x_i,x_i} u(t,x) &= \int f(y)\partial^2_{x_i,x_i} p(t;x,y)\,dy, \quad \Delta u(t,x) = \int f(y)\Delta_x p(t;x,y)\,dy.
\end{aligned}$$

En utilisant (10.19), on a donc :

$$\partial_t u(t,x) = \int f(y)\partial_t p(t;x,y)\,dy = \int f(y)\frac{1}{2}\Delta_x p(t;x,y)\,dy = \frac{1}{2}\Delta u(t,x),$$

c'est à dire : u est solution de (10.15) sur cet intervalle de temps avec la bonne condition initiale. □

10.4 Formule de Feynman-Kac

On considère l'EDP parabolique linéaire

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t u &=& \frac{1}{2}\Delta u - ku, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d, \\ u(0,\cdot) &=& f. \end{array} \right. \tag{10.20}$$

Le terme supplémentaire $k(x)$ réprésente le taux de dissipation de la chaleur en x dans le cas où $k \geq 0$. Dans le cas où k n'est pas positive, on interprétera plutôt cette équation (avec $f \geq 0$) comme décrivant la densité $u(t,x)$ au temps t et au point x de particules diffusant dans l'espace qui se multiplient dans les sites tels que $k(x) \leq 0$ (à un taux $-k$) et qui sont tuées dans les sites tels que $k(x) \geq 0$ (à un taux k). Puisque cette équation se réduit si $k = 0$ à l'équation de la chaleur, le résultat suivant n'est pas surprenant compte tenu de la Proposition 10.14 :

Théorème 10.15 (Feynman-Kac) *On suppose que $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ et $k:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ sont boréliennes avec f à croissance sous-exponentielle et k bornée. Alors toute solution $u(t,x)$ de l'EDP parabolique linéaire (10.20) de classe $C^{1,2}$ dont le gradient est à croissance sous-exponentielle (uniformément en temps), est donnée par la formule*

$$u(t,x)=\mathbb{E}_x\left[f(B_t)\exp\left(-\int_0^t k(B_s)ds\right)\right]. \tag{10.21}$$

En particulier, une telle solution est unique.

On interprètera mieux cette formule au Chapitre 11 avec la notion de générateur associé à la diffusion B.

Démonstration : D'abord, $u(0,x)=\mathbb{E}_x[f(B_0)]=f(x)$ puisque $B_0=x$ sous $\mathbb{P}_x$. Ensuite, on fixe $t\geq 0$ et on applique la formule d'Itô au temps $s\in]0,t[$ à la fonction $s\mapsto u(t-s,B_s)\exp\big(-\int_0^s k(B_r)dr\big)$. Comme $s\mapsto \exp\big(-\int_0^s k(B_r)dr\big)$ est à variation finie, le terme de crochet est nul et il vient

$$\begin{aligned}
&d\left[u(t-s,B_s)\exp\Big(-\int_0^s k(B_r)dr\Big)\right]\\
&\quad= d\big(u(t-s,B_s)\big)\exp\Big(-\int_0^s k(B_r)dr\Big)+u(t-s,B_s)d\Big(\exp\Big(-\int_0^s k(B_r)dr\Big)\Big)+0.
\end{aligned}$$

Puis de nouveau avec la formule d'Itô par rapport à la variable s :

$$d\big(u(t-s,B_s)\big)=-\partial_t u(t-s,B_s)\,ds+\nabla u(t-s,B_s)\,dB_s+\frac12\Delta u(t-s,B_s)\,ds,$$

et pour l'exponentielle

$$d\Big(\exp\Big(-\int_0^s k(B_r)dr\Big)\Big)=-k(B_s)\exp\Big(-\int_0^s k(B_r)dr\Big)ds.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
&d\left[u(t-s,B_s)\exp\Big(-\int_0^s k(B_r)dr\Big)\right]\\
&\quad=\Big[-k(B_s)u(t-s,B_s)ds-\partial_t u(t-s,B_s)ds+\nabla u(t-s,B_s)dB_s+\frac12\Delta u(t-s,B_s)ds\Big]\\
&\qquad\times\exp\Big(-\int_0^s k(B_r)dr\Big)\\
&\quad=\nabla u(t-s,B_s)\,dB_s\ \exp\Big(-\int_0^s k(B_r)dr\Big)
\end{aligned}$$

en utilisant l'EDP (10.20) satisfaite par u. En intégrant entre $s=0$ et $s=t$, il vient :

$$\exp\left(-\int_0^t k(B_r)dr\right)u(0,B_t)-u(t,B_0)\ =\ \exp\left(-\int_0^t k(B_r)dr\right)f(B_t)-u(t,B_0)$$

$$= \int_0^t \exp\left(-\int_0^s k(B_r)dr\right) \nabla u(t-s, B_s)dB_s.$$

On passe à l'espérance sous $\mathbb{P}_x$, en notant que l'intégrale stochastique est une martingale L^2 d'après les hypothèses de croissance sous-exponentielle de u et de la bornitude pour k ; elle est donc d'espérance nulle. On obtient alors

$$\mathbb{E}_x\left[\exp\left(-\int_0^t k(B_r)dr\right) f(B_t) - u(t, B_0)\right] = 0$$

soit, puisque $B_0 = x$ sous $\mathbb{P}_x$,

$$u(t,x) = \mathbb{E}_x\left[\exp\left(-\int_0^t k(B_r)dr\right) f(B_t)\right]$$

ce qui établit la formule de Feynman-Kac (10.21). □

Cas de l'EDP (10.20) sur un domaine

Soit D un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^d$, k mesurable bornée sur D. On considère maintenant l'EDP

$$\begin{cases} \partial_t u &= \frac{1}{2}\Delta u - ku, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times D \\ u(0,\cdot) &= f \quad \text{sur } \overline{D} \\ u(\cdot, x) &= 0 \quad \text{pour } x \in \partial D. \end{cases}$$

Soit u, une solution de l'EDP, continue sur $\mathbb{R}_+ \times \overline{D}$, de classe $C^{1,2}$ bornée et à dérivées bornées. On peut vérifier qu'alors

$$u(t,x) = \mathbb{E}_x\left[f(B_t)\mathbf{1}_{\{t \le \tau_D\}} \exp\left(-\int_0^t k(B_s)ds\right)\right] \tag{10.22}$$

où τ_D est le temps de sortie de D. Pour cela, comme précédemment, on applique la formule d'Itô à la fonction

$$s \mapsto u(t-s, B_{s\wedge\tau_D}) \exp\Big(-\int_0^s k(B_{r\wedge\tau_D})dr\Big).$$

Noter que pour $x \in \partial D$, $\tau_D = 0$ sous $\mathbb{P}_x$ et on récupère la condition au bord $u(\cdot, x) = 0$ pour $x \in \partial D$.

Chapitre 11

Diffusions

Dans ce chapitre, on introduit en Section 11.1 les solutions d'EDS appelées diffusions. On introduit les principaux outils pour les étudier, générateur, semi-groupe, en Section 11.2. En Section 11.3, on relie l'étude des diffusions à des EDP via le générateur de la diffusion. Dans ce chapitre, le mouvement brownien est un exemple fil rouge et simple de diffusion, et on généralise aux diffusions les résultats vus pour le mouvement brownien au Chapitre 10.

11.1 Générateur d'une diffusion

Définition 11.1 (Processus de diffusion) *On appelle processus de diffusion un processus vérifiant la propriété de Markov forte et à trajectoires continues du type considéré dans le Théorème 9.19.*

En général, les diffusions qu'on considèrera seront des solutions d'EDS homogènes. Étant donné un mouvement brownien standard B en dimension m et $a : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ et $\sigma : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ des fonctions lipschitziennes, on considère l'EDS homogène

$$dX_t = a(X_t)\,dt + \sigma(X_t)\,dB_t. \qquad (E_0(a,\sigma))$$

D'après le Théorème 9.8, il y a existence et unicité forte pour toute condition initiale $X_0 = x$. Il y aussi unicité faible par le Théorème 9.13 et d'après le Théorème 9.19, cette solution vérifie la propriété de Markov. Les solutions d'EDS homogène du type ($E_0(a,\sigma)$) sont donc des diffusions comme en Définition 11.1.

Exemple 11.2 (Diffusion) Les exemples suivants sont des cas particulier d'EDS homogène ($E_0(a,\sigma)$) avec des coefficients lipschitziens. Il s'agit donc de diffusion :

- Le mouvement brownien est solution de ($E_0(a,\sigma)$) avec $a = 0$, $\sigma = Id$.
- Le mouvement brownien géométrique est solution de $dX_t = X_t\,dB_t$ donc de type ($E_0(a,\sigma)$) en dimension 1 avec $a = 0$ et $\sigma(x) = x$.
- Dans le modèle de Black et Scholes, l'EDS considérée est $dX_t = rX_t\,dt + X_t\,dB_t$, donc du type ($E_0(a,\sigma)$) avec $a(x) = rx$ et $\sigma(x) = x$.

— Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck est solution de l'équation de Langevin

$$dX_t = -aX_t\, dt + \sigma\, dB_t$$

du type ($E_0(a,\sigma)$) avec $a(x) = -ax$ et $\sigma(x) = \sigma$.

Pour étudier une diffusion, on introduit son générateur (infinitésimal) :

Définition 11.3 (Générateur infinitésimal) *Soit X diffusion solution forte de l'EDS $E_0(a,\sigma)$. On appelle générateur (infinitésimal) de X, l'opérateur elliptique du deuxième ordre qui associe à $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$,*

$$Lf(x) = \sum_{i=1}^d a_i(x)\partial_{x_i} f(x) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d (\sigma\sigma^*)_{i,j}(x)\partial^2_{x_i,x_j} f(x), \tag{11.1}$$

où σ^* désigne la matrice transposée de σ.

Par exemple, pour $X = B$ mouvement brownien, on prend $a = 0$ et $\sigma = Id$, le générateur est alors $L = \frac{1}{2}\partial^2_{x,x}$ en dimension 1 ou $L = \frac{1}{2}\Delta$ en dimension d.

Remarque 11.4 Avec des notations symboliques, on a

$$L = a \cdot \nabla_x + \frac{1}{2}\|\sigma^*\nabla_x\|^2.$$

D'abord on note que $\|\sigma^*\nabla_x\|^2 = (\sigma^*\nabla_x)\cdot(\sigma^*\nabla_x) = \nabla_x^*\sigma\sigma^*\nabla_x$ et $(\sigma^*\nabla_x)_k = \sum_{i=1}^d \sigma^*_{k,i}\partial_{x_i} = \sum_{i=1}^d \sigma_{i,k}\partial_{x_i}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\|\sigma^*\nabla_x\|^2 &= \sum_{k=1}^d (\sigma^*\nabla_x)_k^2 = \sum_{k=1}^d \Big(\sum_{i=1}^d \sigma_{i,k}\partial_{x_i}\Big)^2 = \sum_{k=1}^d \sum_{i,j=1}^d \sigma_{i,k}\partial_{x_i}\sigma_{j,k}\partial_{x_j} \\
&= \sum_{i,j=1}^d \Big(\sum_{k=1}^d \sigma_{i,k}\sigma_{j,k}\Big)\partial_{x_i}\partial_{x_j} = \sum_{i,j=1}^d (\sigma\sigma^*)_{i,j}\partial^2_{x_i,x_j}.
\end{aligned}$$

Étant donné l'EDS $E_0(a,\sigma)$, on peut lui associer le générateur L donné par (11.1). Réciproquement si on dispose d'un opérateur L de la forme

$$Lf(x) = \sum_{i=1}^d a_i(x)\partial_{x_i} f(x) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d c_{i,j}(x)\partial^2_{x_i,x_j} f(x)$$

avec $c = (c_{i,j}(x))_{1\le i,j\le d}$ une matrice symétrique, on commence par trouver une matrice (racine carrée) $\sigma \in M_{d,m}(\mathbb{R})$ telle que $c = \sigma\sigma^*$ et L prend alors la forme (11.1). On peut alors considérer l'EDS associée $E_0(a,\sigma)$ et il existera une diffusion associée à L si on peut prouver l'existence de solution faible pour $E_0(a,\sigma)$, satisfaisant la propriété de Markov. Pour cela, on peut utiliser les résultats généraux du Chapitre 9 sous les hypothèses lipschitziennes pour a et σ (Théorème 9.8, Théorème 9.19). Plus généralement pour la recherche de solution faible, on dispose aussi de la formule d'Itô, du théorème de Girsanov (Proposition 9.10) ou de la formulation de problème de martingale (cf. Chapitre 12).

Une fois une solution faible obtenue pour $E_0(a,\sigma)$, cette solution admet nécessairement L pour générateur par la Définition 11.3.

En général, la donnée du générateur X en (11.1) est donc équivalente à l'EDS $E_0(a,\sigma)$.

Il est important de pouvoir associer aux processus de diffusion des martingales (locales) à trajectoires continues. C'est l'objet du théorème suivant à l'aide du générateur L de X. Dans la suite, on suppose que les hypothèses lipschitziennes du Chapitre 9 sont satisfaites pour les fonctions a et σ, cf. page 56.

Théorème 11.5 *Soit X une solution forte de $E_0(a,\sigma)$ de générateur L et f dans le domaine de l'opérateur L. Alors*

$$f(X_t) - \int_0^t Lf(X_s)\,ds, \quad t \geq 0, \tag{11.2}$$

est une martingale locale.

Démonstration : On commence par noter que comme $d\langle B^{(k)}, B^{(l)}\rangle_t = \delta_{k,l}\,dt$, on a :

$$\begin{aligned} d\langle X^{(i)}, X^{(j)}\rangle_t &= \sum_{k,l=1}^m \sigma_{i,k}(X_t)\sigma_{j,l}(X_t) d\langle B^{(k)}, B^{(l)}\rangle_t \\ &= \sum_{k=1}^m \sigma_{i,k}(X_t)\sigma_{j,k}(X_t)\,dt \\ &= (\sigma\sigma^*)_{i,j}(X_t)\,dt. \end{aligned}$$

On applique la formule d'Itô à $f(X_t)$:

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \partial_{x_i} f(X_s)\,dX_s^{(i)} + \frac{1}{2}\sum_{1\leq i,j\leq d} \int_0^t \partial^2_{x_i,x_j} f(X_s)\,d\langle X^{(i)}, X^{(j)}\rangle_s \\ &= f(X_0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t a_i(X_s)\partial_{x_i} f(X_s)\,ds + \sum_{i=1}^d \int_0^t \partial_{x_i} f(X_s) \left(\sum_{k=1}^m \sigma_{i,k}(X_s)\,dB_s^{(k)}\right) \\ &\qquad + \frac{1}{2}\sum_{1\leq i,j\leq d} \int_0^t (\sigma\sigma^*)_{i,j}(X_s)\partial^2_{x_i,x_j} f(X_s)\,ds \\ &= f(X_0) + \int_0^t Lf(X_s)\,ds + \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^m \int_0^t \sigma_{i,k}(X_s)\partial_{x_i} f(X_s)\,dB_s^{(k)}. \end{aligned} \tag{11.3}$$

Finalement,

$$f(X_t) - \int_0^t Lf(X_s)\, ds = f(X_0) + \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^m \int_0^t \sigma_{i,k}(X_s)\partial_{x_i} f(X_s)\, dB_s^{(k)} \tag{11.4}$$

est bien une martingale locale car en arrêtant l'intégrale au temps d'arrêt

$$S_n = \inf\left(t \geq 0 : \|X_t\| \geq n,\ \exists(i,j), \int_0^t \sigma_{i,j}(X_s)^2\, ds \geq n\right),$$

qui tend vers $+\infty$ par hypothèse sur σ (cf. la réduction d'une martingale locale), on a bien une vraie martingale. □

Si f est assez régulière, (11.2) est même une vraie martingale et en prenant l'espérance avec $X_0 = x$, on obtient :

$$\mathbb{E}[f(X_t)] = f(x) + \int_0^t \mathbb{E}[Lf(X_s)]\, ds. \tag{11.5}$$

L'opérateur L pour X permet d'interpréter de nombreux résultats probabilistes en analyse et réciproquement. Ce pont, jeté entre probabilités et analyse, se révèle particulièrement fécond et constitue à lui seul une motivation importante pour l'étude des EDS. Le Théorème 11.9 qui suit en est une illustration.

11.2 Semi-groupe d'une diffusion

Définition 11.6 (Noyau de transition) *On associe à l'EDS $E_0(a,\sigma)$ un noyau de transition donné par*

$$P_t f(x) = \mathbb{E}_x[f(X_t)], \quad t \geq 0. \tag{11.6}$$

Ce noyau donne la distribution de la variable aléatoire X_t sous $\mathbb{P}_x$. En particulier, P_0 est l'opérateur identité : $P_0 f(x) = f(x)$.

Exemple 11.7 (Mouvement brownien) Dans le cas du mouvement brownien B, on voit dans le Chapitre 10 que le noyau est le semi-groupe de la chaleur :

$$P_t f(x) = \mathbb{E}_x[f(B_t)] = \mathbb{E}_0[f(x + B_t)] = \int f(y) p(t,x,y)\, dy.$$

On a bien un semi-groupe car

$$\begin{aligned} P_{t+s} f(x) &= \mathbb{E}_x[f(B_{t+s})] = \mathbb{E}_x\big[\mathbb{E}_x[f(B_{t+s})\,|\mathcal{F}_t]\big] \\ &= \mathbb{E}_x\big[\mathbb{E}_x[f(B_{t+s} - B_t + B_t)\,|\mathcal{F}_t]\big] = \mathbb{E}_x\big[\mathbb{E}_x[f(B_s^{(t)} + B_t)\,|\mathcal{F}_t]\big] \\ &= \mathbb{E}_x\big[P_s f(B_t)\big] = P_t(P_s f)(x), \end{aligned}$$

où $B^{(t)} = (B_{t+s} - B_t)_{s\geq 0}$ est un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_s$ (Markov faible).

Dans le cas général, il s'agit encore d'un semi-groupe :

Théorème 11.8 (Propriété de semi-groupe) *Le noyau de transition $(P_t)_{t\geq 0}$ en (11.6) vérifie la propriété de semi-groupe :*

$$P_{t+s} = P_t \circ P_s. \tag{11.7}$$

Démonstration : La propriété de Markov forte pour la diffusion donne

$$\mathbb{E}_x\big[f(X_{t+s})|\mathcal{F}_s\big] = \mathbb{E}_{X_s}\big[f(X_t)\big].$$

On a alors

$$\begin{aligned} P_{t+s}f(x) &= \mathbb{E}_x\big[f(X_{t+s})\big] = \mathbb{E}_x\big[\mathbb{E}_x[f(X_{t+s})|\mathcal{F}_s]\big] \\ &= \mathbb{E}_x\big[\mathbb{E}_{X_s}[f(X_t)]\big] = \mathbb{E}_x\big[P_tf(X_s)\big] \\ &= P_s\big(P_tf\big)(x) = (P_s \circ P_t)f(x). \end{aligned}$$

□

On a observé en Section 10.3 que le semi-groupe du mouvement brownien vérifie l'équation de la chaleur (10.15). Cette observation se généralise pour une diffusion avec le Théorème 11.9 avec une EDP exprimée par le générateur de la diffusion.

Théorème 11.9 (Dérivation et générateur) *Le semi-groupe $(P_t)_{t\geq 0}$ est dérivable par rapport à t et sa dérivée est le générateur de la diffusion, ie. pour f de classe C^2 assez régulière :*

$$\partial_t P_t f(x) = P_t(Lf)(x) = L(P_tf)(x). \tag{11.8}$$

En particulier, $\partial_t P_t f(x)_{|t=0} = Lf(x)$.

Remarque 11.10 Ce résultat explique la terminologie générateur infinitésimal pour L, puisqu'on peut écrire symboliquement (11.8) sous la forme

$$\partial_t P_t = P_t L \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial_t P_t}{P_t} = L \quad \Longleftrightarrow \quad P_t = \exp(tL)$$

puisque $P_0 = Id$. Réciproquement étant donné un générateur L, on lui associe un semi-groupe $P_t = \exp(tL)$, $t \geq 0$, par le théorème de Hille-Yosida.

Démonstration : On suppose que la fonction f est régulière ($f \in C_c^2(\mathbb{R}^d)$) de façon que la martingale locale du Théorème 11.5 soit une vraie martingale. Elle est d'espérance nulle et donc l'espérance dans la formule d'Itô (11.4) donne pour $h \geq 0$

$$\mathbb{E}_x\Big[f(X_{t+h}) - \int_0^{t+h} Lf(X_s)\,ds\Big] \;=\; f(x)$$

$$\mathbb{E}_x\Big[f(X_t)-\int_0^t Lf(X_s)\,ds\Big] \;=\; f(x)$$

et donc

$$\mathbb{E}_x[f(X_{t+h})]-\mathbb{E}_x\big[f(X_t)]=\mathbb{E}_x\Big[\int_t^{t+h} Lf(X_s)\,ds\Big].$$

Comme $Lf(X_s)$ est continue et bornée lorsque f est assez régulière, d'après le théorème de convergence dominée, la fonction de $t\mapsto P_tf(x)=\mathbb{E}_x[f(X_t)]$ est dérivable à droite et de dérivée

$$\begin{aligned}\partial_tP_tf(x) &= \lim_{h\searrow 0}\frac{P_{t+h}f(x)-P_tf(x)}{h}=\lim_{h\searrow 0}\frac{\mathbb{E}_x[f(X_{t+h})]-\mathbb{E}_x[f(X_t)]}{h}\\ &= \lim_{h\searrow 0}\mathbb{E}\left[\frac{1}{h}\int_t^{t+h} Lf(X_s)\,ds\right]=\mathbb{E}_x[Lf(X_t)]=P_t(Lf)(x)\end{aligned}$$

ce qui donne la première partie de (11.8). La dérivabilité précédente a été montrée à droite seulement. Pour conclure complètement sur la dérivabilité, on observe que $P_t(Lf)(x)=\mathbb{E}_x[Lf(X_t)]$ est une fonction continue de t par convergence dominée (et régularité de f). Ainsi la fonction

$$t\mapsto\int_0^t P_s(Lf)(x)\,ds$$

est dérivable de dérivée $P_t(Lf)(x)$. Comme la différence de deux fonctions qui ont la même dérivée à droite est nécessairement constante, il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que

$$P_tf(x)=\int_0^t P_s(Lf)(x)+c.$$

En faisant $t=0$, on trouve $c=f(x)$ et cela achève de prouver complètement la dérivabilité dans (11.8). Comme $P_0=Id$, on déduit immédiatement,

$$\partial_tP_tf(x)_{|t=0}=P_0(Lf)(x)=Lf(x).$$

Pour la deuxième partie de (11.8), on utilise la propriété de semi-groupe (11.7) pour avoir

$$\frac{P_{t+h}f(x)-P_tf(x)}{h}=\frac{P_hP_tf-P_tf}{h}(x)=\frac{P_hg-g}{h}(x)$$

en notant $g=P_tf$. En passant à la limite $h\searrow 0$, on a

$$\partial_tP_tf(x) \;=\; \lim_{h\searrow 0}\frac{P_{t+h}f(x)-P_tf(x)}{h}=\partial_uP_ug(x)_{|u=0}=Lg(x)=L(P_tf)(x)$$

ce qui établit la deuxième partie de (11.8). □

Lorsque le semi-groupe $(P_t)_{t\geq 0}$ admet une densité $p_t(x,y)$, c'est à dire

$$P_t f(x) = \int p_t(x,y) f(y)\, dy,$$

alors cette densité vérifie l'équation de convolution

$$\int p_t(x,y) p_s(y,z)\, dy = p_{s+t}(x,z). \tag{11.9}$$

En effet, l'équation de convolution est l'analogue sur les densités de la propriété de semi-groupe (11.7) :

$$\begin{aligned}
P_{t+s} f(x) &= \mathbb{E}_x[f(X_{t+s})] = \int f(z) p_{t+s}(x,z)\, dz && (11.10)\\
(P_t \circ P_s) f(x) &= \int (P_s f)(y) p_t(x,y)\, dy \\
&= \int \Big(\int f(z) p_s(y,z)\, dz \Big)\, p_t(x,y)\, dy \\
&= \int f(z) \Big(\int p_t(x,y) p_s(y,z) dy \Big)\, dz. && (11.11)
\end{aligned}$$

La comparaison de (11.10) et de (11.11) pour toute fonction f assure (11.9). La densité $p_t(x,y)$ est la loi de X_t lorsque la diffusion part de x, aussi on appelle x la variable du passé en y celle du futur. Les équations en x sont dites rétrogrades et celle en y sont dite progressives.

Dans le cas du mouvement brownien, le noyau de la chaleur admet une densité $p_t(x,y) = \exp(-(y-x)^2/(2t))/\sqrt{2\pi t}$ et vérifie les équations progressive (10.18) et rétrograde (10.19) vues au Chapitre 10. On généralise ci-dessous ces équations pour les semi-groupes avec densité de diffusions générales.

Théorème 11.11 (Équation de Kolmogorov) *On suppose que le semi-groupe $(P_t)_{t\geq 0}$ admet une densité $p_t(x,y)$. Alors :*

(1) Cette densité vérifie l'équation de Kolmogorov progressive en (t,y) (dans le sens des distributions) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t p_t(x,y) &=& L_y^* p_t(x,y) \\ \lim_{t\searrow 0} p_t(x,y)\, dy &=& \delta_x \end{array} \right. \tag{11.12}$$

où L^* est l'opérateur adjoint de L défini par

$$L_y^* f(y) = -\sum_{i=1}^d \partial_{y_i}[a_i(y) f(y)] + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \partial^2_{y_i,y_j}[(\sigma(y)\sigma(y)^*)_{i,j} f(y)].$$

(2) La densité $p_t(x,y)$ satisfait aussi l'équation de Kolmogorov rétrograde en (t,x) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t p_t(x,y) &=& L_x p_t(x,y) \\ \lim_{t\searrow 0} p_t(x,y)\, dx &=& \delta_y. \end{array} \right. \tag{11.13}$$

Démonstration : (1) Pour toute fonction f régulière à support compact ($f \in C_c^2(\mathbb{R}^d)$, par définition de P_t et par convergence dominée, on a :

$$\partial_t P_t f(x) = \partial_t \mathbb{E}_x[f(X_t)] = \partial_t \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(y) p_t(x,y) dy \right) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \partial_t p_t(x,y)\, dy. \tag{11.14}$$

Avec (11.8), pour toute fonction f régulière à support compact, on a :

$$\begin{aligned}
&\partial_t P_t f(x) = P_t L f(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} p_t(x,y) L f(y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} p_t(x,y) \left(\sum_{i=1}^d a_i(y) \partial_{y_i} f(y) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d (\sigma(y)\sigma(y)^*)_{i,j} \partial^2_{y_i,y_j} f(y) \right) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left(- \sum_{i=1}^d \partial_{y_i} [a_i(y) p_t(x,y)] + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \partial^2_{y_i,y_j} [(\sigma(y)\sigma(y)^*)_{i,j} p_t(x,y)] \right) f(y)\, dy && (11.15) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} L_y^* p_t(x,y) f(y)\, dy && (11.16)
\end{aligned}$$

avec quelques intégrations par parties pour obtenir (11.15), il n'y a pas de termes de bord car f est supposée à support compact. L'équation progressive (11.12) s'obtient alors en comparant (11.14) et (11.16).

(2) Puis pour toute fonction f régulière à support compact, d'après (11.8), on a

$$\partial_t P_t f(x) = L(P_t f)(x) = L \left[\int f(y) p_t(\cdot, y)\, dy \right](x) = \int f(y) L_x[p_t(x,y)]\, dy.$$

En comparant avec l'expression

$$\partial P_t f(x) = \partial_t \left(\int p_t(x,y) f(y)\, dy \right) = \int \partial_t p_t(x,y) f(y)\, dy,$$

il vient l'équation rétrograde (11.13) (avec des dérivées dans le sens des distributions). □

11.3 Diffusion et EDP

Avec la formule de Dynkin, on généralise l'observation du Théorème 11.5 en en prouvant une version analogue pour les temps d'arrêt.

Théorème 11.12 (Formule de Dynkin) *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une diffusion homogène de générateur*

$$L = \sum_{i=1}^d a_i \partial_{x_i} + \sum_{i,j=1}^d (\sigma\sigma^*)_{i,j} \partial^2_{x_i,x_j},$$

puis τ un temps d'arrêt intégrable ($\mathbb{E}_x[\tau] < +\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$) et $f \in C_c^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^d$:

$$\mathbb{E}_x\big[f(X_\tau)\big] = f(x) + \mathbb{E}_x\left[\int_0^\tau Lf(X_s)\, ds\right]. \tag{11.17}$$

Démonstration : On utilise (11.3) obtenue par la formule d'Itô dans la preuve du Théorème 11.5 appliquée en $t = \tau$:

$$f(X_\tau) = f(X_0) + \int_0^\tau Lf(X_s)\, ds + \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^m \int_0^\tau \sigma_{i,k}(X_s)\partial_{x_i} f(X_s)\, dB_s^{(k)}$$

Il suffit alors de montrer que les espérances des intégrales stochastiques sont nulles et (11.17) viendra en prenant l'espérance. Pour cela, on observe que pour toute fonction h bornée par M, et $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau\wedge N} h(X_s)\, dB_s\right] = \mathbb{E}_x\left[\int_0^N \mathbf{1}_{\{s<\tau\}} h(X_s)\, dB_s\right] = 0$$

car $\mathbf{1}_{\{s<\tau\}}, h(X_s)$ sont $\mathcal{F}_s$-mesurables, h est bornée et on a une vraie martingale avec $\big(\int_0^t \mathbf{1}_{\{s<\tau\}} h(X_s)\, dB_s\big)_{0\le t\le N}$, nulle en 0 donc centrée. Puis

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x\left[\left(\int_0^\tau h(X_s)\, dB_s - \int_0^{\tau\wedge N} h(X_s)\, dB_s\right)^2\right] &= \mathbb{E}_x\left[\int_{\tau\wedge N}^\tau h(X_s)^2\, ds\right] \\ &\le M^2 \mathbb{E}_x[\tau - \tau\wedge N] \end{aligned}$$

qui tend vers 0 quand $N \to +\infty$ par convergence dominée, en vertu de l'hypothèse $\mathbb{E}_x[\tau] < +\infty$. On a donc

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^\tau h(X_s)\, dB_s\right] = 0.$$

On conclut la preuve en reportant cette conclusion avec $h = \sigma_{i,k}\partial_{x_i} f$ qui est bornée car $\sigma_{i,k}$ et $\partial_{x_i} f$ sont continues sur le support compact de f pour avoir $\mathbb{E}_x\Big[\int_0^\tau \sigma(X_s) f'(X_s)\, dB_s\Big] = 0$.
□

EDP de type Dirichlet

On considère D un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et τ le temps de première sortie de D d'une diffusion homogène de générateur L. On considère alors le problème avec condition au bord :

$$\left\{\begin{array}{rcll} Lu &=& \Theta, & x \in D \\ u &=& \Psi, & x \in \partial D. \end{array}\right. \tag{11.18}$$

Exemple 11.13 (Mouvement brownien et problème de Dirichlet) Dans le cas du mouvement brownien, on a $L = \frac{1}{2}\Delta$, et le choix $\Theta = 0$, $\Psi = f$ retrouve le problème de Dirichlet (10.8) étudié au Chapitre 10.

On suppose que le problème (11.18) admet une unique solution, ce sera le cas par exemple lorsque le domaine D et les fonctions Θ, Ψ sont assez réguliers. On suppose également que le temps de sortie τ est intégrable (pour tout $\mathbb{P}_x$, $x \in \mathbb{R}^d$) et on montre alors que la solution u de (11.18) s'écrit nécessairement

$$u(x) = \mathbb{E}_x\left[\Psi(X_\tau) - \int_0^\tau \Theta(X_s)\,ds\right]. \tag{11.19}$$

En effet, en appliquant formule de Dynkin (11.17) à la solution u de (11.18), on a

$$\begin{aligned} u(x) &= \mathbb{E}_x[u(X_\tau)] - \mathbb{E}_x\left[\int_0^\tau Lu(X_s)\,ds\right] \\ &= \mathbb{E}_x[\Psi(X_\tau)] - \mathbb{E}_x\left[\int_0^\tau \Theta(X_s)\,ds\right] \end{aligned}$$

puisque $X_\tau \in \partial D$ et donc $u(X_\tau) = \Psi(X_\tau)$ et pour $0 < s < \tau$, $X_s \in D$ et $Lu(X_s) = \Theta(X_s)$.

Noter que la condition $\mathbb{E}_x[\tau] < +\infty$ requise pour appliquer (11.17) est satisfaite si le problème (11.18) pour $\Psi = 0$ et $\Theta = 1$ admet une solution $\widetilde{u}$ bornée : en effet dans ce cas, on applique (11.17) avec le temps d'arrêt intégrable $\tau \wedge N$ pour $N \geq 1$:

$$\widetilde{u}(x) = \mathbb{E}_x\big[\widetilde{u}(X_{\tau\wedge N})\big] - \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau\wedge N} Lu(X_s)\,ds\right]. \tag{11.20}$$

Comme on a toujours $X_s \in D$ pour $s < \tau \wedge N$, on a $Lu(X_s) = 1$ ci dessus et

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau\wedge N} Lu(X_s)\,ds\right] = \mathbb{E}_x[\tau \wedge N] \nearrow \mathbb{E}_x[\tau], \quad N \to +\infty$$

où la limite s'obtient par convergence monotone. Puis comme $\widetilde{u}$ est supposée bornée, par convergence dominée lorsque $N \to +\infty$:

$$\mathbb{E}_x\big[\widetilde{u}(X_{\tau\wedge N})\big] \to \mathbb{E}_x\big[\widetilde{u}(X_\tau)\big] = \mathbb{E}_x\big[\psi(X_\tau)\big] = 0$$

puisque $X_\tau \in \partial D$ et $\psi = 0$. On a donc en passant à la limite dans (11.20), on a $\mathbb{E}_x[\tau] = \widetilde{u}(x) < +\infty$.

En prenant d'autres conditions au bord dans (11.18), on obtient d'autres informations sur X : par exemple pour $\Theta = 0$ et $\Psi = \mathbf{1}_A$ où A est une partie de ∂D, alors (11.19) se réduit à

$$u(x) = \mathbb{E}_x\big[\mathbf{1}_A(X_\tau)\big] = \mathbb{P}_x(\text{la diffusion } X \text{ quitte } D \text{ par } A).$$

Ainsi la résolution de (11.18) donne des informations sur le temps de sortie τ et le lieu de sortie X_τ de la diffusion X de D.

Exemple 11.14 (Mouvement brownien géométrique) On considère la diffusion

$$dX_t = X_t\, dB_t$$

de solution le mouvement brownien géométrique $X_t = X_0 \exp(B_t - t/2)$ (par la formule d'Itô, cf. Chapitre 9). On suppose $X_0 > 0$ si bien que $X_t > 0$ pour tout $t \geq 0$. Pour cette diffusion, le générateur est $L = \frac{1}{2}x^2\partial^2_{x,x}$.

On considère le problème (11.18) pour ce L, $D =]a, b[$ avec $0 < a < b$, $\partial D = \{a, b\}$, $\Theta = 0$ et $\Psi(a) = 0$, $\Psi(b) = 1$. Ici le temps de sortie τ de $]a, b[$ s'écrit $\tau = \tau_a \wedge \tau_b$ où τ_a et τ_b sont les temps d'atteinte de a et b. Pour les solutions de

$$Lu(x) = \frac{1}{2}x^2 u''(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u''(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u(x) = c_1 x + c_2$$

avec les conditions au bord, on trouve $u(x) = \frac{x-a}{b-a}$, $x \in [a, b]$. Mais par la formule de Dynkin en (11.19) avec $\tau \wedge N$, on doit avoir

$$u(x) = \mathbb{E}_x\big[\mathbf{1}_{\{X_{\tau\wedge N} = b\}}\big] = \mathbb{P}_x(\tau_b < \tau_a \wedge N).$$

Comme cela est vrai pour tout $n \geq 1$, par convergence monotone, on a donc

$$\mathbb{P}_x(\tau_b < \tau_a) = \frac{x-a}{b-a}, \quad x \in [a, b].$$

En particulier comme $\lim_{a\searrow 0} \tau_a = \tau_0 = +\infty$ (puisque $X_t > 0$ pour tout $t \geq 0$), par convergence monotone, on a

$$\mathbb{P}_x(\tau_b < +\infty) = \lim_{a\to 0} \mathbb{P}_x(\tau_b < \tau_a) = \lim_{a\to 0} \frac{x-a}{b-a} = \frac{x}{b}, \quad x < b.$$

Pour tout niveau b, il y a donc une probabilité strictement positive que le mouvement brownien géométrique X n'atteigne pas ce niveau en partant de $x \in]0, b[$.

Exemple 11.15 (Black et Scholes) Pour $r \in \mathbb{R}$, on considère la diffusion

$$dX_t = rX_t\, dt + X_t\, dB_t$$

de solution $X_t = X_0 \exp(rt + B_t - t/2)$ (par la formule d'Itô, cf. Chapitre 9) en supposant $X_0 > 0$ donc $X_t > 0$ pour tout $t \geq 0$. Le générateur de cette diffusion est

$$L = rx\partial_x + \frac{1}{2}x^2\partial_x^2.$$

On considère le problème (11.18) avec $D =]a, b[$ pour $0 < a < b$, $\partial D = \{a, b\}$ et $\Theta = 0$, $\Psi(a) = 0$, $\Psi(b) = 1$. On note toujours $\tau = \tau_a \wedge \tau_b$ le temps de sortie de $]a, b[$ avec τ_a et τ_b les temps d'atteinte de $0 < a < b$.

Pour $\boxed{r \neq 1/2}$, les solutions de $Lu = 0$ sont $u(x) = c_1 x^{1-2r} + c_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ puisque $Lu = 0$ s'écrit $rxu' + \frac{1}{2}x^2u'' = 0$ soit

$$\frac{u''}{u'} = \frac{-2r}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln(u') = c - 2r\ln x \quad \Rightarrow \quad u' = cx^{-2r} \quad \Rightarrow \quad u = c_1x^{1-2r} + c_2.$$

Avec les conditions au bord, on obtient

$$u(x) = \frac{x^{1-2r} - a^{1-2r}}{b^{1-2r} - a^{1-2r}}.$$

En notant toujours $\tau = \tau_a \wedge \tau_b$ avec τ_a et τ_b les temps d'atteinte de $0 < a < b$ et en appliquant la formule de Dynkin (11.19) avec $\Theta = 0$ et $\Psi(a) = 0$, $\Psi(b) = 1$, on a aussi pour le temps d'arrêt intégrable $\tau \wedge N$:

$$u(x) = \mathbb{E}_x\big[\mathbf{1}_{\{X_{\tau\wedge N} = b\}}\big] = \mathbb{P}_x(\tau_b < \tau_a \wedge N).$$

Par l'unicité de la solution de l'équation différentielle $Lu = 0$, on a

$$\mathbb{P}_x(\tau_b < \tau_a) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}_x(\tau_b < \tau_a \wedge N) = \frac{x^{1-2r} - a^{1-2r}}{b^{1-2r} - a^{1-2r}}, \quad x \in [a, b].$$

Pour $\boxed{r < 1/2}$, on a $\lim_{a\searrow 0} a^{1-2r} = 0$ et $\lim_{a\searrow 0} \tau_a = \tau_0 = +\infty$ (puisque $X_t > 0$ pour tout $t \geq 0$). Par convergence monotone, on a alors :

$$\mathbb{P}_x(\tau_b < +\infty) = \lim_{a\to 0} \mathbb{P}_x(\tau_b < \tau_a) = \lim_{a\to 0} \frac{x^{1-2r} - a^{1-2r}}{b^{1-2r} - a^{1-2r}} = \left(\frac{x}{b}\right)^{1-2r}, \quad 0 < x < b.$$

Ainsi, la probabilité que X n'atteigne jamais b en partant de $x \in]0, b[$ est

$$\mathbb{P}_x(\tau_b = +\infty) = 1 - \left(\frac{x}{b}\right)^{1-2r} > 0.$$

Pour $\boxed{r > 1/2}$, on a $\lim_{a\to 0} a^{1-2r} = +\infty$ et de la même façon :

$$\mathbb{P}_x(\tau_b < +\infty) = \lim_{a\to 0} \mathbb{P}_x(\tau_b < \tau_a) = \lim_{a\to 0} \frac{x^{1-2r} - a^{1-2r}}{b^{1-2r} - a^{1-2r}} = 1, \quad 0 < x < b.$$

Dans ce cas, la probabilité que X n'atteigne jamais b partant de $x \in]0, b[$ est nulle.

Noter que si $\boxed{r = 1/2}$, on peut encore résoudre

$$Lu = \frac{1}{2}xu' + \frac{1}{2}x^2u'' = 0,$$

soit

$$Lu = 0 \ \Rightarrow \ \frac{u''}{u'} = -\frac{1}{x} \ \Rightarrow \ \ln|u'| = c - \ln x \ \Rightarrow \ u' = \frac{c_1}{x} \ \Rightarrow \ u = c_1 \ln x + c_2$$

et obtenir avec les conditions au bord considérées $u(x)=\frac{\ln x-\ln a}{\ln b-\ln a}$, ce qui donne

$$\mathbb{P}_x(\tau_b<\tau_a)=\frac{\ln x-\ln a}{\ln b-\ln a},$$

et en passant à la limite $a\to 0$ obtenir $\mathbb{P}_x(\tau_b<+\infty)=1$.

Quand $\boxed{r\geq 1/2}$, on précise le temps d'atteinte d'un niveau τ_b en calculant son espérance. Pour cela, on considère maintenant le problème (11.18) avec $\Theta=-1$ et $\Psi=0$, et toujours $D=]a,b[$, c'est à dire

$$\left\{\begin{array}{rcll} Lu(x) & = & -1, & x\in]a,b[\\ u(x) & = & 0, & x\in\{a,b\}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcll} 1+rxu'+\frac12x^2u'' & = & 0, & x\in]a,b[\\ u(x) & = & 0, & x\in\{a,b\}.\end{array}\right. \tag{11.21}$$

D'abord pour $\boxed{r>1/2}$, on commence par résoudre l'équation en $v=u'$: $1+rxv+\frac12x^2v=0$. L'équation sans second membre $rxv+\frac12x^2v=0$ a pour solution $v=C/x^{2r}$. On résout avec le second membre par variation de la constante en supposant que $C=C(x)$. Cela donne $C'(x)=-2x^{2r-2}$ soit $C(x)=-2x^{2r-1}+c$ et donc

$$u'=v=\frac{C(x)}{x^{2r}}=-\frac{2}{(2r-1)x}+\frac{c_1}{x^{2r}}$$

et

$$u(x)=-\frac{2}{2r-1}\ln x+c_1x^{1-2r}+c_2. \tag{11.22}$$

Avec les conditions au bord $u(a)=u(b)=0$, on trouve les constantes c_1,c_2 :

$$\begin{array}{rcl} c_1 & = & \dfrac{2}{2r-1}\dfrac{\ln b-\ln a}{b^{1-2r}-a^{1-2r}}\\ c_2 & = & \dfrac{2}{2r-1}\dfrac{(\ln a)b^{1-2r}-(\ln b)a^{1-2r}}{b^{1-2r}-a^{1-2r}}.\end{array}$$

Mais avec $\Theta=-1$ et $\Psi=0$, et $\tau=\tau_a\wedge\tau_b$, la formule de Dynkin (11.19) avec le temps intégrable $\tau\wedge N$ s'écrit

$$u(x)=\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau\wedge N}1\,ds\right]=\mathbb{E}_x[\tau\wedge N]=\mathbb{E}_x[\tau_a\wedge\tau_b\wedge N].$$

Par convergence monotone, lorsque $N\to+\infty$ on a :

$$u(x)=\mathbb{E}_x[\tau_a\wedge\tau_b] \tag{11.23}$$

Les deux solutions (11.22) et (11.23) doivent coïncider.

Quand $a\to 0$, on a $a^{1-2r}\to+\infty$ et donc $c_1\to 0$ et $c_2\to-\frac{2}{2r-1}\ln b$, et aussi $\lim_{a\searrow 0}\tau_a=\tau_0=+\infty$ et par convergence monotone $\mathbb{E}_x[\tau_a\wedge\tau_b]\to\mathbb{E}_x[\tau_b]$. En passant à la limite dans les égalités (11.22) et (11.23), on a

$$\mathbb{E}_x[\tau_b]=\frac{2}{2r-1}\ln\Big(\frac{b}{x}\Big).$$

Noter que $\mathbb{E}_x[\tau_b] = T$ pour $b = x\exp\big((r-1/2)T\big)$: cela montre qu'en une durée T, la solution atteint un niveau exponentiel en T, c'est à dire les solutions tendent à croître exponentiellement.

Puis pour $\boxed{r = 1/2}$, on considère l'équation $1 + \frac{1}{2}xu' + \frac{1}{2}x^2u'' = 0$. On commence par résoudre l'équation sans second membre pour $v = u'$: $xv + x^2v' = 0$, de solution $v = C/x$. On résout avec le second membre par la méthode de la variation de la constante en supposant que $C = C(x)$. Cela donne $C'(x) = -2/x$, soit $C(x) = -2(\ln x) + c_1$ et donc $u' = v = \frac{c_1}{x} - 2\frac{\ln x}{x}$ et $u = c_1 \ln x - (\ln x)^2 + c_2$. Avec les conditions au bord, on détermine les constantes c_1, c_2 :

$$c_1 = \ln a + \ln b, \quad c_2 = -(\ln a)(\ln b)$$

soit

$$u = (\ln a + \ln b)\ln x - (\ln x)^2 - (\ln a)(\ln b). \tag{11.24}$$

Par unicité de la solution, (11.24) doit coïncider avec la solution $\mathbb{E}_x[\tau] = \mathbb{E}_x\big[\tau_a \wedge \tau_b\big]$ obtenue par la formule de Dynkin (11.19). Quand $a \to 0$, on a $\tau_a \nearrow \tau_0 = +\infty$ et $\mathbb{E}_x\big[\tau_a \wedge \tau_b\big] \to \mathbb{E}_x[\tau_b]$ par convergence monotone. Puis quand $a \to 0$, (11.24) donne $u(x) \approx (\ln a)\ln\big(\frac{x}{b}\big) \to +\infty$ pour $x < b$. On en déduit que pour $r = 1/2$, on a $\mathbb{E}_x[\tau_b] = +\infty$ pour tout niveau $b > 0$.

Formule de Feynman-Kac

Parfois, il n'est pas utile de connaître explicitement tout le semi-groupe de transition $(P_t)_{t\geq 0}$ mais, en utilisant des EDP rétrogrades, seulement certaines intégrales.

Théorème 11.16 (Feynman-Kac) *Soit g une fonction continue. S'il existe une solution régulière $u(t,x)$ à l'EDP rétrograde*

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + Lu(t,x) = 0, \\ u(T,x) = g(x), \end{cases} \tag{11.25}$$

alors elle doit s'écrire $u(t,x) = \mathbb{E}[g(X_T)\,|X_t = x]$.

L'intérêt d'une telle formule est de pouvoir donner une solution d'EDP sous forme d'espérance. On peut alors simuler la solution de l'EDP à l'aide de méthodes de Monte-Carlo pour approximer les espérances.

Démonstration : Comme pour (11.4), on applique la formule d'Itô à $u(s, X_s)$ entre les dates t et T et on utilise que u vérifie l'EDP (11.25) :

$$\begin{aligned} u(T, X_T) &= u(t, X_t) + \int_t^T \partial_s u(s, X_s)\,ds + \int_0^t Lu(s, X_s)\,ds \\ &\qquad + \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^m \int_t^T \sigma_{i,k}(X_s)\partial_{x_i} u(s, X_s)\,dB_s^{(k)} \end{aligned} \tag{11.26}$$

$$= \quad u(t,X_t) + \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^m \int_t^T \sigma_{i,k}(X_s)\partial_{x_i} u(s,X_s)\, dB_s^{(k)}.$$

Avec assez de régularité, les intégrales $\int_t^T \sigma_{i,j}(X_s)\partial_{x_i} u(s,X_s)\, dB_s^{(j)}$ sont de vraies martingales car

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\left\langle \int_0^{\cdot} \sigma_{i,j}(X_s)\partial_{x_i} u(s,X_s)\, dB_s^{(j)}, \int_0^{\cdot} \sigma_{i,j}(X_s)\partial_{x_i} u(s,X_s)\, dB_s^{(j)} \right\rangle_t\right] \\ &= \quad \mathbb{E}\left[\int_0^t \sigma_{i,j}(X_s)^2(\partial_{x_i} u(s,X_s))^2 ds\right] \leq Ct, \end{aligned}$$

par exemple si u est à support compact car alors $(\sigma_{i,j}(x)\partial_{x_i} u(t,x))^2$ est bornée sur ce compact. En prenant l'espérance conditionnelle, on a

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[u(T,X_T)|X_t = x] \\ &= \quad \mathbb{E}[u(t,X_t)|X_t = x] + \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^m \mathbb{E}\Big[\int_t^T \sigma_{i,k}(X_s)\partial_{x_i} u(s,X_s)\, dB_s^{(k)}\Big| X_t = x\Big] \\ &= \quad \mathbb{E}[u(t,x)|X_t = x] + \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^m \mathbb{E}_x\Big[\int_0^{T-t} \sigma_{i,k}(X_s)\partial_{x_i} u(s,X_s)\, dB_s^{(k)}\Big] \qquad (11.27) \\ &= \quad u(t,x) \end{aligned}$$

en utilisant la propriété de Markov pour (11.27) puis la propriété de martingale pour annuler l'espérance correspondante. Comme $u(T,X_T) = g(X_T)$ par la condition finale de l'EDP (11.25), on a bien la conclusion cherchée. □

On peut également traiter la même EDP avec un terme de dissipation :

Corollaire 11.17 *Soit g une fonction continue. S'il existe une solution régulière $v(t,x)$ à l'EDP rétrograde*

$$\begin{cases} \partial_t v(t,x) + Lv(t,x) - k(t,x)v(t,x) = 0, \\ v(T,x) = g(x), \end{cases} \qquad (11.28)$$

alors elle s'écrit

$$v(t,x) = \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_t^T k(s,X_s)\, ds\right) g(X_T)|X_t = x\right].$$

Démonstration : Comme dans la preuve précédente et dans celle du Theorème 10.15, on applique la formule d'Itô (de la même façon que pour (11.4)) au produit de processus $v(s,X_s)$ et $\exp\left(-\int_t^s k(u,X_u)du\right)$ et on utilise l'EDP (11.28). Comme $\exp\left(-\int_t^s k(u,X_u)du\right)$ est à variation finie, on a une dérivation sans terme de variation quadratique

$$d\left[v(s,X_s)\exp\left(-\int_t^s k(u,X_u)du\right)\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \big(dv(s,X_s)\big)\exp\left(-\int_t^s k(u,X_u)du\right) - v(s,X_s)k(s,X_s)\exp\left(-\int_t^s k(u,X_u)du\right)ds \\
&= \big(dv(s,X_s) - v(s,X_s)k(s,X_s)ds\big)\exp\left(-\int_t^s k(u,X_u)du\right). \qquad (11.29)
\end{aligned}
$$

Puis de nouveau avec la formule d'Itô :

$$
dv(s,X_s) = \partial_s v(s,X_s)ds + Lv(s,X_s)ds + \sum_{i=1}^d\sum_{k=1}^m \int_t^T \sigma_{i,k}(X_s)\partial_{x_i}v(s,X_s)\,dB_s^{(k)}
$$

et en utilisant l'EDP (11.28) :

$$
dv(s,X_s) - v(s,X_s)k(s,X_s)ds = \sum_{i=1}^d\sum_{k=1}^m \int_t^T \sigma_{i,k}(X_s)\partial_{x_i}v(s,X_s)\,dB_s^{(k)}.
$$

En reportant dans (11.29) et en intégrant pour $x \in [t,T]$, on a

$$
\begin{aligned}
&v(T,X_T)\exp\left(-\int_t^T k(u,X_u)du\right) - v(t,X_t) \\
&= \int_t^T d\left[v(s,X_s)\exp\left(-\int_t^s k(u,X_u)du\right)\right] \\
&= \int_t^T \sum_{i=1}^d\sum_{k=1}^m \int_t^T \sigma_{i,k}(X_s)\partial_{x_i}v(s,X_s)\exp\left(-\int_t^s k(u,X_u)du\right)\,dB_s^{(k)}.
\end{aligned}
$$

En prenant l'espérance conditionnelle, avec la propriété de Markov, et la propriété de martingale, on a :

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\int_t^T \sum_{i=1}^d\sum_{k=1}^m \int_t^T \sigma_{i,k}(X_s)\partial_{x_i}v(s,X_s)\exp\left(-\int_t^s k(u,X_u)du\right)\,dB_s^{(k)}\,\Big|X_t = x\right] \\
&= \mathbb{E}_x\left[\int_0^{T-t} \sum_{i=1}^d\sum_{k=1}^m \int_t^T \sigma_{i,k}(X_s)\partial_{x_i}v(s,X_s)\exp\left(-\int_t^s k(u,X_u)du\right)\,dB_s^{(k)}\right] \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

et il vient

$$
\begin{aligned}
v(t,x) &= \mathbb{E}[v(t,X_t)\,|X_t = x] \\
&= \mathbb{E}\left[v(T,X_T)\exp\left(-\int_t^T k(u,X_u)du\right)\,\Big|X_t = x\right] \\
&= \mathbb{E}\left[g(X_T)\exp\left(-\int_t^T k(u,X_u)du\right)\,\Big|X_t = x\right].
\end{aligned}
$$

□

Chapitre 12

Problèmes de martingale

Dans ce chapitre, on résout des EDS (solutions faibles) en montrant que certains processus sont des martingales. Ce type d'approche a été introduit par Stroock et Varadhan (1969) et on commence par l'introduire avec un exemple très simple.

Exemple 12.1 Étant donné un mouvement brownien B, on considère l'EDS

$$dX_t = dB_t, \quad X_0 = 0.$$

La seule solution est évidemment $X = B$, la solution faible est donc la mesure de Wiener $\mathbb{W}$ sur

$$(\Omega', \mathcal{F}') = \big(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}))\big)$$

muni de la filtration $(\mathcal{F}'_t)_{t\geq 0}$ engendrée par le processus canonique $X'_t(\omega') = \omega'(t)$.

Avec le théorème de Lévy (Théorème 7.9), on observe que la mesure de Wiener $\mathbb{W}$ est la seule probabilité sur $(\Omega', \mathcal{F}', (\mathcal{F}'_t)_{t\geq 0})$ sous laquelle X'_t et $X'^2_t - t$ sont des martingales locales.

Dans le cas particulier de cet Exemple 12.1, la résolution faible (existence et unicité faibles) de l'EDS a consisté à identifier une probabilité (la mesure de Wiener $\mathbb{W}$) sous laquelle certains processus sont des martingales (locales). Dans ce chapitre, on développe ce type d'approche, appelée problème de martingale. Après une introduction en Section 12.1, on relie EDS et problème de martingale en Section 12.2. Dans les Sections **??** et 12.3, on donne des résultats d'existence et d'unicité pour les EDS obtenus par problèmes de martingale.

12.1 Introduction et notations

Étant donné un mouvement brownien m dimensionnel B, des fonctions mesurables $a(t, x) \in \mathbb{R}^d$ et $\sigma(t, x) \in \mathcal{M}_{d,m}(\mathbb{R})$ pour $t \in \mathbb{R}_+$ et $x \in \mathbb{R}^d$, on considère dans ce chapitre l'EDS

$$dX_t = a(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dB_t. \qquad (E(a,\sigma))$$

On ne suppose plus les hypothèses lipschitziennes du Chapitre 9 et on cherche une solution faible à l'EDS $E(a,\sigma)$, c'est à dire un triplet

$$\big\{X,\ B,\ (\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P})\big\}$$

tel que B est un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien et X est un processus $(\mathcal{F}_t)$-adapté, à trajectoires continues vérifiant presque sûrement :

$$\int_0^t \big(|a_i(s,X_s)|+\sigma_{i,j}^2(s,X_s)\big)\,ds<+\infty,\quad 1\leq i\leq d,\ 1\leq j\leq m,\ t\geq 0, \tag{12.1}$$

$$X_t=X_0+\int_0^t a(s,X_s)\,ds+\int_0^t \sigma(s,X_s)\,dB_s,\quad t\geq 0. \tag{12.2}$$

Noter que pour une telle solution, X_t est bien définie pour tout $t\geq 0$, si bien que lorsqu'on considère les temps d'arrêt $S_n=\inf\big(t\geq 0:\|X_t\|\geq n\big)$, on a $S_n\to+\infty$ ps quand $n\to+\infty$.

Une solution faible de $E(a,\sigma)$ peut être vue comme une loi sur l'espace (canonique) $\big(C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d),\mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d))\big)$ et cette loi s'appelle alors une **mesure-solution**. Une probabilité $\mathbb{P}'$ mesure-solution sur $(\Omega',\mathcal{F}')=\big(C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d),\mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d))\big)$ et une solution faible $\big\{X,B,\ (\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P})\big\}$ sont reliées par $\mathbb{P}'=\mathbb{P}_X$.

Dans ce chapitre, on montre qu'une probabilité sur $\big(C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d),\mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d))\big)$ est mesure-solution de $E(a,\sigma)$ si et seulement si c'est la solution d'un problème de martingale. Pour cela, on suppose que l'EDS $E(a,\sigma)$ satisfait l'hypothèse :

$$\text{Les fonctions } a \text{ et } \sigma \text{ sont boréliennes et localement bornées.} \tag{loc}$$

On note $c=\sigma\sigma^*$ la fonction de $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d$ dans l'espace des matrices $d\times d$ symétriques positives, ie. pour $i,j=1,\dots,m$:

$$c_{i,j}(t,x)=\sum_{k=1}^m \sigma_{i,k}(t,x)\sigma_{j,k}(t,x). \tag{12.3}$$

La fonction c est borélienne et sous (loc) elle est aussi localement bornée.

On associe à l'EDS $E(a,\sigma)$ le générateur (11.1), ie.

$$Lf(t,x)=\sum_{i=1}^d a_i(t,x)\partial_{x_i}f(x)+\frac12\sum_{i,j=1}^d c_{i,j}(t,x)\partial^2_{x_i,x_j}f(x),\quad f\in C^2(\mathbb{R}^d).$$

Si $f\in C^{1,2}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)$, on applique $L\cdot(t,\cdot)$ à $f(t,\cdot)$ en posant

$$Lf(t,x)=\sum_{i=1}^d a_i(t,x)\partial_{x_i}f(t,x)+\frac12\sum_{i,j=1}^d c_{i,j}(t,x)\partial^2_{x_i,x_j}f(t,x).$$

Une première observation reliant l'EDS $E(a,\sigma)$ à des martingales est donnée dans la proposition suivante :

Proposition 12.2 *Soit* $\{X, B, (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})\}$ *une solution faible de l'EDS* $E(a,\sigma)$. *Pour toute fonction* $f(t,x) \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$,

$$M_t^f = f(t, X_t) - f(0, X_0) - \int_0^t \big(\partial_t f + Lf\big)(s, X_s)\, ds \tag{12.4}$$

est une martingale locale à trajectoires continues. De plus si $g \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ *alors*

$$\langle M^f, M^g\rangle_t = \sum_{i,j=1}^d \int_0^t c_{i,j}(s, X_s)\partial_{x_i} f(s, X_s)\partial_{x_j} g(s, X_s)\, ds. \tag{12.5}$$

Puis si $f \in C_c^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ *et l'hypothèse (loc) est satisfaite alors* $M^f \in L^2(B)$.

Démonstration : La formule d'Itô appliquée à $f(t, X_t)$ s'écrit

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \big(\partial_t f + Lf\big)(s, X_s)\, ds + \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{i,j}(s, X_s)\partial_{x_i} f(s, X_s)\, dB_s^{(j)}.$$

Elle exprime donc M^f comme une somme d'intégrales stochastiques :

$$M_t^f = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^m M_t^{i,j} \quad \text{avec} \quad M_t^{i,j} = \int_0^t \sigma_{i,j}(s, X_s)\partial_{x_i} f(s, X_s)\, dB_s^{(j)}.$$

On considère les temps d'arrêt

$$S_n = \inf\left(t \geq 0 : \|X_t\| \geq n \text{ ou } \int_0^t \sigma_{i,j}(s, X_s)^2\, ds \geq n \text{ pour un } (i,j)\right).$$

Comme presque sûrement pour chaque (i,j), on a $\int_0^t \sigma_{i,j}(s, X_s)^2\, ds < +\infty$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\langle (M_t^{i,j})^{S_n}, (M_t^{i,j})^{S_n}\rangle_t\Big] &= \mathbb{E}\Big[\langle M_t^{i,j}, M_t^{i,j}\rangle_{t\wedge S_n}\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\int_0^{t\wedge S_n} \sigma_{i,j}(s, X_s)^2 \partial_{x_i} f(s, X_s)^2\, ds\Big] \leq K^2 n,
\end{aligned}$$

car pour $s \leq t \wedge S_n$ on a $\|X_s\| \leq n$ domaine sur lequel $\partial_{x_i} f(s,x)$ est bornée par K, et $\int_0^t \sigma_{i,j}(s, X_s)^2\, ds < n$ pour $t \leq S_n$. Comme $S_n \nearrow +\infty$, $M^{i,j}$ est une martingale locale à trajectoires continues et donc aussi les processus

$$(M_t^f)^{S_n} = M_{t\wedge S_n}^f = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^m M_{t\wedge S_n}^{i,j}, \quad t \geq 0.$$

Le crochet (12.5) vient de l'expression obtenue pour M^f et de $\langle B^{(i)}, B^{(j)}\rangle_t = \delta_{i,j} t$:

$$\langle M^f, M^g\rangle_t = \sum_{i,k=1}^d \sum_{j,l=1}^m \left\langle \int_0^\cdot \sigma_{i,j}(s, X_s)\partial_{x_i} f(s, X_s)\, dB_s^{(j)}, \int_0^\cdot \sigma_{k,l}(s, X_s)\partial_{x_k} g(s, X_s)\, dB_s^{(l)} \right\rangle_t$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i,k=1}^{d}\sum_{j,l=1}^{m}\int_0^t \sigma_{i,j}(s,X_s)\sigma_{k,l}(s,X_s)\partial_{x_i}f(s,X_s)\partial_{x_k}g(s,X_s)\,d\langle B^{(j)},B^{(l)}\rangle_s\\
&= \sum_{i,k=1}^{d}\sum_{j=1}^{m}\int_0^t \sigma_{i,j}(s,X_s)\sigma^*_{j,k}(s,X_s)\partial_{x_i}f(s,X_s)\partial_{x_k}g(s,X_s)\,ds\\
&= \sum_{i,k=1}^{d}\int_0^t (\sigma\sigma^*)_{i,j}(s,X_s)\partial_{x_i}f(s,X_s)\partial_{x_k}g(s,X_s)\,ds.
\end{aligned}
$$

De plus, si $f \in C_c^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ et (*loc*) est satisfaite, alors l'intégrande dans M^f est borné et $M^f \in L^2(B)$ car dans ce cas $\mathbb{E}[\langle M^f, M^f\rangle_t] < +\infty$ pour chaque $t \geq 0$. Le processus M^f est donc une vraie martingale. □

En particulier, en appliquant la Proposition 12.2 aux fonctions $f_i(x) = x_i$ et $f_{i,j}(x) = x_i x_j$, $1 \leq i, j \leq d$, il vient que $M^{(i)} := M^{f_i}$ et $M^{(i,j)} := M^{f_{i,j}}$ sont des martingales locales. En observant que

$$
\begin{aligned}
Lf_i(t,x) &= a_i(t,x),\\
Lf_{i,j}(t,x) &= a_i(t,x)x_j + a_j(t,x)x_i + c_{i,j}(t,x),
\end{aligned}
$$

ces martingales locales s'écrivent :

$$
M_t^{(i)} = X_t^{(i)} - x_0^{(i)} - \int_0^t a_i(s,X_s)\,ds, \tag{12.6}
$$

$$
M_t^{(i,j)} = X_t^{(i)}X_t^{(j)} - x_0^{(i)}x_0^{(j)} - \int_0^t \big(a_i(s,X_s)X_s^{(j)} + a_j(s,X_s)X_s^{(i)} + c_{i,j}(s,X_s)\big)\,ds. \tag{12.7}
$$

Ces processus joueront un rôle particulier dans la résolution de problèmes de martingale dans la section suivante.

12.2 EDS et problème de martingale

On a vu dans la Proposition 12.2 qu'à une solution faible d'EDS $E(a,\sigma)$ sont associées des martingales (locales). Cette section établit une sorte de réciproque en montrant l'existence faible pour $E(a,\sigma)$ en trouvant des martingales. Comme a priori on ne dispose pas de solution explicite, ie. de triplet $\big\{X, B, (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})\big\}$ où B est un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien et pour lequel X est solution satisfaisant (12.1)–(12.2), on exprime le problème de martingales sur l'espace canonique

$$
(\Omega', \mathcal{F}') = \big(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d), \mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d))\big).
$$

On munit cet espace canonique de la filtration $(\mathcal{F}'_t)_{t\geq 0}$ engendrée par le processus canonique donné par $X'_t(\omega') = \omega'(t)$, $t \geq 0$.

Définition 12.3 (Problème de martingale) *On appelle problème de martingale la recherche d'une probabilité $\mathbb{P}'$ sur $(\Omega', \mathcal{F}')$ sous laquelle M'^f définie par*

$$M_t'^f = f(X_t') - f(X_0') - \int_0^t Lf(X_s')\, ds \tag{12.8}$$

est une martingale à trajectoires continues pour toute $f \in C_c^2(\mathbb{R}^d)$. Lorsqu'on cherche $\mathbb{P}'$ sous laquelle M'^f est une martingale locale á trajectoires continues pour toute $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$, on parle de problème de martingale locale. Une probabilité $\mathbb{P}'$ qui convient est dite solution du problème de martingale (locale).

Proposition 12.4 (Problèmes de martingale et de martingale locale) *Si $\mathbb{P}'$ est solution d'un problème de martingale (12.8) alors $\mathbb{P}'$ est solution du problème de martingale locale correspondant.*

Démonstration : En effet, pour $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ (sans support compact), pour chaque $k \geq 1$, on pose $S_k' = \inf\big(t \geq 0 : \|X_t'\| \geq k\big)$ pour $w \in C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ et on considère $g_k \in C_c^2(\mathbb{R}^d)$ qui coïncide avec f sur $\{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leq k\}$. Par hypothèse, M'^{g_k} est une martingale sous $\mathbb{P}'$, et $M_t'^{g_k} = M_t'^f$ pour $t \leq S_n$. Cela assure que $(M'^f)^{S_n}$ est une martingale locale (à trajectoires continues) et donc M'^f est une martingale locale (à trajectoires continues). $\square$

Proposition 12.5 *Si le triplet $\big\{X, B, (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})\big\}$ est solution faible de l'EDS $E(a, \sigma)$ satisfaisant (loc) alors la probabilité $\mathbb{P}_X$ sur $(\Omega', \mathcal{F}') = \big(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d), \mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d))\big)$ est solution du problème de martingale (12.8).*

Démonstration : On suppose que $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité sur lequel B est $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien et X processus $(\mathcal{F}_t)$-adapté à trajectoires continues presque sûrement, de loi $\mathbb{P}'$, vérifiant (12.1)–(12.2) sur Ω.

D'après la Proposition 12.2, comme (*loc*) est en vigueur, pour $f, g \in C_c^2(\mathbb{R}^d)$, M^f et M^g sont des martingales, de crochet donné par

$$\langle M^f, M^g\rangle_t = \sum_{i,j=1}^d \int_0^t c_{i,j}(s, X_s)\partial_{x_i} f(X_s)\partial_{x_j} g(X_s)\, ds.$$

Il s'agit de transférer cette observation aux martingales M'^f analogues de M^f sur l'espace $\Omega' = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$. On effectue le transfert par le processus solution $X : \Omega \to C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d) = \Omega'$. Plus précisément en notant $N = \{\omega \in \Omega :$ la fonction $t \mapsto X_t(\omega)$ n'est pas continue$\}$, on considère $\Phi : \Omega \to \Omega'$ donnée par

$$\Phi(\omega)(t) = \begin{cases} X_t(\omega) & \text{si } \omega \notin N \\ 0 & \text{si } \omega \in N \end{cases}$$

alors $\mathbb{P}' = \mathbb{P} \circ X^{-1} = \mathbb{P} \circ \Phi^{-1}$. Noter que comme la filtration est complète et X est $(\mathcal{F}_t)$-adapté et à trajectoires continues (à gauche) alors X est un processus prévisible. Il s'ensuit que Φ respecte les filtrations : pour $A' \in \mathcal{F}'_t$, $\Phi^{-1}(A') \in \mathcal{F}_t$.

D'après les définitions de Φ, des processus M^f, et M'^f, hors du négligeable N, on a

$$M^f = M'^f \circ \Phi. \tag{12.9}$$

Comme $\mathbb{P}(N) = 0$, l'égalité (12.9) reste vraie $\mathbb{P}$-ps et M'^f est une martingale en utilisant le lemme qui suit. □

Lemme 12.6 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ et $(\Omega', \mathcal{F}', (\mathcal{F}'_t)_{t\geq 0})$ et $\Phi : \Omega \to \Omega'$ qui respecte les filtrations. On pose $\mathbb{P}' = \mathbb{P} \circ \Phi^{-1}$. Alors si M est une martingale à trajectoires continues sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, le processus continu M' sur Ω' associé à M par $M = M' \circ \Phi$ en dehors de N (bien défini $\mathbb{P}'$-ps) est une martingale sur $(\Omega', \mathcal{F}', (\mathcal{F}'_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}')$.*

Démonstration :[Lemme 12.6] En effet, si $s < t$ et $A' \in \mathcal{F}'_s$, on a $A = \Phi^{-1}(A') \in \mathcal{F}_s$ (car Φ respecte les filtrations) et par transfert de Ω sur Ω' à l'aide de l'application mesurable Φ :

$$\mathbb{E}'[(M'_t - M'_s)\mathbf{1}_{A'}] = \mathbb{E}[(M_t - M_s)\mathbf{1}_A] = 0.$$

Ainsi M' est une martingale sur $(\Omega', \mathcal{F}', (\mathcal{F}'_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}')$. □

On complète pour $f, g \in C^2(\mathbb{R}^d)$: comme

$$\begin{aligned}
&(M_t^f)^{T_n}(M_t^g)^{S_n} - \langle M^f, M^g\rangle_t^{S_n} \\
&= \left((M_t'^f M_t'^g)^{S'_n} - \Big(\sum_{i,j=1}^d \int_0^{t\wedge S_n} c_{i,j}(s, w'_s)\partial_{x_i} f(w'_s)\partial_{x_j} g(w'_s)\, ds\Big)\right)^{S'_n} \circ \Phi
\end{aligned}$$

est aussi une martingale alors Lemme 12.6 assure aussi que

$$\langle M'^f, M'^g\rangle_t = \sum_{i,j=1}^d \int_0^t c_{i,j}(s, w'_s)\partial_{x_i} f(w'_s)\partial_{x_j} g(w'_s)\, ds.$$

Le résultat principal qui suit établit la réciproque de la Proposition 12.5. Pour cette réciproque, il suffit de considérer les fonctions $f_i(x) = x_i$ et $f_{i,j}(x) = x_i x_j$. On utilise alors les notations suivantes pour les analogues de M^{f_i}, $M^{f_{i,j}}$ sur Ω' comme en (12.6), (12.7) pour $i, j = 1, \dots, d$:

$$\begin{aligned}
M_t'^{(i)} &:= M_t'^{f_i} = X_t'^{(i)} - x_0^{(i)} - \int_0^t a_i(s, X'_s)\, ds, \\
M_t'^{(i,j)} &:= M'^{f_{i,j}} = X_t'^{(i)} X_t'^{(j)} - x_0^{(i)} x_0^{(j)} - \int_0^t \Big(a_i(s, X'_s) X_s'^{(j)} + a_j(s, X'_s) X_s'^{(i)} + c_{i,j}(s, X'_s)\Big)\, ds
\end{aligned}$$

$$= X_t^{'(i)} X_t^{'(j)} - x_0^{(i)} x_0^{(j)} - \int_0^t \left(\partial_t A_t^{'(i)} X_s^{'(j)} + \partial_t A_t^{'(j)} X_s^{'(i)} \right) ds + C_t^{'(i,j)};$$

ce sont des processus à trajectoires continues et $(\mathcal{F}'_t)$-adaptés sur Ω'. De plus, on note

$$A_t^{'(i)} = \int_0^t a_i(s, X'_s)\, ds, \quad C_t^{'(i,j)} = \int_0^t c_{i,j}(s, X'_s)\, ds. \tag{12.10}$$

Proposition 12.7 (Problème de martingale) *On considère l'EDS $E(a,\sigma)$ satisfaisant l'hypothèse (loc). Soit $\mathbb{P}'$ une probabilité $\mathbb{P}'$ sur $(\Omega', \mathcal{F}')$ telle que pour tout $1 \leq i \leq d$ les processus $M'^{(i)}$ et $M'^{(i,j)}$ sont des martingales locales sous $\mathbb{P}'$ avec $M_0^{'(i)} = 0$ $\mathbb{P}'$-ps (soit $\mathbb{P}'(X'_0 = x) = 1$). Alors $\mathbb{P}'$ est mesure-solution de l'EDS $E(a,\sigma)$.*

Des résultats précédents, on déduit :

Théorème 12.8 (EDS et problème de martingale) *Pour une EDS $E(a,\sigma)$ satisfaisant la condition (loc), les assertions suivantes sont équivalentes :*

(A) Il existe une solution faible de l'EDS $E(a,\sigma)$.

(B) Il existe une solution au problème de martingale (12.8).

(C) Il existe une solution au problème de martingale locale (12.8).

Démonstration :[Théorème 12.8] $(A) \Rightarrow (B)$ est due à la Proposition 12.5, $(B) \Rightarrow (C)$ vient de la Proposition 12.4. Enfin, on a $(C) \Rightarrow (A)$ par la Proposition 12.7. □

Démonstration :[Proposition 12.7] Étant donné une mesure-solution $\mathbb{P}'$, il s'agit de trouver un espace Ω sur lequel X' (de loi $\mathbb{P}'$) est encore défini et est solution de $E(a,\sigma)$, ie. vérifie (12.1)–(12.2). Pour cela, on procède par étapes avec du travail préliminaire :

— étape 1 : on commence remplacer $M'^{(i,j)}$ par une autre martingale locale $N'^{(i,j)}$;

— étape 2 : extension de l'espace de probabilité ;

— étape 3 : algèbre linéaire ;

— étape 4 : preuve de la condition suffisante.

Étape 1 (équivalence de martingales locales). Plutôt que de considérer $M'^{(i,j)}$, on préfère considérer $N'^{(i,j)}$ donné pour $i, j = 1, \dots, d$ par

$$N_t^{'(i,j)} = M_t^{'(i)} M_t^{'(j)} - C_t^{'(i,j)}. \tag{12.11}$$

Noter que dans ce sens de la preuve, on sait que $M'^{(i)}$, $M'^{(j)}$ sont des martingales locales, mais on ne connaît pas leur crochet comme dans la Proposition 12.2 ; on ne peut donc pas affirmer que $N'^{(i,j)}$ est aussi une martingale locale. Cependant, du point de vue du problème de martingale, il est équivalent de considérer $M'^{(i,j)}$ ou $N'^{(i,j)}$:

Lemme 12.9 *Lorsque $M'^{(i)}$, $M'^{(j)}$ sont des martingales locales, le processus $N'^{(i,j)}$ est une martingale locale si et seulement si $M'^{(i,j)}$ en est une. Dans ce cas, on a :*

$$\langle M'^{(i)}, M'^{(j)} \rangle_t = C_t^{'(i,j)}. \tag{12.12}$$

Démonstration :[Lemme 12.9] D'abord, $N_t^{\prime(i,j)}$ s'écrit

$$N_t^{\prime(i,j)} = M_t^{\prime(i,j)} - X_0^{\prime(i)} M_t^{\prime(j)} - X_0^{\prime(j)} M_t^{\prime(i)} + K_t^{\prime(i,j)} \tag{12.13}$$

avec le terme correctif

$$\begin{aligned} K_t^{\prime(i,j)} &= \int_0^t (X_s^{\prime(i)} - X_t^{\prime(i)}) a_j(s, X_s') \, ds + \int_0^t (X_s^{\prime(j)} - X_t^{\prime(j)}) a_i(s, X_s') \, ds \\ &\quad + \Big(\int_0^t a_i(s, X_s') \, ds \Big) \Big(\int_0^t a_j(s, X_s') \, ds \Big). \end{aligned}$$

Comme par intégration par parties classique,

$$\begin{aligned} &\left(\int_0^t a_i(s, X_s') \, ds \right) \left(\int_0^t a_j(s, X_s') \, ds \right) \\ &= \int_0^t \left(\int_s^t a_i(u, X_u') \, du \right) a_j(s, X_s') \, ds + \int_0^t \left(\int_s^t a_j(u, X_u') \, du \right) a_i(s, X_s') \, ds, \end{aligned}$$

le terme correctif s'écrit

$$\begin{aligned} K_t^{\prime(i,j)} &= \int_0^t \Big(X_s^{\prime(i)} - X_t^{\prime(i)} + \int_s^t a_i(u, X_u') \, du \Big) a_j(s, X_s') \, ds \\ &\quad + \int_0^t \Big(X_s^{\prime(j)} - X_t^{\prime(j)} + \int_s^t a_j(u, X_u') \, du \Big) a_i(s, X_s') \, ds \\ &= \int_0^t (M_s^{\prime(i)} - M_t^{\prime(i)}) a_j(s, X_s') \, ds + \int_0^t (M_s^{\prime(j)} - M_t^{\prime(j)}) a_i(s, X_s') \, ds \qquad (12.14) \\ &= -\int_0^t \left(\int_0^s a_j(u, X_u') \, du \right) dM_s^{\prime(i)} - \int_0^t \left(\int_0^s a_i(u, X_u') \, du \right) dM_s^{\prime(j)} \qquad (12.15) \end{aligned}$$

où (12.14) utilise

$$\begin{aligned} X_s^{\prime(i)} - X_t^{\prime(i)} + \int_s^t a_i(u, X_u') \, du &= M_s^{\prime(i)} - M_t^{\prime(i)}, \\ X_s^{\prime(j)} - X_t^{\prime(j)} + \int_s^t a_j(u, X_u') \, du &= M_s^{\prime(j)} - M_t^{\prime(j)}; \end{aligned}$$

et enfin, (12.15) est obtenue par intégration par parties avec la formule d'Itô (Corollaire 7.3) pour XY avec $X = M'$ et $Y = \int_0^\cdot a(s, X_s') \, ds$, sans terme de crochet puisque Y est ici à variation finie.

Par (12.13) et (12.15), on a donc

$$\begin{aligned} N_t^{\prime(i,j)} &= M_t^{\prime(i,j)} - X_0^{\prime(i)} M_t^{\prime(j)} - X_0^{\prime(j)} M_t^{\prime(i)} \\ &\quad - \int_0^t \left(\int_0^s a_j(u, X_u') \, du \right) dM_s^{\prime(i)} - \int_0^t \left(\int_0^s a_i(u, X_u') \, du \right) dM_s^{\prime(j)}. \end{aligned}$$

Comme les $M'^{(i)}$, $M'^{(j)}$ en (12.6) sont des martingales locales par hypothèse, il suit que $N'^{(i,j)}$ est une martingale locale si et seulement si $M'^{(i,j)}$ en est une.

Lorsque $N'^{(i,j)}$ est une martingale locale, par sa définition (12.11), il vient de suite le crochet de $M'^{(i)}$ et de $M'^{(j)}$ en (12.12). □

Étape 2 (extension de l'espace de probabilité). Pour cela, on considère un espace auxiliaire $(\Omega'', \mathcal{F}'', (\mathcal{F}''_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}'')$ sur lequel est défini un mouvement brownien m-dimensionnel B'' (par exemple Ω'' peut être l'espace de Wiener m-dimensionnel). On pose alors

$$\Omega = \Omega' \times \Omega'', \quad \mathcal{F} = \mathcal{F}' \otimes \mathcal{F}'', \quad \mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} (\mathcal{F}'_s \otimes \mathcal{F}''_s), \quad \mathbb{P} = \mathbb{P}' \otimes \mathbb{P}''. \tag{12.16}$$

Avec un abus de notation, on étend toutes les fonctions sur Ω' ou Ω'' de manière usuelle à Ω en gardant le même symbole, par exemple

$$X'_t(\omega', \omega'') = X'_t(\omega'), \quad B''_t(\omega', \omega'') = B''_t(\omega'').$$

Par construction, B'' est indépendant de Ω'.

Soit U' et U'' des martingales locales sur $(\Omega', \mathcal{F}', (\mathcal{F}'_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}')$ et $(\Omega'', \mathcal{F}'', (\mathcal{F}''_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}'')$. On les suppose réduites respectivement par $(T'_n)_{n\geq 1}$ et $(T''_n)_{n\geq 1}$. Pour tous $s \leq t$ et $A' \in \mathcal{F}'_s$, $A'' \in \mathcal{F}''_s$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[U_t'^{T'_n} \mathbf{1}_{A'\times A''}\big] &= \mathbb{E}'\big[U_t'^{T'_n} \mathbf{1}_{A'}\big]\mathbb{P}''(A'') = \mathbb{E}'\big[U_s'^{T'_n} \mathbf{1}_{A'}\big]\mathbb{P}''(A'') = \mathbb{E}\big[U_s'^{T'_n} \mathbf{1}_{A'\times A''}\big] \\
\mathbb{E}\big[U_t'^{T'_n} U_t''^{T''_n} \mathbf{1}_{A'\times A''}\big] &= \mathbb{E}'\big[U_t'^{T'_n} \mathbf{1}_{A'}\big]\mathbb{E}''\big[U_t''^{T''_n} \mathbf{1}_{A''}\big] = \mathbb{E}'\big[U_s'^{T'_n} \mathbf{1}_{A'}\big]\mathbb{E}''\big[U_s''^{T''_n} \mathbf{1}_{A''}\big] \\
&= \mathbb{E}\big[U_s'^{T'_n} U_s''^{T''_n} \mathbf{1}_{A'\times A''}\big].
\end{aligned} \tag{12.17}$$

Ainsi, U' et U'' sont des martingales locales sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$. Comme $U_t'^{T'_n} U_t''^{T''_n}$ est aussi une martingale, alors

$$\big(U_t'^{T'_n} U_t''^{T''_n}\big)^{T'_n \wedge T''_n} = U_t'^{T'_n \wedge T''_n} U_t''^{T'_n \wedge T''_n} = \big(U'_t U''_t\big)^{T'_n \wedge T''_n}$$

est une martingale (car martingale arrêtée) et donc $U'U''$ est une martingale locale car $T'_n \wedge T''_n \to +\infty$ ($T'_n \to +\infty$, $T''_n \to +\infty$). Par conséquent, $\langle U', U''\rangle_t = 0$.

En appliquant ce qui précède à $U' = M'^{(i)}, N'^{(i,j)}$ et à $U'' = B''$, il s'ensuit sur cet espace produit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ donné en (12.16) que B'' est un mouvement brownien et les $M'^{(i)}$ et $N'^{(i,j)}$ sont des martingales locales avec $\langle M'^{(i)}, B''^{(j)}\rangle = 0$ d'après (12.17).

Étape 3 (algèbre linéaire). On utilise maintenant des résultats élémentaires d'algèbre linéaire : on rappelle que si $c = \sigma\sigma^*$ est de rang ζ ($\leq d, m$) alors σ est aussi de rang ζ. La dégénérescence de $\sigma\sigma^*$ est la difficulté qui oblige à construire un mouvement brownien sur une extension Ω de l'espace Ω'.

Soit $c' = \sigma^*\sigma$ une matrice de taille $m \times m$ symétrique positive (de rang ζ). Elle s'écrit $c' = \Pi\Lambda\Pi^*$ où Π est orthogonale de taille $m \times m$ et Λ est diagonale avec $\Lambda_{i,i} > 0$ si $i \leq \zeta$ et $\Lambda_{i,i} = 0$ si $i > \zeta$. Soit alors Λ' la matrice diagonale avec

$$\Lambda'_{i,i} = 1/\Lambda_{i,i} \ \text{ si } i \leq \zeta \quad \text{ et } \quad \Lambda'_{i,i} = 0 \ \text{ si } i > \zeta.$$

On a $\Lambda\Lambda' = \Lambda'\Lambda = I_{m,\zeta}$ en notant $I_{m,\zeta}$ la matrice diagonale de taille $m \times m$ ayant 1 pour les ζ premiers éléments diagonaux et 0 pour les suivants. Soit enfin $\sigma' = \Lambda'\Pi^*\sigma^*$ une matrice de taille $m \times d$. On a alors

$$\sigma' c {\sigma'}^* = (\Lambda'\Pi^*\sigma^*)(\sigma\sigma^*)(\sigma\Pi\Lambda') = (\Lambda'\Pi^*)(\Pi\Lambda\Pi^*)(\Pi\Lambda\Pi^*)(\Pi\Lambda') = \Lambda'\Lambda\Lambda\Lambda' = I_{m,\zeta}. \quad (12.18)$$

Enfin comme $\Lambda = \Pi^* c' \Pi = \Pi^*\sigma^*\sigma\Pi = (\sigma\Pi)^*(\sigma\Pi)$, en regardant les termes diagonaux pour $k > \zeta$, on a $\sum_{j=1}^d (\sigma\Pi)^2_{j,k} = 0$ si $k > \zeta$. Ainsi, $(\sigma\Pi)_{j,k} = 0$ pour tout $j \in [\![1, d]\!]$ si $k > \zeta$, ce qui s'écrit encore $\sigma\Pi = \sigma\Pi I_{m,\zeta}$. Par suite, il vient :

$$\begin{aligned} \sigma\Pi\sigma' c &= \sigma\Pi(\Lambda'\Pi^*\sigma^*)(\sigma\sigma^*) = \sigma\Pi\Lambda'\Pi^*(\Pi\Lambda\Pi^*)\sigma^* \\ &= (\sigma\Pi)(\Lambda'\Lambda)\Pi^*\sigma^* = \sigma\Pi I_{m,\zeta}\Pi^*\sigma^* \\ &= \sigma\Pi\Pi^*\sigma^* = \sigma\sigma^* = c. \end{aligned} \quad (12.19)$$

Étape 4 (suffisance). On montre maintenant que la condition de la Proposition 12.7 est suffisante. Il s'agit de constuire un triplet solution $\{X, B, (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})\}$ tel que $\mathbb{P}'$ est la loi $\mathbb{P}_X$ de X.

Comme la fonction matricielle σ est borélienne sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$, il en est de même pour son rang ζ. On peut aussi vérifier qu'on peut choisir pour les matrices Π et Λ des fonctions boréliennes. De même, les fonctions Λ' et σ' sont boréliennes.
On introduit la fonction borélienne $\alpha = \sup_{i\leq m, j\leq d} |\sigma'_{i,j}|$. La fonction σ'/α étant bornée (avec la convention $0/0 = 0$), on peut définir pour tout $i = 1, \dots, m$ les intégrales

$$U_t^{(i)} = \sum_{j=1}^d \int_0^t \frac{\sigma'_{i,j}}{\alpha}(s, X'_s)\, dM_s'^{(j)}. \quad (12.20)$$

Comme par hypothèse du sens indirect ${M'}^{(i)}, {M'}^{(j)}, {M'}^{(i,j)}$ sont des martingales, le Lemme 12.9 (étape 1) assure que (12.12) : $\langle {M'}^{(i)}, {M'}^{(j)}\rangle_t = C_t'^{(i,j)}$.

On a alors

$$\begin{aligned} \langle U^{(i)}, U^{(j)}\rangle_t &= \int_0^t \sum_{k,l=1}^d \frac{\sigma'_{i,k}\sigma'_{j,l}}{\alpha^2}(s, X'_s)\, d\langle {M'}^{(k)}, {M'}^{(l)}\rangle_s \\ &= \int_0^t \sum_{k,l=1}^d \frac{\sigma'_{i,k}\sigma'_{j,l}c_{k,l}}{\alpha^2}(s, X'_s)\, ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^t \frac{(\sigma' c \sigma'^*)_{i,j}}{\alpha^2}(s, X'_s)\, ds \\ &= \delta_{i,j} \int_0^t \frac{1}{\alpha(s, X'_s)^2} \mathbf{1}_{\{\zeta(s,X'_s) \geq i\}}\, ds \end{aligned}$$

en utilisant $\sigma' c \sigma'^* = I_{m,\zeta}$ obtenue en (12.18) à l'étape 3. Cela assure que les intégrales stochastiques

$$V_t^{(i)} = \int_0^t \alpha(s, X'_s)\, dU_s^{(i)} \tag{12.21}$$

sont bien définies avec en plus

$$\langle V^{(i)}, V^{(j)} \rangle_t = \delta_{i,j} \int_0^t \mathbf{1}_{\{\zeta(s,X'_s) \geq i\}}\, ds. \tag{12.22}$$

Dans la suite, on utilise

$$\begin{aligned} \langle M'^{(i)}, V^{(j)} \rangle_t &= \int_0^t \alpha(s, X'_s)\, d\langle M'^{(i)}, U^{(j)} \rangle_s \\ &= \sum_{k=1}^d \int_0^t \alpha(s, X'_s) \frac{\sigma'_{j,k}}{\alpha}(s, X'_s)\, d\langle M'^{(i)}, M'^{(k)} \rangle_s \quad \text{(Déf. (12.20) de } U^{(j)}) \\ &= \sum_{k=1}^d \int_0^t \sigma'_{j,k}(s, X'_s)\, d\langle M'^{(i)}, M'^{(k)} \rangle_s \\ &= \int_0^t \sum_{k=1}^d \sigma'_{j,k}(s, X'_s) c_{i,k}(s, X'_s)\, ds \quad \text{(par (12.12) avec la notation (12.10))} \\ &= \int_0^t (c\sigma'^*)_{i,j}(s, X'_s)\, ds. \end{aligned} \tag{12.23}$$

On rappelle que B'' est un mouvement brownien sur Ω et qu'il est indépendant de l'espace facteur Ω'. Pour $i \leq m$, on définit les $\mathbb{P}$-martingales locales à trajectoires continues suivantes

$$Z_t^{(i)} = V_t^{(i)} + \int_0^t \mathbf{1}_{\{\zeta(s,X'_s) < i\}}\, dB_s''^{(i)} \quad \text{et} \quad B_t^{(i)} = \sum_{k=1}^m \int_0^t \Pi_{i,k}(s, X'_s)\, dZ_s^{(k)}. \tag{12.24}$$

Noter que, par indépendance sur les espaces facteurs Ω' et Ω'' comme en (12.17), on a $\langle M'^{(i)}, B''^{(k)} \rangle = 0$ et donc par (12.20), il vient $\langle U^{(i)}, B''^{(k)} \rangle = 0$ puis par (12.21) aussi $\langle V^{(i)}, B''^{(k)} \rangle = 0$. Avec (12.22) et $\langle B''^{(i)}, B''^{(j)} \rangle_t = \delta_{i,j} t$ (mouvements browniens indépendants), on obtient

$$\begin{aligned} \langle Z^{(i)}, Z^{(j)} \rangle_t &= \langle V^{(i)}, V^{(j)} \rangle_t + \delta_{i,j} \int_0^t \mathbf{1}_{\{\zeta(s,X'_s) < i\}}\, ds \\ &= \delta_{i,j} \int_0^t \mathbf{1}_{\{\zeta(s,X'_s) \geq i\}}\, ds + \delta_{i,j} \int_0^t \mathbf{1}_{\{\zeta(s,X'_s) < i\}}\, ds = \delta_{i,j} t, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\langle B^{(i)}, B^{(j)}\rangle_t &= \sum_{k,l=1}^m \int_0^t (\Pi_{i,k}\Pi_{j,l})(s, X'_s) d\langle Z^{(k)}, Z^{(l)}\rangle_s \\
&= \sum_{k=1}^m \int_0^t (\Pi_{i,k}\Pi_{j,k})(s, X'_s)\, ds \\
&= \int_0^t (\Pi\Pi^*)_{i,j}(s, X'_s)\, ds = \delta_{i,j} t
\end{aligned}$$

puisque $\Pi\Pi^* = I_m$. Par conséquent, Z et B sont des $(\mathcal{F}_t)$-mouvements browniens m-dimensionnels (Théorème 7.9 (Lévy)). En particulier, B est le mouvement brownien cherché sur Ω pour résoudre l'EDS $E(a, \sigma)$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ comme en (12.2). Pour le voir, on considère les processus pour $i \in [\![1, d]\!]$:

$$\begin{aligned}
Y_t^{(i)} &= X_t^{\prime(i)} - x^{(i)} - \int_0^t a_i(s, X'_s)\, ds - \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{i,j}(s, X'_s)\, dB_s^{(j)} \\
&= M_t^{\prime(i)} - \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{i,j}(s, X'_s)\, dB_s^{(j)}.
\end{aligned}$$

Ce sont des martingales locales á trajectoires continues nulles en 0 et il s'agit de voir qu'elles sont indistinguables de 0 pour établir que $X' = (X'^{(1)}, \dots, X'^{(d)})$ est solution de $E(a, \sigma)$ comme en (12.2). Comme $Y_0^{(i)} = 0$, on le montre en établissant ci-dessous que le crochet $\langle Y^{(i)}, Y^{(i)}\rangle_t$ est identiquement nul.

On a

$$\begin{aligned}
\langle Y^{(i)}, Y^{(i)}\rangle_t &= \langle M'^{(i)}, M'^{(i)}\rangle_t + \sum_{k,l=1}^m \int_0^t \sigma_{i,k}(s, X'_s)\sigma_{i,l}(s, X'_s)\, d\langle B^{(k)}, B^{(l)}\rangle_s \\
&\quad -2\sum_{k=1}^m \int_0^t \sigma_{i,k}(s, X'_s) d\langle M'^{(i)}, B^{(k)}\rangle_s. \qquad (12.25)
\end{aligned}$$

D'abord, avec (12.11) et (12.10), on a

$$\langle M'^{(i)}, M'^{(i)}\rangle_t = \int_0^t c_{i,i}(s, X'_s)\, ds. \qquad (12.26)$$

Ensuite, pour le deuxième terme de (12.25), on a :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k,l=1}^m \int_0^t \sigma_{i,k}(s, X'_s)\sigma_{i,l}(s, X'_s)\, d\langle B^{(k)}, B^{(l)}\rangle_s \\
&= \sum_{k=1}^m \int_0^t \sigma_{i,k}^2(s, X'_s)\, ds = \int_0^t \sum_{k=1}^m \sigma_{i,k}^2(s, X'_s)\, ds = \int_0^t c_{i,i}(s, X'_s)\, ds. \qquad (12.27)
\end{aligned}$$

Puis pour le troisième terme de (12.25) : d'abord, comme $\langle M'^{(i)}, B''^{(k)}\rangle \equiv 0$, on a par définition de B'' puis de $Z_k^{(i)}$ en (12.24) :

$$\begin{aligned}
\langle M'^{(i)}, B^{(j)}\rangle_t &= \sum_{k=1}^m \int_0^t \Pi_{j,k}(s,X'_s)\, d\langle M'^{(i)}, Z^{(k)}\rangle_s \\
&= \sum_{k=1}^m \int_0^t \Pi_{j,k}(s,X'_s)\Big(d\langle M'^{(i)}, V^{(k)}\rangle_s + \mathbf{1}_{\{\zeta(s,X'_s)<k\}}\, d\langle M'^{(i)}, B''^{(k)}\rangle_s\Big) \\
&= \sum_{k=1}^m \int_0^t \Pi_{j,k}(s,X'_s)\, d\langle M'^{(i)}, V^{(k)}\rangle_s \\
&= \sum_{k=1}^m \int_0^t (\Pi_{j,k}(c\sigma'^*)_{i,k})(s,X'_s)\, ds \quad \text{(d'après (12.23))} \\
&= \int_0^t (c\sigma'^*\Pi^*)_{i,j}(s,X'_s)\, ds. \qquad (12.28)
\end{aligned}$$

Et donc le dernier terme de (12.25) s'écrit avec (12.28) :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^m \int_0^t \sigma_{i,k}(s,X'_s) d\langle M'^{(i)}, B^{(k)}\rangle_s &= \sum_{k=1}^m \int_0^t \sigma_{i,k}(s,X'_s)(c\sigma'^*\Pi^*)_{i,k}(s,X'_s)\, ds \\
&= \int_0^t (c\sigma'^*\Pi^*\sigma^*)_{i,i}(s,X'_s)\, ds \\
&= \int_0^t c_{i,i}(s,X'_s)\, ds \qquad (12.29)
\end{aligned}$$

car par symétrie de c et avec (12.19) obtenu dans l'étape 3

$$c\sigma'^*\Pi^*\sigma^* = c^*\sigma'^*\Pi^*\sigma^* = (\sigma\Pi\sigma' c)^* = c^* = c.$$

Finalement avec (12.26), (12.27) et (12.29), (12.25) s'écrit

$$\langle Y^{(i)}, Y^{(i)}\rangle_t = \int_0^t c_{i,i}(s,X'_s)\, ds + \int_0^t c_{i,i}(s,X'_s)\, ds - 2\int_0^t (\sigma\Pi\sigma' c)_{i,i}(s,X'_s)\, ds = 0.$$

Comme en plus $Y_0^{(i)} = 0$ $\mathbb{P}$-ps, on en déduit que $Y^{(i)}$ est $\mathbb{P}$-indistinguable de 0. Cela signifie que X' considéré comme processus sur l'extension $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ est solution de l'EDS $E(a,\sigma)$ relativement au mouvement brownien B construit en (12.24).

Comme par construction $\mathbb{P}'$ est la loi de X' (puisqu'il s'agit du processus canonique), cela signifie aussi que $\mathbb{P}'$ est mesure-solution de l'EDS $E(a,\sigma)$ et on a le résultat cherché, achevant de prouver la Proposition 12.7. □

Ci-dessous, on justifie que sous de bonnes conditions, on peut construire la solution faible directement sur l'espace canonique $\Omega' = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ sans étendre l'espace Ω' en $\Omega = \Omega' \times \Omega''$, comme on l'a fait dans la preuve de la Proposition 12.7.

Corollaire 12.10 *On considère l'EDS $E(a,\sigma)$ avec $m = d$. On suppose l'hypothèse (loc) satisfaite et on suppose en plus que la fonction σ est inversible d'inverse σ^{-1} localement borné. Il existe une probabilité $\mathbb{P}'$ mesure-solution sur $(\Omega', \mathcal{F}') = (C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d), \mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)))$ si et seulement s'il existe un $(\mathcal{F}'_t)$-mouvement brownien d-dimensionnel B' sur $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ tel que X' soit solution faible de $E(a,\sigma)$ relativement à B', et de loi $\mathbb{P}' = \mathbb{P}_X$.*

Démonstration : Le sens indirect est immédiat puisqu'alors $\{X', B', (\Omega', \mathcal{F}', (\mathcal{F}'_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}')\}$ est solution faible et donc $\mathbb{P}' = \mathbb{P}_X$ est mesure-solution.

Pour le sens direct, on construit un triplet solution directement sur $(\Omega', \mathcal{F}')$. On reprend l'étape 4 de la preuve précédente mais sans les étapes 2 et 3 qui ne sont plus nécessaires. En effet dans l'étape 4 de la preuve de la Proposition 12.7, comme par hypothèse σ est inversible, on peut prendre presque sûrement $\zeta(x,t) = m$ et $\Lambda' = \Lambda^{-1}$.

Avec $\zeta(x,t) = m$ et $\Lambda' = \Lambda^{-1}$, les définitions en (12.24) se spécialisent en $Z^{(i)} = V^{(i)}$ et donc B ne dépend pas de B''. C'est donc un mouvement brownien directement sur $(\Omega', \mathcal{F}', (\mathcal{F}'_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}')$ (et pas seulement sur Ω comme dans l'étape 4 de la Proposition 12.7). En d'autres termes, on n'a pas besoin d'introduire l'espace auxiliaire Ω'' et les processus $Y^{(i)}$ sont définis sur Ω' également. On construit alors la solution faible directement avec $B' = B$ sur Ω'. □

12.3 Unicité faible avec problème de martingale

On prouve maintenant le Théorème de Yamada-Watanabe énoncé au Chapitre 9 (Théorème 9.5) : on considère l'EDS

$$dX_t = a(t, X_t)\,dt + \sigma(t, X_t)\,dB_t \tag{12.30}$$

où $a : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$, $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times m}$ sont boréliennes et B est un mouvement brownien (standard) m-dimensionnel.

Théorème 12.11 (Yamada-Watanabe (1971)) *On suppose que les coefficients a, σ vérifient (loc).*

(1) L'unicité trajectorielle implique l'unicité faible.

(2) Toute solution sur un espace quelconque $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ relativement à un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien B est en fait adaptée à la filtration $(\mathcal{F}^B_t)_{t\geq 0}$ engendrée par ce mouvement brownien (ie. X est solution forte).

La réciproque du Théorème 12.11 est fausse comme déjà vu dans le contre-exemple de l'Exemple 9.4 justifiant qu'il peut y avoir existence et unicité faibles sans qu'il y ait unicité trajectorielle.

Pour prouver le Théorème 12.11, on commence par deux résultats préliminaires associé à une solution X de l'EDS (12.30) sur un espace $(\Omega_0, \mathcal{F}_0, (\mathcal{F}^0)_t, \mathbb{P}_0)$ avec un mouvement brownien B^0.

On considère

— l'espace des fonctions continues d-dimensionnelles munies la filtration $(\mathcal{F}'_t)_{t\geq 0}$ engendrée par le processus canonique $X'_t(\omega) = \omega'(t)$, $t \geq 0$:

$$(\Omega', \mathcal{F}', (\mathcal{F}''_t)_{t\geq 0}) = \Big(C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d), \mathcal{B}\big(C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)\big), (\sigma(\omega'(s) : s \leq t))_{t\geq 0}\Big);$$

— l'espace de Wiener m-dimensionnel

$$(\Omega'', \mathcal{F}'', (\mathcal{F}''_t), \mathbb{P}'') = \Big(C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m), \mathcal{B}\big(C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m)\big), (\sigma(\omega''(s) : s \leq t))_{t\geq 0}, \mathbb{P}''\Big)$$

où $\mathbb{P}''$ est l'unique probabilité faisant de $B''_t(\omega) = \omega''(t)$, $t \geq 0$ un mouvement brownien.

On pose alors

$$\overline{\Omega} = \Omega' \times \Omega'', \quad \overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F}' \otimes \mathcal{F}'', \quad \overline{\mathcal{F}}_t = \bigcap_{s>t} \big(\mathcal{F}'_s \otimes \mathcal{F}''_s\big). \tag{12.31}$$

Comme précédemment (cf. étape 2 de la preuve du Théorème 12.8), toute variable U' sur Ω' ou U'' sur Ω'' se prolonge avec la même notation sur $\overline{\Omega}$ par

$$U'(\omega', \omega'') = U'(\omega'), \quad U''(\omega', \omega'') = U''(\omega'').$$

Étant donnée une solution X de l'EDS (12.30) sur un espace $(\Omega_0, \mathcal{F}_0, (\mathcal{F}^0)_t, \mathbb{P}_0)$ avec un mouvement brownien B^0, on note $\mathbb{P}_0$ la loi du couple (X, B) sur $\overline{\Omega} = \Omega' \times \Omega'$, c'est à dire l'image de $\mathbb{P}_0$ sur $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}})$ par l'application $\Psi : \Omega_0 \to \overline{\Omega}$ définie par $\Psi(\omega)(t) = (X_t(\omega), B_t(\omega))$ lorsque les trajectoires $t \mapsto X_t(\omega)$ et $t \mapsto B_t(\omega)$ sont continues et par $\Psi(\omega)(t) = (0, 0)$ (par exemple) sinon sur l'ensemble $\mathbb{P}$-négligeable N où ce n'est pas vrai. La première marginale de $\overline{\mathbb{P}}$ est la mesure-solution $\mathbb{P}_0 \circ X^{-1}$ de l'EDS (12.30) ($\overline{\mathbb{P}}(A' \times \Omega'') = \mathbb{P}'(A')$), et la seconde marginale est $\mathbb{P}''$ (car B^0 est un mouvement brownien, $\overline{\mathbb{P}}(\Omega' \times A'') = \mathbb{P}''(A'')$). Les deux marginales ne sont pas indépendantes, et comme $\Omega'' = C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m)$ est un espace polonais, on peut désintégrer $\overline{\mathbb{P}}$ selon $\mathbb{P}''$ par un noyau de probabilité Q de $(\Omega'', \mathcal{F}'')$ dans $(\Omega', \mathcal{F}')$, unique aux $\mathbb{P}''$-négligeables près :

$$\overline{\mathbb{P}}(d\omega', d\omega'') = \mathbb{P}''(d\omega'')Q(\omega'', d\omega'). \tag{12.32}$$

En particulier, la probabilité $\mathbb{P}'$ qui en découle sur Ω' s'obtient par

$$\mathbb{P}'(d\omega') = \int_{\Omega''} Q(\omega'', d\omega')\mathbb{P}''(d\omega''). \tag{12.33}$$

À l'instar du Lemme 12.6, le résultat suivant transfère des propriétés de martingales de Ω' ou Ω'' à $\overline{\Omega}$:

Lemme 12.12 *Sous les hypothèses précédentes, les processus $M'^{(i)}$ et $N'^{(i,j)}$ en (12.11) et*

$$U'^{(i,j)} = M'^{(i)}_t B''^{(j)}_t - \int_0^t \sigma_{i,j}(s, X'_s)\, ds \tag{12.34}$$

pour $i = 1, \dots, d$ et $j = 1 \dots, m$, sont des $\overline{\mathbb{P}}$-martingales. De plus, pour tout $A \in \overline{\mathcal{F}_t}$, la variable aléatoire

$$Q\mathbf{1}_A(\omega'') = \int_{\Omega'} \mathbf{1}_A(\omega', \omega'') Q(\omega'', d\omega') \tag{12.35}$$

est $\overline{\mathbb{P}}$-ps égale à une variable aléatoire $\mathcal{F}''_t$-mesurable.

Démonstration : L'assertion concernant les processus $M'^{(i)}$ et $N'^{(i,j)}$ se montre exactement comme dans les Lemme 12.6 et Lemme 12.9. La démonstration pour $U'^{(i,j)}$ est analogue lorsqu'on remarque que les processus

$$U^{(i,j)} = M_t^{(i)} B_t^{(j)} - \int_0^t \sigma_{i,j}(s, X_s)\, ds$$

sont des $\mathbb{P}$-martingales locales avec $U^{(i,j)} = U'^{(i,j)} \circ \Psi$ comme dans le Lemme 12.6.

Pour la seconde assertion, comme la filtration $(\mathcal{F}''_t)_{t \geq 0}$ est continue à gauche, par un argument de classe monotone, il suffit de la voir pour $A = A' \times A''$, avec $A' \in \mathcal{F}'_t$ et $A'' \in \mathcal{F}''_t$. Dans ce cas, on a $Q\mathbf{1}_A(\omega'') = \mathbf{1}_{A''}(\omega'') Q(\omega'', A')$ donc en fait il suffit de montrer que $Q(\cdot, A')$ est $\mathcal{F}''_t$-mesurable si $A' \in \mathcal{F}'_t$. Cela revient à montrer que [1]

$$\mathbb{E}''\big[\mathbf{1}_B Q(\cdot, A')\big] = \mathbb{E}''\big[Q(\cdot, A')\mathbb{P}''(B|\mathcal{F}''_t)\big] \tag{12.36}$$

pour tout $B \in \mathcal{F}''$, ou même, par un autre argument de classe monotone, pour $B = C \cap D$ avec $C \in \mathcal{F}''_t$ et $D \in \mathcal{F}''^{(t)} = \sigma(B''_r - B''_t : r \geq t)$. Étant donné (12.32) et comme les tribus $\mathcal{F}''_t$ et $\mathcal{F}''^{(t)}$ sont indépendantes sous $\mathbb{P}''$ (car B'' est un mouvement brownien) donc $\mathbb{P}''(B|\mathcal{F}''_t) = \mathbb{P}''(D)\mathbf{1}_C$, compte tenu de la définition de $\overline{\mathbb{P}}$ en (12.32),on a :

$$\mathbb{E}''[\mathbf{1}_B Q(\cdot, A')] = \int \mathbf{1}_B(\omega'')\mathbf{1}_A(\omega') Q(\omega'', d\omega')\mathbb{P}''(d\omega'') = \overline{\mathbb{P}}(A' \times B),$$

et comme $\mathbb{P}''(B|\mathcal{F}''_t) = \mathbb{P}''(C \cap D|\mathcal{F}''_t) = \mathbf{1}_C \mathbb{P}''(D)$,

$$\mathbb{E}''\big[Q(\cdot, A')\mathbb{P}''(B|\mathcal{F}''_t)\big] = \int Q(\omega'', A')\mathbf{1}_C(\omega'')\mathbb{P}''(D)\mathbb{P}''(d\omega'') = \overline{\mathbb{P}}(A' \times C)\mathbb{P}''(D)$$

(12.36) est alors équivalent à :

$$\overline{\mathbb{P}}\big(A' \times (C \cap D)\big) = \overline{\mathbb{P}}(A' \times C)\mathbb{P}''(D). \tag{12.37}$$

Le membre de gauche ci-dessus est $\mathbb{P}\big(\Psi^{-1}(A' \times (C \cap D))\big)$. Mais à l'ensemble négligeable N près, $\Psi^{-1}(A' \times (C \cap D))$ est $A_0 \cap A_1$ où

— A_0 est l'ensemble $\mathcal{F}_t$-mesurable où le couple de trajectoires $(X.(\omega), B.(\omega))$ est dans $A \times C$;

1. Par approximation, il suffit de montrer que si pour tout $B \in \mathcal{F}$, on a $\mathbb{E}[\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A \mathbb{P}(B|\mathcal{G})]$ alors $A \in \mathcal{G}$. Pour cela, avec $B = A$, on a $\mathbb{E}[\mathbf{1}_A(1 - \mathbb{P}(A|\mathcal{G}))] = 0$ ce qui donne $\mathbf{1}_A(1 - \mathbb{P}(A|\mathcal{G})) = 0$ ps et donc $\mathbb{P}(A|\mathcal{G}) = 1$ sur A, soit $\mathbb{P}(A|\mathcal{G}) \geq \mathbf{1}_A$ et donc $\mathbb{P}(A|\mathcal{G}) = \mathbf{1}_A$ en constatant que les espérances se valent. La variable aléatoire $\mathbf{1}_A$ est donc $\mathcal{G}$-mesurable et $A \in \mathcal{G}$.

— A_1 est l'ensemble des w tels que la trajectoire $B_\cdot(\omega)$ est dans D. Ainsi, A_1 est dans la tribu engendrée par $\sigma(B_r - B_t : r \geq t)$ et est donc indépendant de $\mathcal{F}_t$.

Par suite, le membre de gauche de (12.37) vaut $\mathbb{P}(A_0)\mathbb{P}(A_1)$. Un raisonnement analogue montre que le membre de droite de (12.37) vaut aussi $\mathbb{P}(A_0)\mathbb{P}(A_1)$, ce qui prouve le Lemme 12.12. □

Lorsqu'on a deux solutions faibles de l'EDS (12.30)

$$\big\{X_1,\ B_1,\ (\Omega_1, \mathcal{F}_1, (\mathcal{F}_t^1)_{t\geq 0}, \mathbb{P}_1)\big\} \quad \text{et} \quad \big\{X_2,\ B_2,\ (\Omega_2, \mathcal{F}_2, (\mathcal{F}_t^2)_{t\geq 0}, \mathbb{P}_2)\big\}$$

on mélange ci-dessous les outils associés ci-dessus à chacune de ces solutions. Les lois $\mathbb{P}_1' = \mathbb{P}_1 \circ X_1^{-1}$ et $\mathbb{P}_2' = \mathbb{P}_2 \circ X_2^{-1}$ sont mesures-solutions de (12.30). À chaque $\mathbb{P}_i'$, $i = 1, 2$, on associe comme ci-dessus une probabilité $\overline{\mathbb{P}}_i$ sur la même extension $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}}, (\overline{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0})$ en (12.31). La probabilité $\overline{\mathbb{P}}_i$ a pour seconde marginale $\mathbb{P}''$, et se désintégre selon (12.32) avec un noyau de probabilité Q_i qui permet de retrouver $\mathbb{P}_i'$ par (12.33).

On considère alors la super extension donnée par l'espace produit

$$\Omega = \Omega' \times \Omega' \times \Omega'', \quad \mathcal{F} = \mathcal{F}' \otimes \mathcal{F}' \otimes \mathcal{F}'', \quad \mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \big(\mathcal{F}_s' \otimes \mathcal{F}_s' \otimes \mathcal{F}_s''\big) \tag{12.38}$$

muni de la probabilité

$$\mathbb{P}(d\omega_1', d\omega_2', d\omega'') = Q_1(\omega'', d\omega_1') Q_2(\omega'', d\omega_2') \mathbb{P}''(d\omega''). \tag{12.39}$$

Noter qu'une variable U'' sur Ω'' admet une (seule) extension sur Ω notée de la même façon ($U''(\omega_1', \omega_2', \omega'') = U''(\omega'')$), tandis qu'une fonction U sur $\overline{\Omega}$ admet deux extensions différentes notées

$$U(1)(\omega_1', \omega_2', \omega'') = U(\omega_1', \omega''), \quad U(2)(\omega_1', \omega_2', \omega'') = U(\omega_2', \omega'').$$

Lemme 12.13 *Si M est une martingale locale à trajectoires continues sur $\big(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}}, (\overline{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}, \overline{\mathbb{P}}_i\big)$, son extension $M(i)$ est une martingale sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$.*

Démonstration : On montre le résultat pour $i = 1$. Quitte à localiser par un arrêt, on peut considérer que la martingale locale M est bornée et est donc une vraie martingale. Il s'agit alors de montrer que si $s \leq t$ alors pour tout $A \in \mathcal{F}_s$, on a

$$\mathbb{E}\big[M(1)_t \mathbf{1}_A\big] = \mathbb{E}\big[M(1)_s \mathbf{1}_A\big]. \tag{12.40}$$

Par un argument de classe monotone et continuité à droite, il suffit même de considérer $A = A_1 \times A_2 \times A''$ avec $A_i \in \mathcal{F}_s'$ et $A'' \in \mathcal{F}_s''$. Dans ce cas par la définition de $\mathbb{P}$ en (12.39), et de $\overline{\mathbb{P}}_1$ en (12.32), on a

$$\mathbb{E}\big[M(1)_t \mathbf{1}_A\big] \;=\; \int \mathbf{1}_{A_1}(w_1')\mathbf{1}_{A_2}(w_2')\mathbf{1}_{A''}(\omega'') M_t(\omega_1', \omega'')\, Q_1(\omega'', d\omega_1') Q_2(\omega'', d\omega_2') \mathbb{P}''(d\omega'')$$

$$\begin{aligned}
&= \int\int \big(Q_2(\omega'', A_2)\mathbf{1}_{A''}(\omega'')\big)\mathbf{1}_{A_1}(\omega_1')M_t(\omega_1', \omega'')\mathbb{P}''(d\omega'')Q_1(\omega'', d\omega_1')\\
&= \overline{\mathbb{E}}_1\big[\mathbf{1}_{A''}Q_2(\cdot, A_2)\mathbf{1}_{A_1}M_t\big] = \overline{\mathbb{E}}_1\big[\mathbf{1}_{A''}Q_2(\cdot, A_2)\mathbf{1}_{A_1}M_s\big]
\end{aligned}$$

où la dernière égalité vient de ce que $Q_2(\cdot, A_2)$ est $\mathcal{F}_s''$-mesurable, par le Lemme 12.12 puisque $A_2'' \in \mathcal{F}_s''$. Le même calcul en partant de $\mathbb{E}[M(1)_s\mathbf{1}_A]$ aboutit au même résultat, prouvant (12.40). □

À l'aide des Lemme 12.12 et Lemme 12.13, on donne maintenant la preuve du théorème de Yamada-Watanabe (Théorème 12.11).

Démonstration :[Théorème 12.11] Comme juste précédemment, on suppose que $\mathbb{P}_1'$ et $\mathbb{P}_2'$ sont deux mesures-solutions, et on reprend les notations de ci-dessus. Par applications des Lemme 12.12 et Lemme 12.13, on voit que les processus $M'^{(i)}(k)$, $N'^{(i,j)}(k)$, $U'^{(i,j)}(k)$ sont des martingales locales à trajectoires continues et nulles en 0 sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ en (12.38)–(12.39) pour $k = 1, 2$. En particulier, on a

$$\langle M'^{(i)}(k), M'^{(j)}(k)\rangle_t = \int_0^t c_{i,j}(s, X'(k)_s)\, ds$$

et

$$\langle M'^{(i)}(k), B''^{(j)}(k)\rangle_t = \int_0^t \sigma_{i,j}(s, X'(k)_s)\, ds.$$

Par suite, B'' est un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien pour $\mathbb{P}$, et si on pose

$$\begin{aligned}
Y^{(i)}(k)_t &= X^{(i)}(k)_t - x_0^{(i)} - \int_0^t a_i(s, X'(k)_s)\, ds - \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{i,j}(s, X'(k)_s)\, dB_s''^{(j)}\\
&= M'^{(i)}(k)_t - \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{i,j}(s, X'(k)_s)\, dB_s''^{(j)},
\end{aligned}$$

on vérifie immédiatement pour cette martingale locale que

$$\begin{aligned}
\langle Y^{(i)}(k), Y^{(i)}(k)\rangle_t &= \langle M'^{(i)}(k), M'^{(i)}(k)\rangle_t - 2\left\langle M'^{(i)}(k), \sum_{j=1}^m \int_0^\cdot \sigma_{i,j}(s, S'(k)_x)\, dB_s''^{(j)}\right\rangle_t\\
&\quad + \left\langle \sum_{j=1}^m \int_0^\cdot \sigma_{i,j}(s, X'(k)_s)\, dB_s''^{(j)}, \sum_{j=1}^m \int_0^\cdot \sigma_{i,j}(s, X'(k)_s)\, dB_s''^{(j)}\right\rangle_t\\
&= \int_0^t c_{i,i}(s, X'(k)_s)\, ds - 2\sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{i,j}(s, S'(k)_x)\sigma_{i,j}(s, X'(k)_s)\, ds\\
&\quad + \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{i,j}(s, X'(k)_s)^2\, ds
\end{aligned}$$

$$= \quad 0,$$

par définition de $c_{i,j}$ en(12.3). Il s'ensuit que $Y^{(i)}(k) = 0$ et donc $X'(k)$ est solution de l'EDS (12.30) sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ relativement au mouvement brownien B''.

On applique alors l'hypothèse d'unicité trajectorielle : les deux processus $X'(1)$ et $X'(2)$ sont $\mathbb{P}$-indistinguables. En d'autres termes, $\mathbb{P}(\omega_1' \neq \omega_2') = 0$. Par suite, étant donné la définition de $\mathbb{P}$ en (12.39),

$$0 = \mathbb{P}(\omega_1' \neq \omega_2') = \int\int\int \mathbf{1}_{\{\omega_1' \neq \omega_2'\}}\, Q_1(\omega'', d\omega_1') Q_2(\omega'', d\omega_2') \mathbb{P}''(d\omega'')$$

soit pour $\mathbb{P}''$-presque chaque ω'' en dehors d'un négligeable N, on a

$$0 = \int\int \mathbf{1}_{\{\omega_1' \neq \omega_2'\}}\, Q_1(\omega'', d\omega_1') Q_2(\omega'', d\omega_2') = \int Q_1(\omega'', \{\omega_2'\}^c)\, Q_2(\omega'', d\omega_2').$$

On a donc $Q_1(\omega'', \{\omega_2'\}^c) = 0$ pour $Q_2(\omega'', \cdot)$-presque tout ω_2'. Comme Q_1 est une probabilité, pour $\omega'' \notin N$, il s'agit d'une masse de Dirac,

$$Q_1(\omega'', \cdot) = \delta_{f(\omega'')}(d\omega_1'), \tag{12.41}$$

pour une certaine application $f : \Omega'' \to \Omega'$. Il en est de même avec Q_2 : pour une certaine application $g : \Omega'' \to \Omega'$:

$$Q_2(\omega'', \cdot) = \delta_{g(\omega'')}(d\omega_2').$$

Les deux applications f et g sont $\mathbb{P}''$-ps égales puisque par (12.39), on a

$$\begin{aligned} 1 \quad &= \quad \mathbb{P}(\omega_1' = \omega_2') = \int \mathbf{1}_{\{\omega_1' = \omega_2'\}} Q_1(\omega'', d\omega_1') Q_2(\omega'', d\omega_2') \mathbb{P}''(d\omega'') \\ &= \quad \int \mathbf{1}_{\{\omega_1' = \omega_2'\}} \delta_{f(\omega'')}(\omega_1') \delta_{g(\omega'')}(\omega_2') \mathbb{P}''(d\omega'') = \mathbb{P}''(f(\omega'') = g(\omega'')). \end{aligned}$$

Par suite, $Q_1(\omega'', \cdot) = Q_2(\omega'', \cdot)$ si $\omega'' \notin N$ et donc $\mathbb{P}_1' = \mathbb{P}_2'$ par leur expressions en (12.33), prouvant l'unicité faible cherchée.

De plus, de (12.41), on a $X' = f(B'')$ $\overline{\mathbb{P}}_1$-ps et il est clair que $\omega'' \mapsto f(\omega'')_t$ est $\mathcal{F}_t''$-mesurable : par suite, sous $\mathbb{P}_1'$, le processus solution X' est en fait adapté à la filtration engendrée par B''.

Si maintenant, on considère une solution X relative à un mouvement brownien B sur un espace de probabilité quelconque, la loi du couple (X, B) est $\overline{\mathbb{P}}_1$ comme en (12.32) et comme $X' = f(B'')$ $\mathbb{P}_1'$-ps, il en découle que $X = f(B)$ ps sur l'espace sur lequel ces processus sont définis. Ainsi, X est adapté à $(\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}$, c'est à dire la solution est forte. □

Bibliographie

[App] David Applebaum. *Lévy Processes and Stochastic Calculus*. Cambridge series in advanced mathematics, vol. 93, 2004.

[BC] Bernard Bercu, Djalil Chafaï. *Modélisation stochastique et simulation*. Dunod, 2007.

[JCB-mesure] Jean-Christophe Breton. *Intégrale de Lebesgue*. Notes de cours, L3 Mathématiques, Université de Rennes 1, 2016.

[JCB-proba] Jean-Christophe Breton. *Fondement des probabilités*. Notes de cours, L3 Mathématiques, Université de Rennes 1, 2014.

[JCB-discret] Jean-Christophe Breton. *Processus discrets*. Notes de cours, M1 Mathématiques, Université de Rennes, 2022.

[JCB-proc] Jean-Christophe Breton. *Processus stochastiques*. Notes de cours, M2 Mathématiques, Université de Rennes, 2024.

[JCB-stoch] Jean-Christophe Breton. *Calcul stochastique*. Notes de cours, M2 Mathématiques, Université de Rennes, 2024.

[Bil2] Patrick Billingsley. *Convergence of Probability Measures*. 2nd Edition, Wiley series in probabilities and mathematical statistics, 1999.

[Chung] Kai Lai Chung. *A Course in Probability Theory*. 3rd Edition, Academic Press, 2001.

[CM] Francis Comets, Thierry Meyre. *Calcul stochastique et modèles de diffusions*. Dunod, 2006.

[CT] Rama Cont, Peter Tankov. *Financial Modelling with Jump Processes*. Chapman & Hall, 2003.

[Dav] Youri Davydov. *Cours de DEA "Processus stochastiques"*. Université Lille 1, 1999.

[DM] Claude Dellacherie, Pierre-André Meyer. *Probabilités et potentiels*. Hermann, 1975.

[EGK] Nicole El Karoui, Emmanuel Gobet, Etienne Pardoux. *Introduction au calcul stochastique*. École Polytechnique, 2001.

[Fel] William Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Vol. 1. 3rd Edition, Wiley series in probabilities and mathematical statistics, 1968.

[Gal] Léonard Gallardo. *Mouvement brownien et calcul d'Itô*. Coll. Méthodes mathématiques. Ed. Hermann. 2008.

[Gué] Hélène Guérin. *Processus à temps continu*. Notes de cours, M2 Mathématiques, Université de Rennes 1, 2009.

[Kal] Olav Kallenberg. *Foundations of Modern Probability*. 2nd Edition, Springer Series in Statistics. Probability and its Applications, 2002.

[KS] Ioannis Karatzas, Steven E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer, 1987.

[Kin] John Kingman. *Poisson Processes*. Oxford University Press, 1993.

[LG0] Jean-François Le Gall. *Introduction au mouvement brownien*. Gazette des Mathématiciens, vol. 40, 1989.

[LG1] Jean-François Le Gall. *Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique*. Spinger, Coll. Mathématiques et applications, vol. 71, 2013.

[Lif] Michel Lifshits. *Gaussian Random Functions*, Kluwer, 1995.

[Mal] Florent Malrieu. *Processus de Markov et inégalités fonctionnelles*. Notes de cours de Master 2, 2006.

[Pro] Philipp Protter. *Stochastic Integration and Differential Equations*. Springer, 1995.

[RY] Daniel Revuz, Marc Yor. *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Springer, 1991.en

[Tud] Ciprian Tudor. *Cours de calcul stochastique*. Notes de cours M2 Mathématiques, Université Lille 1, 2011.