Fonctions méromorphes

On souligne dans ce document le fait qu'une fonction méromorphe n'est rien d'autre qu'une fonction à valeurs dans la sphère de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \simeq \mathbb{S}^2$. Le critère de compacité de Marty qu'on trouve dans le théorème 1 ci-dessous, pour une famille de fonctions méromorphes définies sur un même ouvert D de $\mathbb{C}$, se comprend alors comme une simple reformulation du critère bien connu d'Ascoli-Arzela, ici pour des fonctions à valeurs dans la sphère. Héritage historique, on parle de famille normale de fonctions méromorphes plutôt que de famille pré-compacte. Une reformulation du résultat de Marty due à Zalcman permet alors de voir que toute famille de fonctions méromorphes définies sur un même ouvert de $\mathbb{C}$, et dont les images dans $\mathbb{S}^2$ évitent toutes trois points donnés de la sphère, forme une famille normale. On verra comment ce résultat dû à Montel implique un résultat fameux de Picard sur le comportement d'une fonction méromorphe au voisinage d'une singularité essentielle.

Rappelons que la formule de Cauchy permet de compter avec multiplicité le nombre de zéros d'une fonction holomorphe compris à l'intérieur d'un lacet simple. ll s'ensuit que si une suite de fonctions holomorphes ne s'annulant pas sur un ouvert donné converge uniformḿent sur tout compact de cet ouvert vers une limite non nulle h, alors h est holomorphe et ne s'annule pas sur cet ouvert. Cette observation constitue le théorème d'Hurwirtz.

1 – Familles normales

On identifie $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ à la sphère unité $\mathbb{S}^2$ de $\mathbb{R}^3$ en associant à un point $z \in \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$, le point d'intersection $p(z)$ de la demi-droite de $\mathbb{R}^3$ d'origine le point $(0,0,1) \in \mathbb{S}^2$ passant par z. Le point ∞ est envoyé sur le pôle nord $(0,0,1)$. Si $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ est une courbe C^1 dans $\mathbb{C}$, on vérifie que la courbe $p \circ \gamma$ à valeurs dans $\mathbb{S}^2$ a pour longueur

$$\ell(p \circ \gamma) = 2 \int_0^1 \frac{|\gamma'(s)|}{1 + |\gamma(s)|^2}\, ds$$

– on mesure la longueur d'une courbe sur $\mathbb{S}^2$ en la voyant comme une courbe de $\mathbb{R}^3$. En particulier, si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est de classe C^1, la courbe $p \circ f \circ \gamma$ de $\mathbb{S}^2$ a pour longueur

$$2 \int_0^1 \frac{|f'(\gamma(s))|}{1 + |\gamma(s)|^2}\, |\gamma'(s)|\, ds = 2 \int_\gamma \frac{|f'|}{1 + |f|^2} =: 2 \int_\gamma f^\sharp.$$

Notez que $f^\sharp$ est bien définie par continuité en un pôle d'une fonction méromorphe f. Notez aussi que $f^\sharp = (1/f)^\sharp$ en dehors des pôles. On voit une fonction méromorphe comme une fonction à valeurs dans $\mathbb{S}^2$. Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$.

Definition – *Une* **famille** $\mathscr{F}$ *de fonctions méromorphes définies sur D est dite* **normale** *si la famille $p \circ \mathscr{F}$ de fonctions sur D à valeurs dans $\mathbb{S}^2$ est équicontinue sur chaque compact de D.*

La restriction sur chaque compact de D de la famille $\mathscr{F}$ est donc pré-compacte pour la topologie uniforme, d'après le théorème d'Ascoli et Arzela.[1]

Théorème 1. *Une famille $\mathscr{F}$ de fonctions méromorphes définies sur D est normale ssi la famille de fonctions réelles*

$$f^\sharp(z) = \frac{|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2}, \quad f \in \mathscr{F}, \quad z \in D,$$

est uniformément bornée sur chaque compact de D.

[1]Si la famille $\mathscr{F}$ est constituée de fonctions holomorphes, la famille $\mathscr{F}$ est normale ssi toute suite d'éléments de $\mathscr{F}$ admet une sous-suite convergeant uniformément sur chaque compact soit vers une fonction holomorphe soit vers la constante ∞. En effet, soit h est un point d'accumulation d'éléments h_n de $\mathscr{F}$. Si h ne vaut nulle part ∞, les h_n envoient uniformément en n un voisinage de z_0 sur un voisinage de $h(z_0)$, aussi la convergence est-elle localement uniforme et h holomorphe d'après la formule de Cauchy. Si $h(z_0) = \infty$ en un point z_0, alors $1/h$ est nulle en z_0, aussi, si $1/h$ n'était pas identiquement nulle, les $1/h_n$ devraient aussi s'annuler dans un voisinage de z_0, d'après le théorème d'Hurwirtz rappelé en introduction. Les h_n étant holomorphes prennent leurs valeurs dans $\mathbb{C}$, aussi $1/h$ doit-elle être identiquement nulle.

Démonstration – $\Longleftarrow$ Associons à un compact K de D une constante finie M_K telle que $f^\sharp(z) \leqslant M_K$, pour tout $z \in K$ et $f \in \mathscr{F}$. On peut supposer sans perte de généralité que K est l'adhérence d'un ouvert connexe $\overset{\circ}{K}$. Comme on a pour toute courbe γ de classe C^1 à valeurs dans $\overset{\circ}{K}$, et toute fonction $f \in \mathscr{F}$,

$$\ell\big(p \circ f \circ \gamma\big) = 2\int_\gamma f^\sharp \leqslant 2M_K \int_0^1 \big|\gamma'(s)\big| ds = 2M_K \ell(\gamma),$$

on voit que les application $p \circ f$ sont toutes $2M_K$-Lipschitz, si bien que la famille $p \circ \mathscr{F}$ est équicontinue sur K ; la conclusion provient donc du théorème d'Ascoli et Arzela.

$\Longrightarrow$ S'il existait un compact K de D sur lequel la famille des $f^\sharp_{|K}$ n'était pas bornée, on aurait une suite f_n de fonctions de $\mathscr{F}$ telle que $\sup_K f_n^\sharp$ tend vers ∞ avec n. La famille étant normale, on peut cependant associer à chaque point de K un voisinage de ce point sur lequel une sous-suite de $p \circ f_n$ converge uniformément. L'ensemble K étant compact, on peut le recouvrir par un nombre fini de tels voisinages, et trouver une sous-suite $p \circ f_{n_k}$ de $p \circ f_n$ convergeant uniformément sur K. La convergence de $f^\sharp_{n_k} = (1/f_{n_k})^\sharp$ sur K s'ensuit, contredisant le fait que $\sup_K f_n^\sharp$ tend vers ∞ avec n – je rappelle que la formule de Cauchy assure que le convergence uniforme d'une suite de fonctions holomorphes implique la convergence uniforme de ses dérivées. ▷

Ce critère de pré-compacité n'est pas forcément facile à utiliser. La reformulation suivante, due à Zalcman, précise au contraire ce qui se passe lorsqu'on à affaire à une famille non normale. On a l'idée de zoomer de plus en plus sur le voisinage d'un point mobile.

Proposition 2. *Une famille de fonctions méromorphes définies sur le disque unité D n'est pas normale ssi il existe $0 < r < 1$, des points z_n avec $|z_n| < r$, des fonctions $f_n \in \mathscr{F}$ et $\rho_n > 0$ tendant vers 0, tels que*

$$p \circ f_n(z_n + \rho_n\zeta) \to p \circ g(\zeta),$$

converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{C}$, pour une fonction méromorphe non constante g définie sur $\mathbb{C}$, satisfaisant $g^\sharp(\zeta) \leqslant g^\sharp(0) = 1$, pour tout $\zeta \in \mathbb{C}$. (La limite g est holomorphe si la famille $\mathscr{F}$ est formée de fonctions holomorphes.)

Démonstration – $\Longrightarrow$ On a d'après le théorème de Marty un rayon $0 < r_1 < 1$, des points z'_n tels que $|z'_n| \leqslant r_1$ et une suite de fonctions $f_n \in \mathscr{F}$ tels que $f_n^\sharp(z'_n)$ tend vers ∞. Prenons r tel que $r_1 < r < 1$ et définissons

$$M_n := \max_{|z| \leqslant r} \left(1 - \frac{|z|^2}{r^2}\right) f_n^\sharp(z).$$

Ce maximum est atteint en un point z_n, comme $f_n^\sharp$ est continue sur $\{|z| \leqslant r\}$, et $M_n \geqslant \big(1 - (r_1/r)^2\big) f_n^\sharp(z'_n)$ tend vers ∞. Posons

$$\rho_n := 1/f_n^\sharp(z_n) \to 0,$$

si bien que $\frac{\rho_n}{r - |z_n|} = \frac{r + |z_n|}{r^2 M_n} \leqslant 2/(rM_n)$ tend vers 0. La fonction

$$g_n(\zeta) := f_n\big(z_n + \rho_n\zeta\big)$$

est donc définie pour $|\zeta| < \frac{r - |z_n|}{\rho_n}$, avec ce majorant tendant vers ∞ avec n. Ces fonctions g_n satisfont le critère de compacité de Marty. En effet, on a d'abord

$$g_n^\sharp(0) = \rho_n f_n^\sharp(z_n) = 1,$$

pour tout n, et pour tout $R > 0$ et $|\zeta| \leqslant R < \frac{r - |z_n|}{\rho_n}$, on a $|z_n + \rho_n\zeta| < r$, si bien que puisque ρ_n tend vers 0, on a, du fait de la définition de M_n,

$$g_n^\sharp(\zeta) = \rho_n f_n^\sharp\big(z_n + \rho_n\zeta\big) \leqslant \rho_n \frac{M_n}{1 - |z_n + \rho_n\zeta|/r^2} \leqslant \frac{r + |z_n|}{r + (|z_n| + \rho_n R)} \frac{r - |z_n|}{r - (|z_n| + \rho_n R)},$$

avec un majorant qui tend vers 1. Le critère de Marty s'applique donc bien. La limite g d'une sous-suite de g_n est non constante puisque $g^\sharp(0) = \lim_n g_n^\sharp(0) = 1$.
$\Longleftarrow$ Supposons par contraposition la famille $\mathscr{F}$ normale et soit M telle que

$$\max_{|z|\leqslant(1+r)/2} f^\sharp(z) \leqslant M,$$

pour toute $f \in \mathscr{F}$. À $\zeta \in \mathbb{C}$ fixé, on a $|z_n + \rho_n\zeta| \leqslant (1+r)/2$, pour n assez grand, si bien que $g_n^\sharp(\zeta) = \rho_n f_n^\sharp(z_n + \rho_n\zeta) \leqslant \rho_n M$, tend vers 0. La limite g des g_n serait donc constante (possiblement infinie), contredisant l'hypothèse selon laquelle elle est non constante. $\rhd$

2 – Théorèmes de Montel et Picard

Théorème 3. *Une famille $\mathscr{F}$ de fonctions méromorphes, définies sur un ouvert D de $\mathbb{C}$, dont toutes les images évitent trois points donnés de $\mathbb{S}^2$, est normale.*

Démonstration – Puisque la propriété de normalité de la famille $\mathscr{F}$ est locale, on ne perd rien à supposer que D est le disque unité. On suppose aussi sans perte de généralité que les trois points de $\mathbb{S}^2$ évités par toutes les $f \in \mathscr{F}$ sont $0, 1$ et ∞, aussi la famille $\mathscr{F}$ est-elle formée de fonctions holomorphes. Pour $k \geqslant 1$, notons $\mathscr{F}_k \subset \mathscr{F}$ la collection des fonctions sur D évitant $0, \infty$ et l'ensemble Σ_k des racines k-ièmes de l'unité, pour $k \geqslant 1$. On a donc $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}$, et $f^{1/k} \in \mathscr{F}_k$ si $f \in \mathscr{F}$, ainsi que $f^k \in \mathscr{F}$ si $f \in \mathscr{F}_k$ – on peut bien prendre une puissance d'une fonction évitant 0. *Raisonnons par l'absurde en supposant $\mathscr{F}$ non normale.* Aucune des familles $\mathscr{F}_k \subset \mathscr{F}$ ne serait alors normale, sans quoi désignant par f_n une suite de $\mathscr{F}$ sans sous suite convergence, une sous-suite des $f_{n_j}^{1/k} \in \mathscr{F}_k$ convergerait, impliquant la convergence des f_{n_j} – une contradiction. La caractérisation de Zalcman nous donnerait donc pour tout $k \geqslant 1$ une fonction $g^{(k)}$ méromorphe sur $\mathbb{C}$, non constante, obtenue comme limite de fonctions évitant 0 et Σ_k, et satisfaisant l'estimée

$$g^{(k)\sharp}(z) \leqslant g^{(k)\sharp}(0) = 1. \tag{2.1}$$

Le théorème d'Hurwitz nous assure que $g^{(k)}$ évite elle ausi 0 et Σ_k. Considérons alors la famille $\mathscr{G} := \left(g^{(2^n)}\right)_{n\geqslant 0}$ de fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$. C'est une famille normale d'après (2.1) et le théorème de Marty. Une limite g d'éléments de cette famille vérifiera $g^\sharp(0) = 1$, puisque $g^{(2^n)\sharp}(0) = 1$ pour tout $n \geqslant 0$. Aussi g n'est-elle pas constante. Comme $\Sigma_{2^n} \subset \Sigma_{2^m}$, chaque fonction $g^{(2^m)}$ évite Σ_{2^n}, pour $n \leqslant m$. Le théorème d'Hurwitz implique à nouveau que g évite Σ_{2^n} ; ceci pour tout $n \geqslant 0$. Il s'ensuit que l'image de g est soit contenue dans D soit dans $\mathbb{C}\backslash\overline{D}$. Dans les deux cas, le théorème de Liouville implique que g est constante, une contradiction. $\rhd$

Théorème 4. *Soit $f : D \to \mathbb{S}^2$ une fonction méromorphe ayant une singularité essentielle en un point $z_0 \in D$. Alors l'image par f de tout voisinage de z_0 évite au plus deux points de $\mathbb{S}^2$.*

Démonstration – On peut supposer sans perte de généralité que D est le disque unité, que $z_0 = 0$ et que f est holomorphe sur $D\backslash\{0\}$. Si toutes les restrictions de f à des voisinages de 0 évitaient trois points (ce serait toujours les mêmes), la famille $f_n(z) := f(z/n)$, définie sur le disque pointé ouvert $0 < |z| < 1$, serait normale ; les $p \circ f_n$ contiendraient donc une sous-suite convergente. On raisonne maintenant par contraposition, après avoir rappelé la formulation 'classique' de la normalité d'une famille de fonctions holomorphes donnée dans la note du bas de la page 1. De deux choses l'une. Si cette sous suite f_{n_j} convergeait dans $\mathbb{C}$ sur les compacts, elle serait en particulier bornée sur le cercle $|z| = 1/2$, si bien que f serait bornée par une même constante sur tous les cercles $1/(2n_j)$. Elle serait donc bornée tout court, d'après le principe du maximum, et 0 serait une singularité effacable. Sinon, le même raisonnement appliqué à $1/f$ montre que 0 est un pôle. $\rhd$