

---

–Texte–

## Mutualisation des réparations

---

### 1 Introduction

L'université Rennes 1 souhaite optimiser les opérations de maintenance sur les photocopieuses du campus. Pour l'instant, chaque UFR gère son parc grâce à un réparateur. La question est d'évaluer l'intérêt de mettre en commun la gestion du parc de photocopieuses.

Faisons les hypothèses suivantes sur le fonctionnement des machines.

- Les machines sont du même modèle.
- Chaque photocopieuse peut tomber en panne puis être réparée ; elle est alors comme neuve.
- Le temps de fonctionnement avant la première panne sera modélisé par une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ , notée  $\mathcal{E}(\lambda)$ .
- Le temps de réparation est modélisé par une variable aléatoire de loi  $\mathcal{E}(\mu)$ .
- Un réparateur disponible intervient immédiatement sur la première machine qui tombe en panne.
- Si aucun réparateur n'est disponible, une file d'attente se crée.
- Les machines tombent en panne et le réparateur travaille de manière indépendante.

### 2 Quelques remarques classiques sur les lois exponentielles

**Proposition 2.1** (Absence de mémoire). *Soit  $S$  et  $T$  deux variables aléatoires exponentielles indépendantes de paramètres respectifs  $\lambda$  et  $\mu$ . Alors, pour tout  $t > 0$ ,*

$$\mathbb{P}(T > S + t | T > S) = e^{-\lambda t}.$$

*En d'autres termes, la loi de  $T - S$  sachant  $T > S$  est encore la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .*

**Proposition 2.2.** *Soit  $I$  un ensemble fini et  $(T_k)_{k \in I}$  des v.a. exponentielles de paramètres respectifs  $(\lambda_k)_{k \in I}$ . Soit  $T = \inf_k T_k$  et  $\lambda = \sum_k \lambda_k$ . Alors, avec probabilité 1, l'infimum est atteint en un unique  $K$  (aléatoire) élément de  $I$ . De plus,  $T$  et  $K$  sont indépendantes,  $T$  suit la loi  $\mathcal{E}(\lambda)$  et pour tout  $k \in I$ ,  $\mathbb{P}(K = k) = \lambda_k / \lambda$ .*

*Démonstration.* Soit  $k \in I$  et  $t \geq 0$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(K = k, T \geq t) &= \mathbb{P}(T_k \geq t, T_j > T_k, j \neq k) = \int_t^\infty \lambda_k e^{-\lambda_k s} \mathbb{P}(T_j > s, j \neq k) ds \\ &= \int_t^\infty \lambda_k e^{-\lambda_k s} \prod_{j \neq k} e^{-\lambda_j s} ds = \int_t^\infty \lambda_k e^{-\lambda s} ds = \frac{\lambda_k}{\lambda} e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

On conclut en remarquant que les ensembles  $\{K = k\} \times \{T \geq t\}$  engendrent la tribu produit.  $\square$

### 3 Modèles à un ou plusieurs réparateurs

Dans le modèle à un réparateur, on suppose qu'une seule personne gère un parc de  $m$  machines. Notons  $X_t$  le nombre de machines en panne à l'instant  $t$ . Pour  $1 \leq n \leq m$ ,  $X_t = n$  signifie que le réparateur est en train de réparer une machine et que  $n - 1$  autres sont en panne dans la file d'attente. Si  $X_t = 0$ , toutes les machines sont en fonctionnement et le réparateur est inoccupé.

On peut généraliser ce modèle en supposant que  $m$  machines sont entretenues par  $r$  réparateurs (avec  $r < m$ ). Ainsi,  $X_t$  désignant toujours le nombre de machines en panne à l'instant  $t$ ,

- pour  $n \leq r$ ,  $X_t = n$  signifie que  $r - n$  réparateurs sont inoccupés,  $n$  machines sont en cours de réparation et aucune n'est en attente,
- pour  $n > r$ ,  $X_t = n$  signifie que  $r$  machines sont en cours de réparation, et  $n - r$  sont en attente.

### 4 Dynamique de la loi du modèle à un réparateur

Notons  $P_n(t) = \mathbb{P}(X_t = n)$  la probabilité que le système soit dans l'état  $n$  à l'instant  $t$ . Pour calculer  $P_n(t + h)$ , on remarque que si  $X_{t+h} = n$  alors l'une des conditions incompatibles suivantes est réalisée :

1.  $X_u = n$  pour tout  $u \in [t, t + h[$ ,
2.  $X_t = n - 1$  et une seule transition a lieu (de  $n - 1$  vers  $n$ ),
3.  $X_t = n + 1$  et une seule transition a lieu (de  $n + 1$  vers  $n$ ),
4. durant l'intervalle  $]t, t + h[$ , au moins deux transitions ont lieu.

*Remarque 4.1.* La probabilité pour qu'une machine, en état de marche à l'instant  $t$ , tombe en panne avant l'instant  $t + h$  est de l'ordre de  $\lambda h$  lorsque  $h$  tend vers 0. De même, si à l'instant  $t$  la photocopieuse est en train d'être réparée, elle sera à nouveau en état de marche à l'instant  $t + h$  avec une probabilité de l'ordre de  $\mu h$  lorsque  $h$  tend vers 0.

D'après les propositions 2.1 et 2.2, le temps d'attente dans l'état  $n$  est une variable aléatoire exponentielle de paramètre  $\lambda m$  si  $n = 0$ ,  $\lambda(m - n) + \mu$  pour  $n \geq 1$ . Le processus saute de  $n$  à  $n - 1$  ou  $n + 1$  avec probabilités respectives  $\mu/(\lambda(m - n) + \mu)$  et  $\lambda(m - n)/(\lambda(m - n) + \mu)$ .

On en déduit que, pour  $n \in \{1, \dots, m - 1\}$ ,

$$P_n(t + h) = P_n(t)\{1 - (m - n)\lambda h - \mu h\} + (m - n + 1)\lambda h P_{n-1}(t) + \mu h P_{n+1}(t) + o(h).$$

Ceci montre que  $P_n(t)$  est dérivable et

$$P'_n(t) = -\{(m - n)\lambda + \mu\}P_n(t) + (m - n + 1)\lambda P_{n-1}(t) + \mu P_{n+1}(t).$$

On peut procéder de même pour l'évolution de  $P_0$  et  $P_m$ . On obtient ainsi le système différentiel suivant

$$\begin{cases} P'_0(t) = -m\lambda P_0(t) + \mu P_1(t), \\ P'_n(t) = -\{(m-n)\lambda + \mu\}P_n(t) + (m-n+1)\lambda P_{n-1}(t) + \mu P_{n+1}(t) & \text{pour } 1 \leq n \leq m-1, \\ P'_m(t) = -\mu P_m(t) + \lambda P_{m-1}(t). \end{cases} \quad (1)$$

*Remarque 4.2.* Une transition  $n \rightarrow n+1$  est causée par une panne d'une machine parmi les  $m-n$  en état de marche, tandis la transition  $n \rightarrow n-1$  traduit le fait que le réparateur a achevé la maintenance d'une machine.

*Remarque 4.3.* Le modèle à plusieurs réparateurs se comporte quasiment de la même manière. On a en effet, pour  $n = 1, \dots, m-1$ ,

$$P'_n(t) = -\{(m-n)\lambda + \mu \min(n, r)\}P_n(t) + (m-n+1)\lambda P_{n-1}(t) + \mu \min(n+1, r)P_{n+1}(t).$$

Le point commun fondamental à tous ces modèles est que la matrice  $A$  possède des lignes somme nulle, des sur- et sous-diagonales à coefficients strictement positifs et soit tridiagonale.

## 5 Un peu de formalisme

Soit  $E = \{0, 1, \dots, m\}$ . Désignons respectivement par  $\mathcal{P}(E)$  et  $\mathcal{F}(E)$  les ensembles de mesures de probabilité sur  $E$  (identifiées à des vecteurs lignes) et de fonctions de  $E$  dans  $\mathbb{C}$  (identifiées à des vecteurs colonnes). Avec cette convention, on a

$$\forall \nu \in \mathcal{P}(E), \forall f \in \mathcal{F}(E), \quad \nu f = \sum_{i \in E} \nu_i f_i = \int_E f d\nu.$$

L'équation (1) assure que  $(P(t))_{t \geq 0}$  est solution de l'équation différentielle linéaire suivante :

$$\forall t \geq 0, \quad P'(t) = P(t)A,$$

où  $A = (A_{ij})_{0 \leq i, j \leq m}$  est définie par

$$A_{ij} = \begin{cases} \mu & \text{si } i = j + 1 \in \{1, \dots, m\}, \\ \lambda(m-i) & \text{si } i = j - 1 \in \{1, \dots, m\}, \\ 0 & \text{si } |i - j| \geq 2 \end{cases} \quad \text{et, pour tout } i = 0, \dots, m, \quad \sum_{j=0}^m A_{ij} = 0.$$

Plus généralement, soit  $Q(t)$  la matrice définie par  $Q_{ij}(t) = \mathbb{P}(X_t = j | X_0 = i)$ . Le raisonnement de la section 4 assure que  $(Q(t))_{t \geq 0}$  est solution de l'équation différentielle linéaire suivante :

$$\forall t \geq 0, \quad Q'(t) = AQ(t) \quad \text{et} \quad Q(0) = I, \quad (2)$$

Attention, les matrices  $Q(t)$  et  $A$  possèdent  $m+1$  lignes et  $m+1$  colonnes.

**Proposition 5.1.** *L'équation (2) admet une unique solution qui n'est autre que  $Q(t) = e^{tA}$ . De plus, si  $X_0$  suit la loi  $\nu \in \mathcal{P}(E)$  alors  $X_t$  suit la loi  $\nu Q(t)$  et, pour toute fonction  $f \in \mathcal{F}(E)$ ,*

$$\mathbb{E}f(X_t) = \nu Q(t)f.$$

*Remarque 5.2.* Pour tout  $t$ ,  $Q(t)$  est une matrice markovienne, c'est-à-dire une matrice à coefficients positifs dont la somme de chaque ligne vaut 1. En effet le vecteur colonne  $\mathbf{1}$  constant égal à 1 est vecteur propre de  $A$  associé à 0 donc vecteur propre de  $Q(t)$  associé à 1. De plus, pour  $n \in \mathbb{N}$  suffisamment grand, les coefficients de  $Q(1/n)$  sont tous positifs en vertu de la relation  $Q(1/n) = I + (1/n)A + o(1/n)$  et de la forme de  $A$ . C'est encore le cas pour tout  $t > 0$  puisque  $Q(t) = Q(1/n)^{nt}$ .

*Remarque 5.3.* Pour le modèle à plusieurs réparateurs, la matrice est donnée par

$$A_{ij} = \begin{cases} \mu \inf(n, r) & \text{si } i = j + 1 \in \{1, \dots, m\}, \\ \lambda(m - i) & \text{si } i = j - 1 \in \{1, \dots, m\}, \\ 0 & \text{si } |i - j| \geq 2 \end{cases} \quad \text{et, pour tout } i = 0, \dots, m, \quad \sum_{j=0}^m A_{ij} = 0.$$

## 6 Loi invariante éventuellement réversible

On étudie ici le régime stationnaire du processus, c'est-à-dire les mesures de probabilités laissées invariantes par la dynamique (1). Ceci revient à déterminer les distributions  $P = (p_n)_{0 \leq n \leq m}$  telles que

$$\text{si } (P_n(0))_{0 \leq n \leq m} = (p_n)_{0 \leq n \leq m} \quad \text{alors } (P_n(\cdot))_{0 \leq n \leq m} \text{ est constant au cours du temps.}$$

**Définition 6.1.** On dit que  $\nu \in \mathcal{P}(E)$  est invariante pour  $A$  si  $\nu A = 0$  ou encore si, pour toute fonction  $f \in \mathcal{F}(E)$ ,  $\int A f d\nu = 0$ .

On dit que  $\nu \in \mathcal{P}(E)$  est réversible pour  $A$  si, pour tous  $i, j \in E$ ,  $\nu_i A_{ij} = \nu_j A_{ji}$  ou encore si, pour toutes fonctions  $f, g \in \mathcal{F}(E)$ ,

$$\int g A f d\nu = \int f A g d\nu.$$

*Remarque 6.2.* Une mesure réversible pour  $A$  est invariante pour  $A$ .

Pour le modèle à un réparateur, déterminer les mesures invariantes revient à résoudre le système (1) en posant  $P'_n(t) = 0$  pour tout  $n = 0, \dots, m$ , c'est-à-dire à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \mu p_1 - m \lambda p_0 = 0, \\ \mu p_{n+1} - \lambda(m - n) p_n = \mu p_n - (m - n + 1) \lambda p_{n-1} \quad \text{pour } 1 \leq n \leq m - 1, \\ \mu p_m - \lambda p_{m-1} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

$n$	File d'attente	$p_n/p_0$	$p_n$
0	0	1	0.4845
1	0	0.6	0.2907
2	1	0.3	0.1454
3	2	0.12	0.0582
4	3	0.036	0.0175
5	4	0.0072	0.0035
6	5	0.00072	0.0003

TAB. 1 – Probabilités  $p_n$  pour  $\lambda/\mu = 0.1$ , 6 machines et 1 réparateur.

Déterminer les mesures réversibles revient, puisque  $A_{ij}$  est non nul seulement si  $|i - j| \leq 1$ , à résoudre

$$\forall i \in \{0, \dots, m-1\}, \quad p_i = \lambda(m-i) = p_{i+1}\mu.$$

**Lemme 6.3.** *Les solutions du système (3) vérifient*

$$\forall n = 0, \dots, m, \quad p_n = \frac{m!}{(m-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0.$$

*En particulier, il existe une unique mesure de probabilité invariante qui est de plus réversible et sera notée  $\nu$ .*

*Remarque 6.4.* La quantité  $p_0$  s'interprète comme la probabilité que le réparateur soit inoccupé.

Pour le modèle à plusieurs réparateurs, les distributions invariantes  $(p_n)_{0 \leq n \leq m}$  vérifient nécessairement le système suivant :

$$\begin{cases} \mu p_1 - m\lambda p_0 = 0 \\ \{\lambda(m-n) + \mu n\} p_n = \lambda(m-n+1)p_{n-1} + \mu(n+1)p_{n+1} & \text{pour } 1 \leq n < r, \\ \{\lambda(m-n) + \mu r\} p_n = \lambda(m-n+1)p_{n-1} + \mu r p_{n+1} & \text{pour } r \leq n \leq m. \end{cases} \quad (4)$$

La première équation donne le rapport  $p_1/p_0$ . De la seconde, on tire, par récurrence pour  $n < r$ ,

$$\mu(n+1)p_{n+1} = \lambda(m-n)p_n. \quad (5)$$

Enfin, pour  $n \geq r$ , on obtient, grâce à la dernière équation de (4),

$$\mu r p_{n+1} = \lambda(m-n)p_n. \quad (6)$$

On déduit de ces équations les rapports  $p_n/p_0$  puis  $p_0$  est obtenu grâce à la condition de normalisation  $\sum_n p_n = 1$ . On retrouve au passage l'unicité de la mesure de probabilité invariante et le fait que cette mesure soit également réversible.

## 7 Convergence à l'équilibre

Cette section peut être omise sans dommage pour la suite. On peut être très précis sur le spectre de  $A$ .

**Proposition 7.1.** *La matrice  $A$  admet  $m + 1$  valeurs propres distinctes  $\alpha_m < \alpha_{m-1} < \dots < \alpha_1 < \alpha_0 = 0$ .*

*Démonstration.* Il est clair que 0 est valeur propre associée au vecteur propre constant. De plus, si  $\alpha$  est valeur propre, le fait que la matrice  $A - \alpha I$  soit tridiagonale avec des sur- et sous-diagonales strictement positives assure que son noyau est de dimension un. Pour localiser les racines, on peut appliquer le lemme (méconnu mais bien utilisé souvent) de Gershgorin :

**Lemme 7.2.** *Soit  $M$  une matrice à coefficients complexes. Son spectre vérifie*

$$\text{Spec } A \subset \bigcup_i D' \left( m_{ii}, \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right),$$

où  $D'(z, r)$  désigne le disque fermé de centre  $z \in \mathbb{C}$  et de rayon  $r \geq 0$ .

Enfin, montrons que les valeurs propres sont nécessairement réelles. Soit  $f \in \mathcal{E}$  vecteur propre de  $A$  associée à la valeur propre  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Puisque  $A$  est à coefficients réels,  $\bar{f}$  est vecteur propre de  $A$  associé à  $\bar{\alpha}$ . On a donc

$$(\alpha - \bar{\alpha}) \int f \bar{f} d\nu = \int f A \bar{f} d\nu - \int \bar{f} A f d\nu = 0,$$

puisque  $\nu$  est réversible pour  $A$ . Le complexe  $\alpha$  est donc réel. □

**Corollaire 7.3.** *Pour toute probabilité  $P(0)$ , il existe  $C > 0$  tel que,*

$$\forall t \geq 0, \quad \|P(t) - \nu\| \leq C e^{\alpha_1 t},$$

où  $\alpha_1$  est définie dans la proposition 7.1 et  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^{m+1}$ .

*Démonstration.* Puisque  $\nu$  est invariante,

$$P(t) - \nu = P(0)e^{tA} - \nu = (P(0) - \nu)e^{tA}.$$

Notons  $(\nu, v^1, \dots, v^m)$  une base de vecteurs (lignes) propres (à gauche) telle que  $v^k A = \alpha_k v^k$  pour  $k = 1, \dots, m$ . Remarquons que, puisque la somme de chaque ligne de  $A$  est nulle, pour tout  $k = 1, \dots, m$ , la somme des coordonnées de  $v^k$  est nulle. Ceci assure que  $P(0) - \nu$  s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs  $(v^k)_{k=1, \dots, m}$ . D'autre part, il est clair que  $v^k e^{tA} = e^{t\alpha_k} v^k$ . Le résultat découle facilement de ces considérations. □

Le corollaire 7.3 suggère que, très rapidement, le système est dans un état très proche du régime stationnaire et justifie l'étude précise de ce régime.

	Situation 1	Situation 2
Nombre de machines	6	20
Nombre de réparateurs	1	3
Machines par réparateur	6	6+2/3
Coefficient de perte humain	0.4845	0.4042
Coefficient de perte machine	0.0549	0.01694

TAB. 2 – Comparaison de l'efficacité des deux systèmes.

## 8 Comparaison

On souhaite comparer plusieurs modèles et mesurer l'intérêt de la mutualisation des ressources. Nous nous placerons en régime stationnaire pour faire ces comparaisons. On note  $w$  le nombre moyen (sous la probabilité invariante) de machines en attente d'être réparées. Ce nombre ne prend pas en compte les machines en panne en train d'être réparées.

**Lemme 8.1.** *Pour le modèle à un réparateur, le nombre moyen de machines en attente d'être réparées est donné par*

$$w := \sum_{k=2}^m (k-1)\nu_k = m - \frac{\lambda + \mu}{\lambda}(1 - \nu_0).$$

*Démonstration.* Pour établir ce résultat, on pourra remarquer, à partir de (3), que  $\mu p_{n+1} - (m-n)\lambda p_n = 0$  pour  $n \in \{0, \dots, m-1\}$ .  $\square$

Il faut adapter de manière convenable la définition de  $w$  dans le cas d'un réparateur unique donnée dans le lemme 8.1.

Pour comparer les deux situations, on introduit le coefficient de perte machine

$$\frac{w}{m} = \frac{\text{nombre moyen de machines en attente}}{\text{nombre de machines}},$$

et le coefficient de perte humain

$$\frac{\rho}{r} = \frac{\text{nombre moyen de réparateurs inoccupés}}{\text{nombre de réparateurs}}.$$

Même avec un nombre de machines par réparateur plus grand dans le deuxième cas, on observe (par exemple dans le tableau 2) une forte diminution de la proportion de machines en attente tandis que la proportion de réparateurs inoccupés ne diminue pas de manière sensible.

## 9 Suggestions

1. On pourra commenter le modèle et discuter d'ajustements éventuels.
2. On pourra simuler des trajectoires des processus décrits.
3. On pourra démontrer la proposition 5.1 et déterminer sur un exemple l'évolution de  $t \mapsto P(t)$  grâce à l'outil informatique.
4. On pourra démontrer le lemme 6.3.
5. On pourra mettre en évidence la convergence du système vers son régime stationnaire grâce à un test du  $\chi^2$ .
6. On pourra démontrer tout ou partie des propositions 7.1 et 7.3.
7. On pourra démontrer le lemme 8.1.
8. On pourra retrouver les données du tableau 2 et les commenter.
9. On pourra illustrer informatiquement le comportement des quantités  $w/m$  et  $\rho/r$  lorsque  $m$  et  $r$  tendent vers l'infini sous la contrainte  $r/m$  tend vers  $p \in ]0, 1[$ .