

Le théorème de représentation de Kolmogorov

L'énoncé suivant fut démontré par Kolmogorov en 1957 dans le cadre de questions associées au treizième problème de Hilbert. Il affirme que toute fonction continue de plusieurs variables peut se 'décomposer' à l'aide de fonctions continues d'une seule variable et de l'opération d'addition. La démonstration qu'on en donne est due à Kahane [1] et montre que 'presque tout' $(2n + 1)$ uplet de fonctions d'une variable peut servir de référence dans la décomposition. Ce 'presque tout' provient de l'utilisation du théorème de Baire.

On note Φ l'ensemble des fonctions continues φ de $[0, 1]$ dans lui-même telles que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = 1$. On munit Φ de la topologie de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des éléments distincts de l'intervalle ouvert $(0, 1)$.

Théorème – Il existe un ensemble dense de Φ^{2n+1} telle que pour chaque élément $(\varphi_1, \dots, \varphi_{2n+1})$ de cet ensemble dense, toute fonction continue $f : [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}$ se représente sous la forme

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{q=1}^{2n+1} g \left(\sum_{p=1}^n \lambda_p \varphi_q(x_p) \right), \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n,$$

pour une certaine fonction continue $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

Démonstration – Fixons un paramètre $0 < a < \frac{1}{2(n+1)}$. Pour chaque fonction continue $h : [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}$ notons $\Omega(h) \subset \Phi^{2n+1}$ l'ensemble des fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_{2n+1}$ de Φ pour lesquelles il existe $g \in C([0, 1], \mathbb{R})$ telle que

$$\|g\|_\infty \leq \|h\|_\infty, \text{ et } \left| h(x_1, \dots, x_n) - \sum_{q=1}^{2n+1} g \left(\sum_{p=1}^n \lambda_p \varphi_q(x_p) \right) \right| < (1-a)\|h\|_\infty, \quad \forall x \in [0, 1]^n.$$

• L'ensemble $\Omega(h)$ est un ouvert dont on montrera qu'il est dense dans Φ^{2n+1} . Pour une famille dénombrable dense \mathcal{H} de $C([0, 1]^n, \mathbb{R})$ l'ensemble $\bigcap_{h \in \mathcal{H}} \Omega(h)$ sera donc encore dense dans Φ^{2n+1} – c'est Baire ! Prenons $(\varphi_1, \dots, \varphi_{2n+1})$ dans $\bigcap_{h \in \mathcal{H}} \Omega(h)$ et posons pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$

$$\chi_q(x_1, \dots, x_n) := \sum_{p=1}^n \lambda_p \varphi_q(x_p) \tag{1}$$

On construira alors par récurrence des suites $h_i \in \mathcal{H}$ et $f_i, g_i \in C([0, 1], \mathbb{R})$ telles qu'on a d'abord $f_0 := f$ et $\|h_0\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, et $\|f - h_0\|_\infty \leq \frac{a}{2}\|f\|_\infty$, et $g_0 \in \Omega(h_0)$, puis pour tout $i \geq 0$

$$f_{i+1} := f_i - \sum_{q=1}^{2n+1} g_i \circ \chi_q,$$

et $\|h_{i+1}\|_\infty \leq \|f_{i+1}\|_\infty$, et $\|f_{i+1} - h_{i+1}\|_\infty \leq \frac{a}{2}\|f_{i+1}\|_\infty$, avec $g_{i+1} \in \Omega(h_{i+1})$. Comme on aura $\|g_i\|_\infty \leq \|h_i\|_\infty \leq \|f_i\|_\infty \leq (1-a)^i\|f\|_\infty$, les fonctions f_i tendront uniformément vers 0 et la somme $\sum_{i \geq 0} g_i$ convergera uniformément, définissant une fonction continue g de $[0, 1]$ dans lui-même satisfaisant

$$f = \sum_{i \geq 0} (f_i - f_{i+1}) = \sum_{i \geq 0} \sum_{q=1}^{2n+1} g_i \circ \chi_q = \sum_{q=1}^{2n+1} g \circ \chi_q.$$

• Fixons une fonction continue $h : [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}$ et montrons que $\Omega(h)$ est dense dans Φ^{2n+1} . Fixons un paramètre $\delta > 0$ qu'on choisira dans la suite. La collection d'intervalles

$$I_q(j) := \left[q\delta + j(2n+1)\delta, q\delta + j(2n+1)\delta + 2n\delta \right],$$

indexée par $j \in \mathbb{Z}$ et $1 \leq q \leq 2n+1$, a la propriété, à q fixé, d'avoir des intervalles disjoints séparés par un intervalle de longueur δ , et que chaque point de $[0, 1]$ appartient à tous les $I_q := \cup_j I_q(j)$ sauf un au plus, lorsque q varie. Pour $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{Z}^n$, notons $P_q(\mathbf{j})$ le

cube

$$P_q(\mathbf{j}) := I_q(j_1) \times \cdots \times I_q(j_n),$$

et remarquons que chaque $x \in [0, 1]^n$ appartient à un de ces cubes pour au moins $(n + 1)$ valeurs distinctes de q . Seuls les indices \mathbf{j} pour lesquels $P_q(\mathbf{j})$ intersecte $[0, 1]^n$ nous intéressent ; ils sont en nombre fini. On peut choisir δ de sorte que l'oscillation de h sur chaque cube $P_q(\mathbf{j})$ est majorée par $a\|h\|_\infty$. Notons maintenant Φ_q la collection des fonctions continues $\varphi_q \in \Phi$ constantes sur chaque intervalle $I_q(j)$ et linéaires par morceaux. On associe à chaque $\varphi_q \in \Phi_q$ la fonction χ_q définie par la formule (1) ; notez que χ_q est constante sur chaque cube $P_q(\mathbf{j})$.

Soit maintenant U un ouvert de Φ^{2n+1} . Quitte à prendre $\delta > 0$ encore plus petit on peut supposer $(\Phi_1 \times \cdots \times \Phi_{2n+1}) \cap U \neq \emptyset$; prenons $(\varphi_1, \dots, \varphi_{2n+1})$ dans cette intersection. Comme tous les λ_p sont distincts on peut choisir les fonctions φ_q de sorte que les valeurs $\chi_q(P_q(\mathbf{j}))$ soient toutes distinctes. (Les perturber un petit peu ne changera pas le fait que $(\varphi_1, \dots, \varphi_{2n+1}) \in U$). Désignons par $h_{q\mathbf{j}}$ la moyenne de h sur $P_q(\mathbf{j})$ et choisissons une fonction continue $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ telle qu'on a $\|g\|_\infty \leq 2a\|h\|_\infty \leq \|h\|_\infty$, et

$$g(\chi_q(P_q(\mathbf{j}))) = 2ah_{q\mathbf{j}}.$$

Pour $x \in P_q(\mathbf{j})$, le choix de δ en fonction de l'oscillation de h nous assure que

$$g(\chi_q(x)) = 2ah_{q\mathbf{j}} = 2ah(x) + r,$$

avec un reste $|r| \leq 2a^2\|h\|_\infty$. Puisque chaque x est dans au moins $n + 1$ cubes $P_q(\mathbf{j})$ on a donc

$$\begin{aligned} \left| h(x) - \sum_{q=1}^{2n+1} g(\chi_q(x)) \right| &\leq \left| (1 - 2a(n + 1))h(x) \right| + 2a^2(n + 1)\|h\|_\infty \\ &\leq (1 - 2a + 2(n + 1)a^2)\|h\|_\infty \leq (1 - a)\|h\|_\infty. \end{aligned}$$

▷

References

- [1] J.-P. Kahane, *Sur le théorème de superposition de Kolmogorov* J. Approx. Theory, **13**:229–234, (1975).