

Théorème tauberien et nombres premiers

Le théorème tauberien de Karamata donne un équivalent entre comportement en 0^+ de la transformée de Laplace $\varphi(a)$ d'une mesure positive μ sur \mathbb{R}_+ , et mesure des grands intervalles $\mu([0, 1/a])$, lorsque a tend vers 0. Voir ce document. Le théorème tauberien d'Ikehara permet entre autre de donner un équivalent de $\mu([1/a, 1/a + h])$ pour tout h fixé, lorsque a tend vers 0, précisant le théorème de Karamata. Il demande cependant d'avoir une information quantitative sur le comportement de la transformée de Laplace φ de μ dans le plan complexe. On déduit de l'énoncé d'Ikehara une démonstration simple et auto-contenue du théorème des nombres premiers dans la Section 2.

1 – Le théorème d'Ikehara

Théorème 1. *Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction croissante. S'il existe deux constantes $c, \ell \geq 0$ telles que l'intégrale*

$$F(z) := \int_0^\infty e^{-zx} f(x) dx$$

converge sur le demi plan ouvert $\{\operatorname{Re}(z) > c\}$ et que la fonction

$$G(z) := F(z) - \frac{\ell}{z - c}$$

admet une extension continue au demi plan fermé $\{\operatorname{Re}(z) \geq a\}$, alors

$$e^{-cx} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell.$$

On déduit effectivement de cet énoncé un équivalent de $\mu([1/a, 1/a + h])$, pour h fixé, lorsque a tend vers 0. On regarde ici la transformée de Laplace (complexe) de la mesure $\mu(dx) = f(x)dx$. Notons que

$$G(z) = \int_0^\infty (e^{-cx} f(x) - \ell) e^{-(z-c)x} dx =: \int_0^\infty \phi(x) e^{-(z-c)x} dx.$$

On souhaite montrer que ϕ tend vers 0 en $+\infty$. On va voir que ϕ est essentiellement une transformée de Fourier, si bien que la conclusion viendra du lemme de Riemann-Lebesgue. La chose est toute bête. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a effectivement que

$$G(c + \varepsilon + it) = \int_0^\infty e^{-\varepsilon x} \phi(x) e^{-itx} dx$$

est la “transformée de Fourier” de $e^{-\varepsilon x} \phi(x)$, si l'on oublie qu'on intègre ici sur $(0, +\infty)$ plutôt que sur \mathbb{R} tout entier. En prenant la transformée de Fourier inverse en t on aurait

$$\int e^{iyt} G(c + \varepsilon + it) dt = \int \int_0^\infty e^{-\varepsilon x} \phi(x) e^{-itx} dx dt = \int_0^\infty e^{-\varepsilon x} \phi(x) e^{-itx} \delta_y(x) dx = e^{-\varepsilon y} \phi(y),$$

si l'on pouvait intervertir les deux intégrales, en nous servant de l'identité $\int e^{it(y-x)} dt = \delta_y(x)$. Si l'on pouvait envoyer ε vers 0 sans précaution on obtiendrait bien ϕ sous forme de transformée de Fourier

$$\phi(y) = \int e^{iyt} G(c + it) dt.$$

Reste à rendre quantitatif ce raisonnement qualitatif.

Démonstration – Donnons-nous une famille de fonctions ρ_n sur \mathbb{R} , à support compact, et telles que les $\widehat{\rho}_n$ forment une approximation de l'unité. On peut alors effectivement intervertir ci-dessous l'intégrale en t et l'intégrale en x définissant G et obtenir

$$\int e^{iyt} \rho_n(t) G(c + \varepsilon + it) dt = \int_0^\infty e^{-\varepsilon x} \phi(x) \widehat{\rho}_n(y - x) dx$$

Puisque G est continue sur le demi plan fermé $\{\operatorname{Re}(z) \geq c\}$ et que ρ_n est à support compact, la famille de fonctions $(\rho_n(\bullet)G(c + \varepsilon + i\bullet))_{0 < \varepsilon \leq 1}$ converge uniformément vers la fonction $\rho_n(\bullet)G(c + i\bullet)$ et

$$\int e^{iyt} \rho_n(t) G(c + \varepsilon + it) dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int e^{iyt} \rho_n(t) G(c + it) dt.$$

On a donc, d'après le théorème de convergence monotone,

$$\int e^{iyt} \rho_n(t) G(c + it) dt = \int_0^\infty \phi(x) \widehat{\rho}_n(y - x) dx,$$

et puisque la fonction $\rho_n(\bullet)G(c + i\bullet)$ est intégrable (car continue et à support compact), on a

$$(\star) := \int_0^\infty \phi(x) \widehat{\rho}_n(y - x) dx \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 0,$$

d'après le lemme de Riemann-Lebesgue. Rappelons que $\phi(x) = e^{-cx} f(x) - \ell$. On n'a jusque-là pas utilisé le fait que f est croissante. Donnons-nous maintenant $\delta > 0$ et notons que pour $y \geq 0$

$$(\star) = \int_{-\infty}^{y+\delta} \phi(y + \delta - z) \widehat{\rho}_n(z) dz \geq \int_{-\delta}^\delta \phi(y + \delta - z) \widehat{\rho}_n(z) dz \geq \int_{-\delta}^\delta (e^{-c(y+2\delta)} f(y) - \ell) \widehat{\rho}_n(z) dz,$$

du fait que f est croissante, avec $e^{-c(y+2\delta)} f(y) - \ell = e^{-2\delta c} \phi(y) + (e^{-2\delta c} \ell - \ell)$. Puisque la limite supérieure en y du terme de gauche est nulle il s'ensuit qu'on a pour tout n

$$0 \geq e^{-2\delta c} \limsup_{+\infty} \phi + (e^{-2\delta c} \ell - \ell) \int_{-\delta}^\delta \widehat{\rho}_n(z) dz.$$

On en conclut que $\limsup_{+\infty} \phi \leq 0$, en envoyant n vers ∞ puis δ vers 0. On tire au passage le fait que ϕ est majorée, disons par une constante m . Maintenant, on a

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \phi(x) \widehat{\rho}_n(y - \delta - x) dx &= \int_{-\infty}^{y-\delta} \phi(y + \delta - z) \widehat{\rho}_n(z) dz \\ &\leq \int_{-\delta}^\delta \phi(y - \delta - z) \widehat{\rho}_n(z) dz + m \int_{-\infty}^{y-\delta} \mathbf{1}_{|z| > \delta} \widehat{\rho}_n(z) dz. \end{aligned} \tag{1.1}$$

La croissance de f donne cette fois $\phi(y - \delta - z) \leq e^{-c(y-2\delta)} f(y) - \ell$, lorsque $|z| \leq \delta$, et l'on conclut comme ci-dessus de l'inégalité (1.1) que $\liminf \phi \geq 0$, du fait que les $\widehat{\rho}_n$ forment une approximation de l'identité. \triangleright

2 – Le théorème des nombres premiers

La formule

$$\zeta(z) := \sum_{n \geq 1} n^{-z}$$

définit une fonction holomorphe sur le demi plan complexe ouvert $\{\operatorname{Re}(z) > 1\}$. Notons $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$ l'ensemble des nombres premiers. Développant $(1 - p^{-z})^{-1}$ en série et utilisant l'unique factorisation des nombres entiers en termes des nombres premiers, on voit que

$$\zeta(z) = \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - p^{-z})^{-1};$$

on peut bien intervertir $\prod_{p \in \mathbb{P}}$ et les sommes issues du développement de chaque facteur $(1 - p^{-z})^{-1}$ lorsque $\operatorname{Re}(z) > 1$. Ce développement en produit montre que la fonction ζ ne s'annule pas sur le demi plan ouvert $\{\operatorname{Re}(z) > 1\}$, comme $|p^{-z}| = p^{-\operatorname{Re}(z)} < 1$. Notons que puisque

$(z-1)^{-1} = \int_0^\infty x^{-z} dx$, la formule

$$g(z) := \zeta(z) - \frac{1}{z-1} = \sum_{n \geq 1} \int_n^{n+1} (n^{-z} - x^{-z}) dx$$

définit une fonction holomorphe g sur le demi plan ouvert $\{\operatorname{Re}(z) > 0\}$, puisque $|n^{-z} - x^{-z}| \leq \frac{|z|}{n^{\operatorname{Re}(z)+1}}$, sur l'intervalle $[n, n+1]$. Les fonctions ζ et ζ' sont en particulier bien définies et continues sur l'ouvert relatif $\{\operatorname{Re}(z) \geq 1\} \setminus \{1\}$ du fermé $\{\operatorname{Re}(z) \geq 1\}$.

Lemme 2. *Pour $\operatorname{Re}(z) > 1$, on a*

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = z \int_0^\infty e^{-zx} f(x) dx$$

pour une fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ croissante.

Démonstration – On déduit du développement en produit que

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\ln(p) p^{-z}}{1 - p^{-z}} = \sum_{p \in \mathbb{P}} \left(\ln(p) \sum_{n \geq 1} p^{-nz} \right).$$

Dans le même temps, pour $p \in \mathbb{P}$ fixé,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-zx} \left[\frac{x}{\ln(p)} \right] \ln(p) dx &= \int_0^\infty e^{-zx} \ln(p) \left(\sum_{n \leq x/\ln(p)} 1 \right) dx = \ln(p) \sum_{n \geq 1} \int_{n \ln(p)}^\infty e^{-zx} \\ &= \frac{\ln(p)}{z} \sum_{n \geq 1} p^{-nz}. \end{aligned}$$

on a donc le résultat de l'énoncé avec

$$f(x) := \sum_{p \in \mathbb{P}} \left[\frac{x}{\ln(p)} \right] \ln(p).$$

▷

Lemme 3. *La fonction ζ ne s'annule pas sur $\{\operatorname{Re}(z) = 1\} \setminus \{1\}$.*

Démonstration – Pour un nombre complexe z de module 1 on a $\bar{z} = z^{-1}$, et donc l'identité

$$\left| \sum_{j=0}^2 z^j \right|^2 = \sum_{j, j'=0}^2 z^{j-j'} = \sum_{|k| < 3} (3 - |k|) z^k.$$

Appliqué à $z = e^{-in \ln(p)t}$ et $s > 1$ cela nous donne

$$\prod_{|k| < 3} \zeta(s + ikt)^{3-|k|} = \exp \left(\sum_{\substack{n \geq 1 \\ p \in \mathbb{P}}} \frac{p^{-sn}}{n} \left| \sum_{j=0}^2 e^{ijnt \ln(p)} \right|^2 \right) \geq 1,$$

c'est-à-dire

$$\left| \zeta(s)^3 \zeta(s+it)^4 \zeta(s+2it)^2 \right| \geq 1.$$

Si l'on avait $\zeta(1+it) = 0$ pour un $t \neq 0$, le quotient $(\zeta(s+it) - \zeta(1+it))/(s-1)$ aurait une limite finie, donnée par $g'(1+it) + 1/t^2$. Tenant compte du fait que ζ a un pôle d'ordre 1 en $z = 1$, on conclurait donc de l'inégalité précédente la contradiction

$$O(1) \geq (s-1)^{-1}.$$

▷

À ce stade, on a obtenu que la fonction ζ'/ζ admet un prolongement continu au complémentaire de tout voisinage ouvert du singleton $\{1\}$ dans le demi plan fermé $\{\operatorname{Re}(z) \geq 1\}$. Un calcul

direct sur $\{\operatorname{Re}(z) > 1\}$ nous donne

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} + \frac{1}{z-1} = \frac{(z-1)g'(z) + g(z)}{(z-1)g(z) + 1}.$$

Le membre de droite étant holomorphe sur le demi plan ouvert $\{\operatorname{Re}(z) > 0\}$, la fonction $-(\zeta'/\zeta)(z) - (z-1)^{-1}$ a en particulier un prolongement continu au demi espace fermé $\{\operatorname{Re}(z) \geq 1\}$, si bien que

$$\int_0^\infty e^{-zx} f(x) dx - \frac{1}{z-1}$$

a aussi un prolongement continu à $\{\operatorname{Re}(z) \geq 1\}$, d'après le lemme 2. Le théorème d'Ikehara, Théorème 1, nous donne donc l'équivalent

$$f(x) \sim e^x, \quad \text{i.e.} \quad f(\ln x) \sim x, \quad (2.1)$$

lorsque x est grand. Maintenant, si

$$\pi(x) := \sum_{p \in \mathbb{P}, p \leq x} 1$$

désigne la fonction de comptage des nombres premiers,

$$f(\ln x) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \left[\frac{\ln x}{\ln p} \right] \ln(p) \leq \pi(x) \ln(x) \quad (2.2)$$

et l'on a pour $1 < y < x$

$$\pi(x) - \pi(y) \leq \sum_{y < p < x} \frac{\ln p}{\ln y} \leq \frac{f(\ln x)}{\ln(y)},$$

si bien que

$$\pi(x) \leq y + \frac{f(\ln x)}{\ln y}.$$

Appliquant cette inégalité à $y = \frac{x}{\ln(x)^2}$, on obtient avec (2.2) l'encadrement

$$\frac{f(\ln x)}{x} \leq \frac{\pi(x) \ln(x)}{x} \leq \frac{f(\ln x)}{x} \frac{\ln(x)}{\ln(x/\ln(x)^2)} + \frac{1}{\ln x}.$$

L'équivalent (2.1) sur la fonction $f(\ln x)$ donne donc le résultat suivant, qui constitue le théorème des nombres premiers.

Théorème 4. *On a $\pi(x) \sim x/\ln(x)$, lorsque x est grand.*