# Feuille de TP n°1 – Introduction probabiliste à Scilab

## 1 À savoir avant toutes choses

1. Scilab est un logiciel libre que l'on peut télécharger à l'URL www.scilab.org.
2. Scilab possède une aide en ligne (en plus du prof de TP).

## 2 Un peu de matrices pour s'échauffer

Voici quelques commandes de base sur les matrices, l'affichage et les booléens. Cette dernière notion vous permettra d'éviter de nombreuses boucles. Exécuter les commandes en suivant. Le symbole ►► signale une question un peu plus ouverte...

Fabrication manuelle d'une matrice (nuance avec ou sans le ";" final) :
`M=[1 3 5;-2 6 1]`
Extraction de la première ligne ou de la troisième colonne :
`l = M(1,:); c = M(:,3)`
Transposée de `M` :
`N=M'`
Fabrication automatique d'un vecteur :
`[0 : 0.1 : 2]`
Fabrication automatique d'une matrice de zéros :
`P = zeros(4,5)`
►► Que fait la commande `A = ones(M)` ?
Suppression de la deuxième colonne :
`P(:,2) = []`
Fabrication d'une matrice par blocs :
`x = [1 : 2]; P = [x 2*x; 3*x 4*x]`
►► Fabriquer une matrice $3 \times 4$ qui contient `M` en haut à gauche, `x'` en haut à droite, `x` en bas à gauche et `[0 0]` en bas à droite, en utilisant la construction par blocs.
►► Que calcule la commande `s = ones(x)'*x` ?
►► Si $x$ et $y$ sont deux vecteurs (colonne), comment calculer leur produit scalaire ?
►►Affichage propre d'un résultat :
`p=3.14; disp('une valeur approchée de pi = '+string(p)+' au centième près.')`
►►Vecteurs booléens (pratiques pour trier) :
`l=(M>2)`
►► Expliquer la commande suivante :
`x=[-2:.5:2];l=(x>-1 & x<1);x(l)=3.14; x`
►► D'autres commandes à tester :
`a=sum(x), a=mean(x), x.^2, sort(x), -sort(-x), (x>0), M.^2, M^2`

## 3 Générer de l'aléa

La fonction la plus simple (voire simpliste) s'appelle `rand`. Elle permet de simuler des nombres pseudo-aléatoires distribués selon la loi uniforme sur $[0,1]$. La fonction `grand` permet de simuler des échantillons suivant toutes les lois de probabilité classiques (voir l'aide en ligne pour en savoir plus).

►► Tester la commande suivante (je parie sur 0.2113249) :
`rand(1,1)`

►► Tester les commandes suivantes :
`rand(2,4), grand(1,3,'exp',2), grand(3,1,'nor',1,2)`

**Remarque :** attention aux paramètres des lois exponentielles et normales (en anglais, mean désigne la moyenne et standard deviation l'écart-type).

►► Que font les commandes suivantes :

1. `plot2d(cumsum(rand(1,1000))./[1:1000])`
2. `plot2d([1:1000],cumsum(rand(1,1000))./[1:1000],4)`
3. `clf(); plot2d(cumsum(-log(rand(1,1000)))./[1:1000])`
4. `plot2d([11000]',cumsum(grand(1000,10,'nor',0,1),'r')./([1 1000]'*ones(1,10)))`
5. `histplot(100,grand(1,1000,'exp',2))`
6. `xtitle('Histogramme expo')`

## 4 Loi forte des grands nombres

**Theorème 1.** *Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de v.a.i.i.d. de même loi que $X$.*

- *Si $X$ admet un moment d'ordre 1 fini (i.e. $\mathbb{E}(|X|) < \infty$), alors la suite $(\overline{X}_n)_n$ des moyennes empiriques ($\overline{X}_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$) converge vers l'espérance de $X$ presque sûrement.*
- *Réciproquement, si la moyenne empirique converge presque sûrement vers un réel $a$, alors $X$ est intégrable et $a = \mathbb{E}(X)$.*

►► Illustrer la loi forte des grands nombres grâce aux lois exponentielles, gaussiennes et de Cauchy.

**Remarque :** pour simuler des v.a. de loi de Cauchy, on utilisera (après l'avoir vérifié) le résultat suivant : si $F$, la fonction de répartition de $X$, est inversible et $U$ suit la loi uniforme sur $[0,1]$ alors $F^{-1}(U)$ a même loi que $X$.

## 5 Théorème limite central

**Theorème 2.** *Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de v.a. i.i.d. de même loi de moyenne $m$ et de variance $\sigma^2$ (finie). Alors*

$$\sqrt{n}\left(\frac{\overline{X}_n - m}{\sigma}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1) \quad \textit{avec } \overline{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

►► Écrire une fonction qui

1. simule 1000 réalisations $Z_1^{(n)}, \ldots, Z_{1000}^{(n)}$ indépendantes de la variable $Z^{(n)}$ (on prendra $n = 500$ et la loi exponentielle de paramètre 2 pour $\mu$ ).
2. trace un histogramme des $(Z_i^{(n)})_i$.
3. superpose à ce graphique la densité de la gaussienne.

**Rappel :** pour créer et utiliser une fonction, taper le texte de la fonction dans un fichier grâce à l'éditeur `scipad` de Scilab. Une fonction commence par `function nom_fonction` et se termine par `endfunction`. Il est possible (et souhaitable) de mettre plusieurs fonctions dans un même fichier. La sauvegarde se fait avec un Contrôle-s et la compilation avec un Contrôle-l. Dans la fenêtre Scilab, appeler la fonction. Attention : si la fonction n'utilise pas d'arguments, tapez `nom_fonction()`.

►► Illustrer le côté nécessaire des hypothèses du TLC à l'aide d'une loi qui ne possède pas de moment d'ordre deux.

## 6 Méthode de Monte-Carlo

La méthode de Monte-Carlo fournit des valeurs approchées d'intégrales en utilisant des réalisations i.i.d. d'une loi que l'on sait simuler. Pour cela, on interprète tout simplement une intégrale comme une espérance, que l'on va approcher par la moyenne empirique de v.a. bien choisies. Par exemple, si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de v.a. i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]^m$ et si $f : [0,1]^m \to \mathbb{R}$ est une fonction intégrable (par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[0,1]^m$), alors la loi des grands nombres entraîne la convergence presque-sure suivante :

$$\frac{1}{n}(f(X_1)+\cdots+f(X_n)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(f(X_1)) = \int_{[0,1]^m} f(x)\,dx \quad \text{p.s.}$$

Si l'on sait majorer la variance de $f(X_1)$, on est en mesure d'utiliser des intervalles de confiance pour contrôler l'erreur. La vitesse de convergence de cette méthode est $\sqrt{n}$ (ce qui peut paraître lent par rapport à des méthodes déterministes). Cependant cette vitesse ne dépend pas de la régularité de $f$ et dépend plus faiblement de la dimension $m$ que les méthodes déterministes.
►► Utiliser une méthode de Monte-Carlo pour évaluer la valeur de $\pi$ à partir des trois intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 4\sqrt{1-x^2}\,dx$ (aire du disque unité)
2. $\displaystyle\int_{[-1,+1]^2} \mathbf{1}_{\{x^2+y^2\leq 1\}}\,dx\,dy$ (aire du disque unité)
3. $\displaystyle\int_{[-1,+1]^3} \mathbf{1}_{\{x^2+y^2+z^2\leq 1\}}\,dx\,dy$ (volume de la boule unité).

►► Illustrer la convergence de ces méthodes en fonction du nombre de tirages.

## 7 Méthode du rejet

►► Tester et interpréter la fonction suivante :

```
function rejet
X=zeros(1,10000);
for i=1:10000;
  x=rand(1,2);
  while x(2)>sin(%pi*x(1)),
    x=rand(1,2);
  end,
  X(i)=x(1);
end;
clf()
histplot(100,X);
Y=[0:0.05:1];
plot2d(Y,%pi*sin(%pi*Y)/2);
endfunction
```

La méthode générale est basée sur le résultat suivant. Soit $\mu$ une mesure de probabilité sur $[a,b]$ dont la densité $f$ est continue et $M$ tel que le graphe de $f$ soit inclus dans le rectangle $[a,b]\times[0,M]$. On considère des vecteurs aléatoires indépendants $((X_n,Y_n))_{n\geq 0}$ suivant une loi uniforme sur $[a,b]\times[0,M]$. On définit ensuite $T$ comme le plus petit $n$ tel que $f(X_n)\geq Y_n$. Alors $T$ est fini presque sûrement et $X_T$ suit la loi $\mu$.

## 8 Mélange de lois

►► Interprêter en terme de mélange de lois la densité suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}e^{-x} + \frac{4}{3}e^{-2x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Simuler des variables aléatoires indépendantes admettant cette densité.
►► Mêmes questions avec la densité

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

►► Écrire une fonction qui
- génère une variable aléatoire $N$ de loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$,
- génère $N$ variables aléatoires de loi de Bernoulli de paramètre $p$,
- rend leur somme $S$ (ou 0 si $N = 0$).

Quelle est la loi de $S$ ? Comment illustrer ce résultat ? Comment l'interprêter ?

## 9 Le théorème de Wigner

Ce résultat est culturel et sert à vous faire manipuler des matrices (il est hors du programme de l'agrégation). Considérons un tableau symétrique de taille infinie dont les coefficients sont des v.a.r. :

$$\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots \\ w_{12} & w_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

On note $W_n$ la matrice aléatoire carrée **symétrique** réelle de taille $n \times n$ obtenue en tronquant le tableau à partir de son coin supérieur gauche. Les valeurs propres de $W_n$ sont réelles.

**Theorème 3** (Wigner)**.** *Supposons que les v.a. $(w_{ij}, 1 \leq i < j)$ sont i.i.d.* ***centrées*** *de variance finie $\sigma^2$ et que les v.a. $(w_{ij}, 1 \leq i)$ sont i.i.d.* ***centrées****. Si $(\lambda_{n,1}(\omega), \ldots, \lambda_{n,n}(\omega))$ désigne le spectre de $n^{-1/2}W_n(\omega)$, alors, pour presque tout $\omega$, la mesure empirique*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{\lambda_{i,n}(\omega)}$$

*converge faiblement vers la loi du demi-cercle de paramètre $\sigma$, de densité par rapport à la mesure de Lebesgue $dx$ sur $\mathbb{R}$ :*

$$\frac{1}{2\pi\sigma^2}\sqrt{4\sigma^2 - x^2}\mathbf{1}_{\{-2\sigma \leq x \leq 2\sigma\}}(x).$$

►► Que font les commandes suivantes : `spec`, `tril(M,-1)`, `triu(M)` ?
►► Pour illustrer ce théorème, on pourra tracer, en le superposant à la densité de la loi du demi-cercle, un histogramme avec les valeurs propres d'une matrice aléatoire de grande taille (on prendra des coefficients de loi gaussienne standard).

## Références

[BL98] P. Barbe et M. Ledoux – *Probabilités*, De la licence à l'agrégation, Belin, 1998.

[Bou86] N. Bouleau – *Probabilités de l'ingénieur, variables aléatoires et simulation*, Hermann, 1986.

[DCD82] D. Dacunha-Castelle et M. Duflo – *Probabilités et statistiques. Tome 1*, Masson, Paris, 1982, Problèmes à temps fixe.

[FF02] D. Foata et A. Fuchs – *Processus stochastiques*, Dunod, 2002.

[Yca02] B. Ycart – « Modèles et Algorithmes Markoviens », (Société de Mathématiques Appliquée et Industrielles, éd.), Mathématiques et Applications, vol. 39, Springer, 2002.