Réduction de Jordan des endomorphismes

Soit $\mathbf{k}$ un corps algébriquement clos – pensez au corps des nombres complexes. On donne dans cette note une démonstration simple du théorème de réduction des endomorphismes de $\mathbf{k}^d$, dû à Jordan. Son énoncé requiert une notation. Fixons-nous un endomorphisme T de $\mathbf{k}^d$. Etant donné un scalaire $\lambda \in \mathbf{k}$, on appelle λ-chaîne de Jordan associée à (T et à) un vecteur v une famille libre de $\mathbf{k}^d$ de la forme $\big(v, (T-\lambda)v, \dots, (T-\lambda)^{m-1}v\big)$, telle que $(T-\lambda)^m v = 0$, pour un certain entier $m \geqslant 1$.

Théorème 1. *Quelle que soit la dimension $d \geqslant 2$ de l'espace $\mathbf{k}^d$, et l'endomorphisme T de $\mathbf{k}^d$, il existe des triplets $(v_1, \lambda_1, m_1), \dots, (v_\ell, \lambda_\ell, m_\ell)$ d'éléments de $\mathbf{k}^d \times \mathbf{k} \times \mathbb{N}$, tels que la réunion des λ_i-chaînes associées à v_i forme une base de $\mathbf{k}^d$. On parle de* base de Jordan pour T.

DÉMONSTRATION – Voici une démonstration élémentaire basée sur un *raisonnement par contradiction*. Supposons donc l'énoncé de Jordan faux et choisissons parmis tous les contre-exemples un endomorphisme T d'un espace $\mathbf{k}^{d_0}$ tel que $\mathbf{k}^{d_0}$ n'a aucune base de Jordan pour T, et pour lequel la dimension d_0 est minimale. Le corps $\mathbf{k}$ étant algébriquement clos, T a au moins une valeur propre $\mu \in \mathbf{k}$; quitte à travailler avec $T - \mu$, on peut supposer $\mu = 0$. Dans ces conditions,

$$\dim T\big(\mathbf{k}^{d_0}\big) < d_0.$$

Notez que l'espace $T\big(\mathbf{k}^{d_0}\big)$ est stable par T. Vu notre choix de dimension d_0 et l'inégalité ci-dessus, la restriction de T à $T\big(\mathbf{k}^{d_0}\big)$ admet une base de Jordan $\mathfrak{B}$. Soit donc V un sous-espace de $\mathbf{k}^{d_0}$ de dimension maximale contenant $T\big(\mathbf{k}^{d_0}\big)$, stable par T et ayant une base de Jordan $\mathfrak{B}'$ contenant $\mathfrak{B}$. Notez que l'on doit avoir $\ker T \subset V$, sans quoi on pourrait ajouter à $\mathfrak{B}'$ un élément du noyau de T pour former un espace vectoriel ayant une base de Jordan, de dimension strictement plus grande que celle de V, contredisant sa définition. Clairement, on a $T\big(\mathbf{k}^{d_0}\big) \subset V \subset \mathbf{k}^{d_0}$.

On va voir qu'on doit avoir $T(V) = T\big(\mathbf{k}^{d_0}\big)$. A tout vecteur v de $\mathbf{k}^{d_0}$ on pourra donc associer un vecteur v' de V tel que $T(v) = T(v')$, c'est-à-dire $(v - v') \in \ker T \subset V$, montrant que $v \in V$, soit $\mathbf{k}^{d_0} = V$. La contradiction est là puisque $\mathbf{k}^{d_0}$ n'a pas de base de Jordan pour T alors que V en a une.

Pour montrer que $T(V) = T\big(\mathbf{k}^{d_0}\big)$, il nous suffit de montrer que tout élément w de la base $\mathfrak{B}$ de $T\big(\mathbf{k}^{d_0}\big)$ est dans $T(V)$. En tant qu'élément de $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}'$, le vecteur w est de la forme $(T-\lambda)^k u$, pour un vecteur u de V, un scalaire λ, et un certain exposant $k \geqslant 0$. Si λ est non nul, notez qu'un élément quelconque v de V est dans $T(V)$ ssi $(T-\lambda)v \in T(V)$. Comme $(T-\lambda)^m w = 0$ est dans V pour un certain exposant m, par définition d'une base de Jordan, et $w \in V$, on en déduit que tous les $(T-\lambda)^j w$, ainsi que w, sont dans $T(V)$. Dans le cas où λ est nul, seul le cas où l'exposant k est nul pose problème, auquel cas $w = u$. Mais on sait aussi que $w \in T(\mathbf{k}^{d_0})$ s'écrit $T(w')$, pour un certain vecteur $w' \in \mathbf{k}^{d_0}$. Si ce vecteur w' n'appartenait pas à V, on pourrait l'ajouter à la base $\mathfrak{B}'$ et obtenir un sous-espace stable de dimension strictement plus grande que $\dim(V)$ ayant une base de Jordan, contredisant la définition de V. Le vecteur w' est donc dans V, et $w = T(w') \in T(V)$. $\triangleright$