

–Texte–

Décompositions d'atomes radioactifs

1 Modélisation

On considère un fragment de kryptonite. Celle-ci est constituée d'atomes radioactifs susceptibles de se décomposer en atomes instables qui se décomposent eux-mêmes pour donner une forme stable et inerte. La première décomposition est très lente et, durant l'expérience, peu d'atomes de kryptonite se seront décomposés. Un atome donné choisit de se décomposer indépendamment des autres (pas de réactions en chaîne) et sans que son âge n'ait d'influence sur son taux de décomposition. Le séjour d'un atome dans la forme instable est beaucoup plus court mais obéit au même principe d'absence de vieillissement et d'indépendance par rapport aux autres atomes.

Pour modéliser l'apparition de la forme instable, on utilise un processus de Poisson, dont nous noterons l'intensité λ . Nous supposons qu'un atome instable se décomposera à nouveau (pour rejoindre la position inerte) au bout d'un temps exponentiel dont le paramètre sera noté μ . Le processus de Poisson et les temps de séjour dans l'état instable de tous les atomes seront supposés indépendants.

On s'intéresse à X_t le nombre d'atomes au temps t présents sous la forme instable et à la façon d'estimer les paramètres du modèle.

2 Quelques remarques classiques sur les lois exponentielles

Proposition 2.1 (Absence de mémoire). *Une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ suit une loi exponentielle si et seulement si elle vérifie la propriété d'absence de mémoire :*

$$\forall s, t \geq 0, \quad \mathbb{P}(T > t + s | T > s) = \mathbb{P}(T > t).$$

Proposition 2.2. *Soit I un ensemble fini et $(T_k)_{k \in I}$ des v.a. exponentielles de paramètres respectifs $(\lambda_k)_{k \in I}$. Soit $T = \inf_k T_k$ et $\lambda = \sum_k \lambda_k$. Alors, avec probabilité 1, l'infimum est atteint en un unique K (aléatoire) élément de I . De plus, T et K sont indépendantes, T suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$ et pour tout $k \in I$, $\mathbb{P}(K = k) = \lambda_k / \lambda$.*

Démonstration. Soit $k \in I$ et $t \geq 0$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(K = k, T \geq t) &= \mathbb{P}(T_k \geq t, T_j > T_k, j \neq k) = \int_t^\infty \lambda_k e^{-\lambda_k s} \mathbb{P}(T_j > s, j \neq k) ds \\ &= \int_t^\infty \lambda_k e^{-\lambda_k s} \prod_{j \neq k} e^{-\lambda_j s} ds = \int_t^\infty \lambda_k e^{-\lambda s} ds = \frac{\lambda_k}{\lambda} e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

On conclut en remarquant que les ensembles $\{K = k\} \times \{T \geq t\}$ engendrent la tribu produit. □

3 Équations de Chapman-Kolmogorov

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on note $p_n(t) = \mathbb{P}(X_t = n)$.

Proposition 3.1. *Les fonctions $(p_n(\cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ sont de classe C^1 et satisfont le système d'équations différentielles linéaire suivant :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p'_n(t) = -(\lambda + n\mu)p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + (n+1)\mu p_{n+1}(t), \quad (1)$$

avec la convention $p_{-1}(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$, la loi initiale $(p_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ étant donnée.

Démonstration. Pour calculer $p_n(t+h)$, on remarque que si $X_{t+h} = n$ alors l'une des conditions incompatibles suivantes est réalisée :

1. $X_u = n$ pour tout $u \in [t, t+h[$,
2. $X_t = n-1$ et une seule transition a lieu (de $n-1$ vers n),
3. $X_t = n+1$ et une seule transition a lieu (de $n+1$ vers n),
4. durant l'intervalle $]t, t+h[$, au moins deux transitions ont lieu.

D'après les propositions 2.1 et 2.2, le processus reste dans l'état n un temps aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda + n\mu$ puis saute de n à $n-1$ ou $n+1$ avec probabilités respectives $n\mu/(\lambda + n\mu)$ et $\lambda/(\lambda + n\mu)$. On en déduit, par conditionnement, que

$$p_n(t+h) = p_n(t)\{1 - \lambda h - n\mu h\} + \lambda h p_{n-1}(t) + (n+1)\mu h p_{n+1}(t) + o(h).$$

Il reste à faire tendre h vers 0. □

4 Loi du nombre d'atomes

Il y a plusieurs façons de déterminer la loi de X_t .

4.1 Fonctions génératrices

On cherche à déterminer la fonction génératrice de X_t . Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et tout $s \in]-1, 1[$, on pose

$$G(s, t) := \mathbb{E}(s^{X_t}) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n p_n(t).$$

Lemme 4.1. *La fonction G est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -1, 1[\times \mathbb{R}_+$ et satisfait l'équation aux dérivées partielles suivante*

$$\partial_t G(s, t) = (1-s)[\mu \partial_s G(s, t) - \lambda G(s, t)]. \quad (2)$$

Proposition 4.2. *Si G_0 est la série génératrice de X_0 alors, pour tout $t \geq 0$ et tout $s \in]-1, 1[$,*

$$G(s, t) = \exp\left(\frac{\lambda}{\mu}(1 - e^{-\mu t(1-s)})\right) G_0(1 - e^{-\mu t} + s e^{-\mu t}).$$

Démonstration. On pourra poser $H(s, t) = \log G(s, t)$ puis faire le changement de variables $(s, \tau) = (s, (1-s)e^{-\mu t})$. En notant \tilde{H} la fonction telle que $H(s, t) = \tilde{H}(s, \tau)$, on montre que \tilde{H} s'écrit sous la forme

$$\tilde{H}(s, \tau) = \frac{\lambda}{\mu} s + h(\tau),$$

où h reste à déterminer. Ceci revient à dire que H est de la forme

$$H(s, t) = \frac{\lambda}{\mu} s + h((1-s)e^{-\mu t}).$$

La fonction h est caractérisée par le fait que $H(s, 0) = \log G_0(s)$ pour tout $s \in]-1, 1[$. □

Corollaire 4.3. *On obtient par exemple les lois de X_t lorsque X_0 est déterministe :*

$$\mathcal{L}(X_t | X_0 = 0) = \mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{\mu}(1 - e^{-\mu t})\right)$$

et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathcal{L}(X_t | X_0 = k) = \mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{\mu}(1 - e^{-\mu t})\right) * \mathcal{B}(k, e^{-\mu t}).$$

4.2 Un raisonnement plus probabiliste

Supposons dans un premier temps que $X_0 = 0$. Notons $(N_t)_{t \geq 0}$ le processus de Poisson de paramètre λ régissant l'apparition des atomes instables. Soit $t > 0$. La variable aléatoire N_t suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda t)$. De plus, sachant que $N_t = n$, la loi des n instants de saut de N sont distribués comme un n -échantillon réordonné de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0, t]$. Un atome, apparu à un instant aléatoire de loi uniforme sur $[0, t]$, est encore présent à l'instant t avec une probabilité égale à

$$q(t) := \frac{1}{t} \int_0^t (1 - F_\mu(s)) ds = \frac{1}{\mu t} (1 - e^{-\mu t}),$$

où F_μ est la fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}(\mu)$. On obtient donc, par indépendance des atomes, pour tout $k \in \mathbb{N}^1$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_t = k) &= \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(X_t = k | N_t = n) \mathbb{P}(N_t = n) \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} C_n^k q(t)^k (1 - q(t))^{n-k} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \\ &= e^{\lambda t q(t)} \frac{(\lambda t q(t))^k}{k!}. \end{aligned}$$

On en déduit donc que la loi de X_t sachant que $X_0 = 0$ est la loi de Poisson de paramètre $\lambda(1 - e^{-\mu t})/\mu$.

Remarque 4.4. Si les temps de désintégration des atomes instables ne sont plus de loi exponentielle mais sont i.i.d. de fonction de répartition F , on montre de même que la loi de X_t sachant que $X_0 = 0$ est une loi de Poisson de paramètre $\lambda \int_0^t (1 - F(s)) ds$.

Déterminer la loi de X_t sachant que $X_0 = k$, pour $k \in \mathbb{N}^*$, est très facile. Il suffit de remarquer que, puisque les temps de désintégration des atomes sont indépendants et de loi exponentielle (absence de mémoire), la loi de X_t sachant que $X_0 = k$ est la convolution de la loi de X_t sachant que $X_0 = 0$ et de la loi du nombre d'atomes non encore désintégrés à l'instant t parmi les k atomes initiaux.

Enfin la loi de X_t pour une mesure initiale donnée sera une combinaison convexe des lois précédentes.

5 Mesure invariante et entropie relative

Il est clair que, pour toute loi initiale de X_0 , la loi de X_t converge vers la loi de Poisson de paramètre λ/μ . On souhaite ici quantifier la vitesse de convergence.

Définition 5.1. Soit ν_1 et ν_2 deux mesures de probabilité sur \mathbb{R} . La relation $\nu_1 \ll \nu_2$ signifie que ν_1 est absolument continue par rapport à ν_2 . Si tel est le cas, on notera alors $\frac{d\nu_1}{d\nu_2}$ la densité de ν_1 par rapport à ν_2 . On définit l'entropie relative de ν_1 par rapport à ν_2 de la façon suivante :

$$\mathbf{Ent}(\nu_1 | \nu_2) := \begin{cases} \int \frac{d\nu_1}{d\nu_2} \log \left(\frac{d\nu_1}{d\nu_2} \right) d\nu_2 = \int \log \left(\frac{d\nu_1}{d\nu_2} \right) d\nu_1 & \text{si } \nu_1 \ll \nu_2, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

Proposition 5.2. Soit ν_1 et ν_2 deux mesures de probabilité sur \mathbb{R} . Alors $\mathbf{Ent}(\mu_1 | \mu_2)$ est positif (ou égal à $+\infty$) et nul si et seulement si $\nu_1 = \nu_2$.

Corollaire 5.3. L'entropie relative de la loi de X_t sachant que $X_0 = 0$ par rapport à la mesure invariante converge exponentiellement vite vers 0.

¹étant sous-entendu que $X_0 = 0$

6 Chaîne de Markov et estimation

Les atomes instables sont dénombrés par un compteur de type compteur Geiger qui ne peut pas fonctionner en temps continu mais fournit des observations à temps régulier. Pour $\alpha > 0$, on définit la suite de variables aléatoires $(Y_n^{(\alpha)})_{n \in \mathbb{N}} := (X_{\alpha n})_{n \in \mathbb{N}}$. Le corollaire 4.3 assure que $(Y_n^{(\alpha)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur \mathbb{N} définie par sa loi initiale et la relation

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{L}\left(Y_{n+1}^{(\alpha)} \mid Y_n^{(\alpha)} = k\right) = \mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{\mu}(1 - e^{-\mu\alpha})\right) * \mathcal{B}(k, e^{-\mu\alpha}),$$

avec la convention $\mathcal{B}(0, e^{-\mu\alpha}) = \delta_0$.

Proposition 6.1. *La chaîne de Markov $(Y_n^{(\alpha)})_{n \in \mathbb{N}}$ est irréductible, récurrente et apériodique. De plus, elle admet pour mesure de probabilité invariante la loi de Poisson de paramètre λ/μ . Elle est donc récurrente positive.*

Remarque 6.2. Cette proposition permet d'estimer λ/μ à partir de $(Y_k^{(\alpha)})_{1 \leq k \leq n}$ grâce au théorème ergodique.

Proposition 6.3. *La conclusion du théorème ergodique peut être précisée : pour tout $\alpha > 0$, il existe $\sigma^2(\alpha) > 0$ tel que*

$$\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_n^{(\alpha)} - \frac{\lambda}{\mu} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(\alpha)).$$

Remarque 6.4. On peut de plus remarquer que $\alpha \mapsto \sigma^2(\alpha)$ est croissante et non nulle en 0. De plus

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_n^{(\alpha)} \xrightarrow[\alpha \rightarrow 0, \alpha n = t]{p.s.} \frac{1}{t} \int_0^t X_s ds$$

qui est l'estimateur de λ/μ construit à partir de l'observation du processus X pour tout $t > 0$ et non plus seulement aux instants $\alpha\mathbb{N}$. On peut alors prouver un résultat analogue à la proposition 6.3 :

$$\sqrt{t} \left(\frac{1}{t} \int_0^t X_s ds - \frac{\lambda}{\mu} \right) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(0)).$$

7 Suggestions

1. On pourra présenter et commenter le modèle.
2. On pourra démontrer la proposition 3.1.
3. On pourra déterminer par la méthode de son choix la loi de X_t sachant que $X_0 = k$ pour $k \in \mathbb{N}$.
4. On pourra démontrer la proposition 5.2, calculer l'entropie relative de $\mathcal{L}(X_t | X_0 = 0)$ par rapport à $\mathcal{P}(\lambda/\mu)$ et en déduire le corollaire 5.3.
5. On pourra démontrer la proposition 6.1.
6. On pourra détailler la remarque 6.2.
7. On pourra illustrer par la simulation la proposition 6.3 et l'utiliser pour préciser l'estimation de λ/μ .
8. On pourra commenter et illustrer par la simulation la remarque 6.4. Perd-on beaucoup d'informations en n'observant pas la trajectoire à tout instant $t > 0$?