

# Homogénéisation et H-mesures

## Notes du Cours de Luc Tartar.

Isabelle Gruais

### CONTENTS

<b>1</b>	<b>Homogénéisation</b>	<b>5</b>
1.1	Introduction . . . . .	5
1.2	Le résultat de Meyers . . . . .	5
1.3	Mélanges de matériaux: la formule des tranches . . . . .	10
1.4	Bornes optimales . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Introduction à la H-convergence comme topologie</b>	<b>13</b>
2.1	La G-convergence . . . . .	13
2.2	Le caractère local de la H-convergence . . . . .	14
2.3	Le Lemme Divergence-Rotationnel . . . . .	14
2.4	Le problème des bornes optimales . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Homogénéisation de problèmes dégénérés et effets non locaux en Homogénéisation</b>	<b>16</b>
3.1	Remarque préliminaire . . . . .	16
3.2	Problèmes elliptiques dégénérés: premier exemple . . . . .	16
3.3	Problèmes elliptiques dégénérés: deuxième exemple . . . . .	17
3.4	Lien avec les opérateurs pseudo-différentiels . . . . .	19
3.5	Equation hyperbolique scalaire . . . . .	20
3.6	Le cas d'un problème elliptique dégénéré. . . . .	24
3.7	Problèmes dégénérés et transformation de Fourier: autres exemples. . . . .	25
<b>4</b>	<b>Effets non linéaires en homogénéisation et estimations de coefficients effectifs.</b>	<b>28</b>
4.1	Position du problème . . . . .	28
4.2	A propos de la turbulence . . . . .	30
4.3	Effet de mémoire . . . . .	30

<b>5</b>	<b>La Compacité par Compensation, version préliminaire des H-mesures.</b>	<b>32</b>
5.1	Homogénéisation des problèmes non linéaires; bornes sur les coefficients effectifs . . . . .	32
5.2	La méthode des fonctions-tests oscillantes . . . . .	34
5.3	Le cas monotone régulier . . . . .	36
5.4	Réalisation du cas abstrait régulier . . . . .	37
<b>6</b>	<b>Les matériaux feuilletés</b>	<b>43</b>
6.1	Retour sur le Lemme Divergence-Rotationnel . . . . .	44
6.2	Homogénéisation de l'équation de la diffusion . . . . .	45
6.3	Homogénéisation de l'équation de l'élasticité linéarisée. . . . .	45
6.4	Retour sur l'équation de diffusion . . . . .	47
6.5	Le problème de l'élasticité non linéaire . . . . .	47
6.6	Une condition abstraite . . . . .	48
<b>7</b>	<b>Compacité par compensation et estimations de bornes effectives</b>	<b>53</b>
7.1	Le Lemme Divergence-Rotationnel . . . . .	53
7.2	Généralisation: le théorème quadratique . . . . .	55
7.3	Retour à l'hypothèse de rang constant . . . . .	57
7.4	Conditions nécessaires différentielles . . . . .	58
7.5	Conditions nécessaires de convexité . . . . .	59
7.6	Retour sur le cas quadratique: exemple du jacobien . . . . .	61
7.7	Utilisation des formes différentielles . . . . .	62
7.8	Equipartition de l'énergie . . . . .	63
7.9	Equipartition de l'énergie dans les équations de Maxwell . . . . .	63
<b>8</b>	<b>Forme préliminaire des H-mesures</b>	<b>66</b>
8.1	Le cas quadratique . . . . .	66
8.2	Le théorème quadratique . . . . .	66
<b>9</b>	<b>Bornes sur les coefficients effectifs</b>	<b>70</b>
9.1	Position du problème . . . . .	70
9.2	Calcul de correcteurs . . . . .	70
9.3	Formes quadratiques et correcteurs . . . . .	72
9.4	Quelques exemples . . . . .	72
9.5	Le cas général . . . . .	74

<b>10 Les H-mesures</b>	<b>77</b>
10.1 Première idée . . . . .	77
10.2 Deuxième idée: équations aux dérivées partielles non linéaires . . . .	77
10.3 Application à la mécanique des milieux continus . . . . .	78
10.4 Lien avec la compacité par compensation . . . . .	79
10.5 Lien avec l'optique géométrique non linéaire . . . . .	80
10.6 Le modèle de la turbulence . . . . .	81
10.7 Homogénéisation et faibles amplitudes . . . . .	83
10.8 Le cas scalaire . . . . .	84
10.9 Principe de localisation . . . . .	87
<b>11 Applications des H-mesures</b>	<b>90</b>
11.1 Exemple dans $\mathbb{R}^2$ . . . . .	90
11.2 Premier lemme de commutation . . . . .	90
11.3 Second lemme de commutation . . . . .	91
11.4 Propagation des oscillations . . . . .	93
<b>12 Oscillations et effets de concentration: exemples</b>	<b>98</b>
12.1 Introduction . . . . .	98
12.2 Effets de concentration . . . . .	98
12.3 Oscillations modulées . . . . .	99
12.4 Homogénéisation et faible amplitude . . . . .	100
12.5 Le problème des conditions initiales . . . . .	102
12.6 Changement de variable . . . . .	104
12.7 H-mesures et régularité . . . . .	105
12.8 Bornes en homogénéisation . . . . .	106
12.9 Retour sur l'homogénéisation des faibles amplitudes. . . . .	107
<b>13 variantes des H-mesures.</b>	<b>109</b>
13.1 Les mesures de Wigner . . . . .	109
13.2 Les mesures micro-locales . . . . .	109
13.3 Propagation et interactions d'oscillations . . . . .	110
13.4 Les mesures semi-classiques . . . . .	115

<b>14 Quelques exemples de traitement des oscillations en physique</b>	<b>118</b>
14.1 Introduction . . . . .	118
14.2 Le problème des corrélations . . . . .	118
14.3 Le problème des échelles caractéristiques . . . . .	119
14.4 Retour sur la théorie de la diffraction et commentaires . . . . .	120
14.5 Synthèse . . . . .	122
<b>References</b>	<b>124</b>

# 1 HOMOGÉNÉISATION

## 1.1 Introduction

Le mot apparaît avec I. Babuska (1974) pour une distribution périodique de barres de réacteurs parallèles entre eux, de section homothétique à un petit paramètre  $\varepsilon$  destiné à tendre vers zéro. On cherche une matrice  $A_{eff}$  caractéristique du matériau obtenu à la limite, en un sens à préciser.

On doit à [4] une étude systématique de l'homogénéisation des milieux périodiques utilisant des développements asymptotiques formels multi-échelles du type

$$u_0(x) + \varepsilon u_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \dots$$

où  $u_1(x, y) \dots$ , etc. sont périodiques en la seconde variable  $y$ . De ce point de vue, E. Sanchez-Palencia met en évidence l'opposition entre les échelles microscopique et macroscopique d'un même matériau, et inspire les travaux de F. Murat et L. Tartar (1974) qui étendent la notion d'homogénéisation à des matériaux non périodiques en considérant des suites qui convergent faiblement au lieu de moyenniser sur des petites périodes, indépendamment de l'école italienne (S. Spagnolo, E. de Giorgi) dont ils ne connaissent pas encore les premiers travaux sur la G-convergence (1967-1968). Dans la perspective de ce Cours, on retiendra de Spagnolo l'étude de la régularité des opérateurs différentiels du second ordre basée sur une inégalité due à Meyers. F. Murat et L. Tartar revisiteront et amélioreront certains résultats techniques.

On doit à J-L. Lions l'application au cas de l'élasticité linéaire et isotrope. Celui-ci développe des variantes de méthodes d'approximation de problèmes effectifs, dont les méthodes dites de l'énergie, de dualité et des fonctions oscillantes, mais sans résultat de régularité du type de Meyers. En particulier, la méthode de compacité et la méthode de monotonie *cf* [19] sont deux techniques très utiles lorsqu'on veut passer de la dimension finie à la dimension infinie dans des problèmes d'approximation de problèmes non linéaires ( en particulier pour les méthodes numériques.) Dans le cas des équations aux dérivées partielles, une autre variante de la méthode de monotonie est la méthode de convexité: c'est un outil essentiel de la méthode de minimisation et elle est à la base des méthodes de relaxation en contrôle optimal.

## 1.2 Le résultat de Meyers

Avant de décrire le point de vue de F. Murat et L. Tartar, on doit préciser que certains résultats de S. Spagnolo ont été retrouvés en utilisant les mêmes résultats de régularité que ce dernier, et en particulier le théorème de régularité de Meyers [21].

Soit le problème modèle: trouver  $u$  défini dans un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  solution du problème aux limites

$$-\operatorname{div}(A \operatorname{grad}(u)) = \operatorname{div} g =: f, \quad u \in H^1(\Omega). \quad (1.1)$$

auquel on adjoint des conditions aux limites. Si la matrice  $A$  vérifie:

$$\alpha |\xi|^2 \leq (A(x)\xi \cdot \xi) \leq \beta |\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \quad \text{p.p. en } x \in \Omega$$

dans un domaine assez régulier et si le second membre est donné avec  $g \in L^p(\Omega)$ ,  $p \geq 2$ , peut-on avoir  $\text{grad}(u) \in L^p(\Omega)$ ? La réponse est négative en général, car les coefficients de la matrice  $A$  sont le plus souvent discontinus dans les problèmes réels.

On doit à De Giorgi, Nash-Moser, etc. l'étude du cas des opérateurs du second ordre. A leur suite, Meyers montre le:

**Théorème 1.1** *Il existe un exposant critique  $p_c$  tel que si  $2 \leq p < p_c$ , alors la solution  $u$  de (1.1) vérifie*

$$\text{grad}(u) \in L^p(\Omega)^N$$

et on a l'estimation:

$$\|\text{grad}(u)\|_{L^p(\Omega)} \leq C(\Omega) \sum_i \|f_i\|_{L^p(\Omega)}$$

Soit alors la suite de problèmes

$$-\text{div}(A_n \text{grad}(u_n)) = \text{div } g_n =: f_n; \tag{1.2}$$

$$g_n \in L^p(\Omega) \text{ borné}; \tag{1.3}$$

$$+ \text{ conditions aux limites.} \tag{1.4}$$

$$u_n \in H_{loc}^1(\Omega) \tag{1.5}$$

D'après le résultat de Meyers cf le *Théorème 1.1*, la suite  $|\text{grad}(u_n)|$  est bornée dans un espace  $L^q(\Omega)$  pour un exposant  $q$  tel que  $2 < q < \min(p, p_c)$ . En général: la suite des énergies  $(A_n \text{grad}(u_n) \cdot \text{grad}(u_n))$  est bornée dans  $L_{loc}^1(\Omega)$  et converge au sens des mesures vagues. Mais le résultat de régularité énoncé précédemment dit que dans ce cas, la suite des énergies  $(A_n \text{grad}(u_n) \cdot \text{grad}(u_n))$  est bornée dans un espace  $L_{loc}^r(\Omega)$  avec  $r > 1$  et qu'elle converge vers une fonction. Or, ce résultat n'apparaît pas dans la formulation de type problème aux limites privilégiée par (1.2)-(1.5). C'est pourquoi on se limite à une classe de matrices  $A_n \in \mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega)$  caractérisées par  $(0 < \alpha \leq \beta < +\infty)$

$$(A_n(x)\lambda \cdot \lambda) \geq \alpha |\lambda|^2 \tag{1.6}$$

$$\text{et } (A_n(x)\lambda \cdot \lambda) \leq \frac{1}{\beta} |A_n(x)\lambda|^2, \tag{1.7}$$

$$\text{p.p. en } x \in \Omega, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^N. \tag{1.8}$$

On verra que l'intérêt de cette classe de matrices réside dans leur compacité pour la topologie de la H-convergence.

**Remarque 1.2** La classe  $\mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega)$  est formée de matrices non nécessairement symétriques (cf l'effet Hall). Cependant, dans le cas symétrique, on se ramène à la caractérisation:

$$\alpha I \leq A_n(x) \leq \beta I \quad \text{p.p. en } x \in \Omega.$$

au sens des formes quadratiques associées.

**Remarque 1.3** Si  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$  vérifie:

$$(A\xi \cdot \xi) \geq \frac{1}{\beta} |\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N$$

alors

$$|A\xi| \leq \beta |\xi|, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Mais il n'y a pas de réciproque, car si  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$  vérifie:  $(A\xi \cdot \xi) \geq \alpha |\xi|^2$  et  $|A\xi| \leq M |\xi|$ , alors on peut seulement en déduire que:  $(A\xi \cdot \xi) \geq \frac{\alpha}{M^2} |A\xi|^2$  sans hypothèse supplémentaire de symétrie. Alors que si  $A$  est symétrique, on a évidemment:  $(A\xi \cdot \xi) \geq \frac{1}{M} |\xi|^2$ .

Plus précisément, on va montrer qu'il existe une topologie, dite de la  $H$  – convergence, sur  $\mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega)$  qui permet le passage à la limite dans une équation au sens suivant: si  $u_n$  est solution de

$$-\operatorname{div}(A_n \operatorname{grad}(u_n)) = f_n \in H_{loc}^{-1}(\Omega), \quad f_n \in \text{compact de } H_{loc}^{-1}(\Omega) \quad \text{fort}$$

alors il existe une suite extraite, encore notée  $u_n$ , telle que

$$u_n \rightharpoonup u_\infty \quad H_{loc}^1(\Omega) \quad \text{faible} \tag{1.9}$$

$$A_n \operatorname{grad}(u_n) \rightharpoonup A_{eff} \operatorname{grad}(u_\infty) \quad (L_{loc}^2(\Omega))^N \quad \text{faible.} \tag{1.10}$$

**Remarque 1.4** Par rapport au point de vue de Meyers et de la  $G$ -convergence, la théorie de la  $H$ -convergence introduit la nouvelle idée qui consiste à s'intéresser aussi à la limite de la suite  $D_n = A_n \operatorname{grad}(u_n)$ ,  $n \rightarrow +\infty$ , éventuellement après extraction d'une sous-suite. En effet, si  $A_n$  est changée en  $A_n + B$  où  $B$  est constante et anti-symétrique, "assez petite" pour préserver la propriété d'uniforme ellipticité, alors on ne modifie pas l'opérateur  $-\operatorname{div}(A_n \operatorname{grad}(u_n))$ , de sorte qu'une théorie qui ne s'intéresse qu'à ce dernier et qui ignore le point de vue variationnel ne peut pas calculer  $A_{eff}$  telle que

$$A_n \operatorname{grad}(u_n) \rightharpoonup A_{eff} \operatorname{grad}(u_\infty) \tag{1.11}$$

$$\operatorname{grad}(u_n) \rightharpoonup \operatorname{grad}(u_\infty). \tag{1.12}$$

La topologie sous-jacente à la  $H$ -convergence est définie sur la réunion de tous les ensembles  $\mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega)$ , qui s'écrit encore  $X = \cup_{n \geq 1} \mathcal{M}(\frac{1}{n}, n, \Omega)$  et qui est la

topologie la moins fine rendant continues une classe d'applications données. Plus précisément, pour  $f \in H^{-1}(\Omega)$  donnée, il existe deux telles applications: celle définie par  $A \in X \mapsto u \in H_0^1(\Omega)$  faible et celle définie par  $A \in X \mapsto \text{grad}(u) \in L^2(\Omega)$  faible où  $u$  est solution de  $-\text{div}(A \text{grad}(u)) = f$ . Si on se restreint à  $\mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega)$ , il revient au même de faire varier  $f$  dans un ensemble dénombrable borné dont les combinaisons linéaires sont denses dans  $H^{-1}(\Omega)$ : alors  $u$  et  $A \text{grad}(u)$  varient dans des ensembles bornés resp. de  $H_0^1(\Omega)$  et  $L^2(\Omega; \mathbb{R}^N)$  métrisables pour leurs topologies respectives. Ainsi, la restriction à  $\mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega)$  de cette topologie est définie par une famille dénombrable de semi-distances et est donc elle-même définie par une semi-distance. On vérifie ensuite qu'il s'agit en fait d'une distance par un argument d'unicité de la limite: si  $A_n \xrightarrow{H} A_{eff}$  et si  $A_n \xrightarrow{H} B_{eff}$  pour deux limites  $A_{eff}$  et  $B_{eff}$ , alors

$$A_{eff} \text{grad}(u_\infty) = B_{eff} \text{grad}(u_\infty) \quad \text{p.p. dans } \Omega,$$

$\forall f \in H^{-1}(\Omega)$  donnée au départ, et cela est vrai  $\forall u_\infty \in H_0^1(\Omega)$ . On conclut en prenant successivement  $u_\infty = x_j$ ,  $j = 1, \dots, N$  dans  $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$ , ce qui entraîne que  $A_{eff} = B_{eff}$  p. p. dans  $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$ ,  $\forall \omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$ . En pratique, on n'aura pas besoin d'autres propriétés de cette topologie; mais la métrisabilité est nécessaire à la justification de certains arguments.

On a le

**Théorème 1.5** *Pour toute suite  $A_n \in \mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega)$ , il existe une sous-suite  $A_m$  et  $A_{eff} \in \mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega)$  t.q.  $A_m \xrightarrow{H} A_{eff}$ .*

Du théorème 1.5, on déduit que si la suite de matrices  $(A_n)$  des problèmes considérés est  $H$ -convergente vers  $A_{eff} \in \mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega)$ , alors

$$A_m \text{grad}(u_m) \rightharpoonup A_{eff} \text{grad}(u_\infty) \quad \text{dans } L_{loc}^2(\Omega) \text{ faible}$$

au moins pour une sous-suite extraite.

En fait, le passage à la limite par  $H$ -convergence ne dépend pas du choix des conditions aux limites sur le bord  $\partial\Omega$ . Plus précisément:

**Proposition 1.6** *Si  $A_n \xrightarrow{H} A_{eff}$  et si  $u_n \rightharpoonup u_\infty$  dans  $H_{loc}^1(\Omega)$  faible, avec  $\text{div}(A_n \text{grad}(u_n)) \in \text{compact de } H_{loc}^{-1}(\Omega)$  fort, alors  $A_n \text{grad}(u_n) \rightharpoonup A_{eff} \text{grad}(u_\infty)$  dans  $L_{loc}^2(\Omega; \mathbb{R}^N)$  faible.*

La Proposition 1.6 dit que les conditions aux limites n'interviennent pas tant que la suite des  $u_n$  reste bornée. (S. Spagnolo le remarquait déjà dans le cadre de la  $G$ -convergence). Ici, la  $H$ -convergence a été définie pour des problèmes de Dirichlet, mais le résultat à l'intérieur de  $\Omega$  serait le même si on imposait d'autres conditions aux limites dès lors que l'on peut appliquer le Lemme de Lax-Milgram. En effet, on se ramène à la situation suivante. Soit  $V$  un espace de Hilbert séparable ( $V = H_0^1(\Omega)$  dans le cas usuel que l'on a en vue), muni de sa norme canonique  $\|\cdot\|$ ,  $V'$  l'espace dual de  $V$  et  $\|\cdot\|_*$  la norme usuelle sur  $V'$ . On note  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le crochet de dualité entre  $V$  et  $V'$  et on considère une suite bornée  $\mathcal{A}_n \in \mathcal{L}(V, V')$  d'opérateurs: par



exemple  $\mathcal{A}_n u = -\operatorname{div}(A_n \operatorname{grad}(u))$ . On suppose que les  $\mathcal{A}_n$  satisfont une condition d'uniforme V-ellipticité, soit

$$(A_n \xi \cdot \xi) \geq \alpha |\xi|^2 \quad (1.13)$$

$$|A_n \xi| \leq M |\xi|, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \quad \text{p.p. en } x \in \Omega \quad (1.14)$$

et, dans le cas abstrait

$$\langle \mathcal{A}_n u, u \rangle \geq \alpha \|u\|^2, \quad (1.15)$$

$$\|\mathcal{A}_n u\|_* \leq M \|u\|, \quad \forall u \in V. \quad (1.16)$$

Alors, le Lemme de Lax-Milgram dit que:

**Lemme 1.7** *Il existe une sous-suite  $\mathcal{A}_m$  et un opérateur linéaire continu  $\mathcal{A}_{eff} : V \rightarrow V'$  tels que  $\forall f \in V'$ , la suite  $u_m$  des solutions de  $\mathcal{A}_m u_m = f$  converge faiblement dans  $V$  vers la solution  $u_\infty$  de  $\mathcal{A}_{eff} u_\infty = f$ . De plus, on a les inégalités*

$$\langle \mathcal{A}_{eff} u, u \rangle \geq \alpha \|u\|^2, \quad (1.17)$$

$$\|\mathcal{A}_{eff} u\|_* \leq \frac{M}{\alpha^2} \|u\|, \quad \forall u \in V. \quad (1.18)$$

où la constante  $\frac{M}{\alpha^2}$  peut être remplacée par  $M$  si tous les  $\mathcal{A}_n$  sont symétriques.

Le choix des conditions aux limites de Dirichlet a l'avantage de ne pas imposer d'hypothèses de régularité supplémentaires sur le bord  $\partial\Omega$ .

Dans le cas de la dimension  $N = 1$ , on vérifie en outre que

$$\frac{1}{A_n} \rightharpoonup \frac{1}{A_{eff}} \quad L^\infty(\Omega) \quad \text{faible} \quad *.$$

(i) **EXEMPLE DU COURANT ÉLECTRIQUE** L'équation de balance type s'écrit  $\operatorname{div} j =$  second membre, où le courant  $j$  est relié au champ électrique par une relation de constitution  $j = \sigma E$ , le coefficient scalaire  $\sigma = A$  est la conductivité, tandis que l'inverse  $\frac{1}{A}$  est la résistivité. Lorsque des résistances  $R_i$  sont montées en série, on obtient un système équivalent à une résistance  $R = \sum R_i$ . Cette dernière formule est à la base des formules obtenues dans le cas de matériaux en tranches de conductivités  $\alpha, \beta$  alternativement (cf les travaux de Landau-Lifschitz).

On sait calculer les constantes caractéristiques des mélanges de matériaux et il est intéressant de comparer ces résultats avec ceux que fournit la théorie de la compacité par compensation via la matrice  $A_{eff}$ . Ainsi, la loi d'Ohm  $j = \sigma E$  relie le courant électrique  $j$  au champ électrique  $E$  par la conductivité  $A = \sigma$  d'inverse  $\frac{1}{A} = \frac{1}{\sigma} = R$  appelée la résistivité. La formule des mélanges due à Landau-Lifschitz s'écrit formellement:  $\sum_i R_i = R$ , c'est-à-dire:  $\sum_i \frac{1}{\sigma_i} = \frac{1}{\sigma}$ .

### 1.3 Mélanges de matériaux: la formule des tranches

Soit un mélange de deux matériaux isotropes de conductivités  $\alpha$ ,  $\beta$  resp. On le modélise donc par une matrice diagonale (isotrope):  $A_n = a_n(x)I$  où  $a_n(x) = \alpha \chi_n(x) + \beta (1 - \chi_n(x))$  pour une suite  $\chi_n$  de fonctions caractéristiques. On suppose que:

$$\chi_n \rightharpoonup \theta, \quad L^\infty(\Omega) \text{ faible } *$$

où  $\theta(x)$  représente la proportion du matériau de conductivité  $\alpha$  au voisinage de  $x$ . On cherche à caractériser le mélange sous la forme: si  $A_n \xrightarrow{H} A^{eff}$ ,  $A_n \in \mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega)$ , alors  $A^{eff} \in \mathcal{K}(\alpha, \beta, \Omega)$  où  $\mathcal{K}(\alpha, \beta, \Omega)$  reste à préciser.

Alors, on peut montrer que: les valeurs propres de  $A^{eff}$  sont dans un intervalle  $[\lambda_-(\theta), \lambda_+(\theta)]$  dont les extrémités sont définies par

$$\lambda_+(\theta) = \theta \alpha + (1 - \theta) \beta, \quad (1.19)$$

$$\frac{1}{\lambda_-(\theta)} = \frac{\theta}{\alpha} + \frac{1 - \theta}{\beta}. \quad (1.20)$$

En effet, ce résultat est une conséquence de la

**Proposition 1.8** *Soit  $A_n \in \mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega)$  et  $A_n \xrightarrow{H} A^{eff}$ . Si  $(A_n)^T = A_n$ ,  $\forall n$ , p.p. dans  $\Omega$  et si*

$$A_n \rightharpoonup A_+, \quad L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N}) \text{ faible } * \quad (1.21)$$

$$(A_n)^{-1} \rightharpoonup (A_-)^{-1}, \quad L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N}) \text{ faible } * \quad (1.22)$$

alors

$$A_- \leq A^{eff} \leq A_+$$

au sens des formes quadratiques associées.

Dans le cas particulier où  $N = 2$ , les calculs s'explicitent pour donner les bornes

$$\alpha \leq \frac{\alpha \beta}{\alpha + \beta - \max(\lambda_1, \lambda_2)} \leq \min(\lambda_1, \lambda_2) \quad (1.23)$$

$$\max(\lambda_1, \lambda_2) \leq \alpha + \beta - \frac{\alpha \beta}{\min(\lambda_1, \lambda_2)} \leq \beta. \quad (1.24)$$

Ces bornes sont optimales. En effet: on utilise la formule des tranches qui, en dimension  $N$  fournit une matrice  $A^{eff}$  avec une valeur propre égale à  $\lambda_-(\theta)$  de vecteur propre associé perpendiculaire aux tranches et  $N - 1$  valeurs propres égales à  $\lambda_+(\theta)$  de vecteurs propres associés parallèles aux tranches, de sorte que pour  $N = 2$ , tous les points sur la frontière de l'ensemble décrit par les formules (1.25)-(1.26) ci-dessous

correspondent à des matériaux feuilletés:

$$\sum_{j=1}^N \frac{1}{\lambda_j - \alpha} \leq \frac{1}{\lambda_-(\theta) - \alpha} + \frac{N-1}{\lambda_+(\theta) - \alpha}, \quad (1.25)$$

$$\sum_{j=1}^N \frac{1}{\beta - \lambda_j} \leq \frac{1}{\beta - \lambda_+(\theta)} + \frac{N-1}{\beta - \lambda_-(\theta)}. \quad (1.26)$$

Le cas  $N = 1$  donne  $A^{eff} = \lambda_-(\theta)$ . Le cas  $N = 2$  peut se représenter graphiquement par un diagramme ([24]): l'ensemble  $\mathcal{K}(\alpha, \beta, \Omega)$  introduit au début de ce paragraphe est alors la surface  $K(\theta)$  du plan délimitée par deux arcs d'équations respectives

$$\frac{1}{\lambda_1 - \alpha} + \frac{1}{\lambda_2 - \alpha} = \frac{1}{\lambda_-(\theta) - \alpha} + \frac{1}{\lambda_+(\theta) - \alpha}, \quad (1.27)$$

$$\frac{1}{\beta - \lambda_1} + \frac{1}{\beta - \lambda_2} = \frac{1}{\beta - \lambda_-(\theta)} + \frac{1}{\beta - \lambda_+(\theta)} \quad (1.28)$$

qui se coupent aux points de coordonnées  $(\lambda_1 = \lambda_+(\theta), \lambda_2 = \lambda_-(\theta))$  et  $(\lambda_1 = \lambda_-(\theta), \lambda_2 = \lambda_+(\theta))$  symétriques par rapport à la première diagonale.

Plus précisément ([24]): si  $e$  est un vecteur unitaire et si  $a_n(x) = \tilde{a}_n(x \cdot e)$  avec  $\tilde{a}_n = \chi_n \alpha + (1 - \chi_n) \beta$  où  $(\chi_n)$  est une suite de fonctions caractéristiques convergeant dans  $L^\infty$  faible\* vers  $\theta$ ,  $\theta(x)$  représentant la proportion de matériau  $\alpha$  au voisinage de  $x$ , alors  $a_n(x) I$  H-converge vers  $A^{eff}$  où  $A^{eff}(x)$  admet  $e$  pour vecteur propre de valeur propre  $\lambda_-(\theta(x \cdot e))$  et le sous-espace orthogonal est sous-espace propre pour la valeur propre  $\lambda_+(\theta(x \cdot e))$ .

Dans le cas d'un matériau effectif isotrope, c'est-à-dire si  $A^{eff} = \lambda I$ , (1.25)-(1.26) équivaut à

$$\nu(\alpha, \beta; 1 - \theta) \leq \lambda \leq \nu(\alpha, \beta; \theta) \quad (1.29)$$

où  $\nu(\alpha, \beta; \theta)$  est donné par

$$\frac{\nu - \beta}{\nu + (N-1)\beta} = \theta \frac{\alpha - \beta}{\alpha + (N-1)\beta}.$$

Cette formule correspond à un calcul explicite où une boule composée d'un coeur de matériau  $\alpha$  et d'une écorce de matériau  $\beta$  est plongée dans le matériau  $\nu$ . Ces bornes apparaissent pour la première fois dans les travaux de Hashin et Shtrikman [15]

#### 1.4 Bornes optimales

La théorie de la compacité par compensation fournit ainsi comme condition nécessaire les bornes de Hashin-Shtrikman [14, 16] pour le mélange de deux matériaux isotropes dont la matrice effective est aussi isotrope. Un calcul direct classique en théorie des matériaux permet de montrer que ces bornes sont en fait optimales, bien qu'elles

n'apparaissent pas comme "condition suffisante" de la théorie de la compacité par compensation.

Le cas d'un matériau effectif général est plus compliqué puisque le calcul des coefficients effectifs fait alors intervenir des ellipsoïdes confocaux. Pour interpréter les bornes de Hashin-Shtrikmann associées à des matériaux paramétrés par  $\theta \in [0, 1]$ , L. Tartar utilise un recouvrement de Vitali par des systèmes de sphères concentriques de plus en plus petites. Enfin, la généralisation aux mélanges de trois matériaux n'est pas immédiate. Comme le fait remarquer G. Milton [3, 22, 23], il peut être plus avantageux d'enfermer la sphère la plus conductrice entre les deux autres matériaux, le plus faiblement conducteur étant à l'intérieur. En effet, cela force les lignes de courant à se concentrer autour de la sphère intérieure peu conductrice, ce qui tend à renforcer la conductivité de la sphère intermédiaire.

**Remarque 1.9** *On connaît plusieurs procédés de fabrication explicites plus ou moins compliqués de matrices  $A_n$  qui convergent vers  $A^{eff}$  donnée: l'un d'entre eux généralise au cas des ellipsoïdes confocaux les calculs qui dans le cas des boules ont conduit à (1.29) et cela fait apparaître naturellement les inégalités (1.25)-(1.26).*

**Remarque 1.10** *Les problèmes d'optimisation de formes procèdent du même ordre d'idées [32].*

## 2 INTRODUCTION À LA H-CONVERGENCE COMME TOPOLOGIE

### 2.1 La G-convergence

Ce terme a été introduit par S. Spagnolo en référence à la convergence de noyaux de Green. Plus précisément: soit à résoudre

$$-\operatorname{div}(A \operatorname{grad}(u)) = f \in H^{-1}(\Omega), \quad (2.1)$$

$$u \in H_0^1(\Omega) \quad (2.2)$$

où  $A$  est un tenseur symétrique vérifiant une condition d'uniforme ellipticité:

$$\alpha |\xi|^2 \leq (A \xi \cdot \xi) \leq \beta |\xi|^2, \quad (2.3)$$

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^N, \quad \text{p.p. en } x \in \Omega. \quad (2.4)$$

On note  $\mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega)$  l'ensemble des tenseurs symétriques vérifiant (2.3). Le théorème de Lax-Milgram dit que l'application

$$\mathcal{A}: H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega) \quad u \mapsto f, \quad \text{où } -\operatorname{div}(A \operatorname{grad}(u)) = f$$

est un isomorphisme. De plus, si  $f$  est assez régulière, alors  $u = \mathcal{A}^{-1}f$  est Hölder continue:  $u \in C^{0,\alpha}$  et peut s'exprimer sous la forme

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy, \quad \forall x \in \Omega$$

où  $G$  est un noyau (de Green) positif, pour lequel on sait établir des propriétés de régularité. Pour une suite  $A_n \in \mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega)$ , et pour  $f$  assez régulière, les solutions  $u_n = \mathcal{A}_n^{-1}f$  sont équicontinues et, au moins pour une suite extraite, elles convergent quand  $n \rightarrow \infty$ , vers une fonction  $u_\infty$ . De même, quitte à extraire à nouveau, la suite  $G_n$  des noyaux converge, fortement hors de la diagonale, vers un noyau  $G_\infty$ . la question naturelle est alors: le noyau  $G_\infty$  est-il le noyau de Green d'un opérateur  $A_\infty$  du même type que les  $A_n$ ? Si les  $A_n$  sont isotropes, de la forme  $A_n = a_n I$ , la réponse est non en général: car  $A_\infty \neq c(x)I$  dans le cas général.

Mais si on suppose seulement que les  $A_n$  sont dans  $\mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega)$ , alors S. Spagnolo a montré que la réponse devient oui, c'est-à-dire que  $A_\infty \in \mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega)$ . On dit alors que la suite  $A_n$  (après extraction éventuellement) est G-convergente vers  $A_\infty$ .

S. Spagnolo a montré que la G-convergence ainsi définie a un caractère local, c'est-à-dire: si  $A_n \xrightarrow{G} A_{eff}$  et si  $B_n \xrightarrow{G} B_{eff}$  avec  $A_n = B_n$ ,  $\forall n$ , p.p. dans  $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$  pour une partie mesurable  $\omega$  de  $\Omega$ , alors  $A_{eff} = B_{eff}$  p.p. dans  $\omega$ . Il a aussi montré que la G-limite obtenue ne dépend pas des conditions aux limites.

Ce sont les travaux de E. Sanchez-Palencia [26, 27] qui aidèrent à comprendre comment la convergence faible dans le cadre d'un problème mathématique d'optimisation de forme permettait aussi de calculer les propriétés effectives d'un mélange et d'associer à un point de vue microscopique un point de vue macroscopique en considérant des suites faiblement convergentes au lieu de moyennes sur de petites périodes.

## 2.2 Le caractère local de la H-convergence

Le résultat suivant (F. Murat, L. Tartar) dit que la H-convergence est une propriété locale et étend le résultat analogue de S. Spagnolo relatif à la G-convergence.

**Proposition 2.1** *Si une suite  $A_n \in \mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega)$  est H-convergente vers  $A_{eff}$  et si  $\omega \subset \Omega$  est un ouvert, alors la suite des restrictions  $A_n|_{\omega}$  est H-convergente vers  $A_{eff}|_{\omega}$ . En particulier, si une suite  $B_n \in \mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega)$  est H-convergente vers  $B_{eff}$  avec  $A_n = B_n$ ,  $\forall n$ , p.p. dans  $\omega$ , alors  $A_{eff} = B_{eff}$  p.p. dans  $\omega$ .*

En fait, dans le cas symétrique, S. Spagnolo considérait un ensemble  $\omega$  mesurable et utilisait le théorème de régularité de Meyers pour conclure. Ici, on raisonne également à l'aide du théorème de régularité de Meyers pour montrer que plus généralement: si  $A_n = B_n$   $\forall n$ , p.p. dans  $\omega$  mesurable et si  $A_n$  et  $B_n \in \mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega)$  sont H-convergentes vers  $A_{eff}$  et  $B_{eff}$  resp., alors  $A_{eff} = B_{eff}$  p.p. dans  $\omega$ .

## 2.3 Le Lemme Divergence-Rotationnel

Le Lemme Divergence-Rotationnel démontré par F. Murat et L. Tartar en 1974 donne un moyen de calculer systématiquement les caractéristiques des matériaux en tranches.

**Lemme 2.2** *Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un ouvert. On suppose que:*

$$E^n \rightharpoonup E^\infty \quad L^2_{loc}(\Omega; \mathbb{R}^N) \text{ faible}, \quad (2.5)$$

$$D^n \rightharpoonup D^\infty \quad L^2_{loc}(\Omega; \mathbb{R}^N) \text{ faible}, \quad (2.6)$$

$$\operatorname{div} D_n \in \text{compact de } H^{-1}(\Omega) \text{ fort} \quad (2.7)$$

$$\operatorname{rot} E_n \in \text{compact de } H^{-1}(\Omega; \mathbb{R}^{N(N-1)/2}) \text{ fort} \quad (2.8)$$

Alors:

$$\int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^N E_i^n D_i^n \right) \varphi \, dx \rightarrow \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^N E_i^\infty D_i^\infty \right) \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c(\Omega)$$

**Remarque 2.3** *On dit que*

$$\sum_{i=1}^N E_i^n D_i^n \rightharpoonup \sum_{i=1}^N E_i^\infty D_i^\infty$$

*au sens de la topologie des mesures vagues notée  $\sigma(L^1(\Omega); \mathcal{C}_c(\Omega))$*

**Remarque 2.4** *Le choix des fonctions tests  $\varphi$  est limité. Ainsi,  $\varphi$  ne peut pas être la fonction caractéristique d'un ensemble régulier  $\omega$ . Néanmoins, L. Tartar a remarqué que la théorie de la H-mesure autorise des fonctions-tests  $\in L^\infty \cap VMO$  au moyen du lemme de commutation dû à Coifman, Rochberg, Weiss. En particulier,  $\varphi \in L^\infty \cap VMO$  convient aussi dans le Lemme divergence-rotationnel 2.2.*

## 2.4 Le problème des bornes optimales

On considère le cas général d'un mélange de  $m$  matériaux en proportions  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$  resp. de tenseurs  $M_1, \dots, M_m$  symétriques non nécessairement isotropes. On suppose que pour  $j = 1, \dots, m$ ,  $M_j \in \mathcal{M}(\alpha_j, \beta_j, \Omega)$  et que l'on a  $m$  suites  $\chi_1^{(\mathbb{n})}, \dots, \chi_m^{(\mathbb{n})}$  de fonctions caractéristiques d'ensembles mesurables formant une partition de  $\Omega$  telle que:  $\chi_i^{(\mathbb{n})} \chi_j^{(\mathbb{n})} = 0, \forall i \neq j, \sum_{j=1}^m \chi_j^{(\mathbb{n})} = 1$  p.p. dans  $\Omega$  et que:

$$\chi_j^{(\mathbb{n})} \rightharpoonup \theta_j \quad \text{dans } L^\infty(\Omega) \text{ faible } *, \quad j = 1, \dots, m.$$

Alors, la théorie dit que, au moins pour une suite extraite, la suite

$$A^{(\mathbb{n})} = \sum_{j=1}^m \chi_j^{(\mathbb{n})} R(x)^T M_j R(x)$$

est H-convergente dans  $\mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega)$  où:  $R(x)$  est une matrice de rotation décrivant la géométrie du problème,  $\alpha = \min \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ ,  $\beta = \max \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ . On note  $\mathcal{K}(\theta_1, \dots, \theta_m; M_1, \dots, M_m)$  l'ensemble des matrices effectives  $A_{eff}$  obtenues en mélangeant les matériaux  $M_1, \dots, M_m$  avec les proportions exactes  $\theta_1, \dots, \theta_m$ . On ne sait pas caractériser en général cet ensemble. Le seul cas connu est celui où  $m = 2$  et  $M_1 = \alpha I$ ,  $M_2 = \beta I$ . De plus,  $\mathcal{K}(\theta_1, \dots, \theta_m; M_1, \dots, M_m)$  n'est pas nécessairement convexe: en dimension  $N = 2$ , avec  $m = 1$  matériau de matrice  $M_1$  symétrique de valeurs propres distinctes  $\alpha < \beta$ ,  $\mathcal{K}(1, M_1)$  est l'ensemble des matrices symétriques de valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2 \in [\alpha, \beta]$  telles que  $\lambda_1 \lambda_2 = \alpha \beta$ . Néanmoins, certaines projections de  $\mathcal{K}(\theta_1, \dots, \theta_m; M_1, \dots, M_m)$  sont convexes et cela ne dépend pas des hypothèses de symétrie ou des rotations  $R(x)$  utilisées. Par exemple, les  $N - 1$  premières colonnes de  $A_{eff} \in \mathcal{K}(\theta_1, \dots, \theta_m; M_1, \dots, M_m)$  dans une base  $(a_1, \dots, a_N)$  forment un ensemble convexe. D'autre part, si on veut uniquement identifier la première colonne de  $A_{eff} \in \mathcal{K}(\theta_1, \dots, \theta_m; M_1, \dots, M_m)$ , on montre que, dans le cas de matrices  $M_1, \dots, M_m$  symétriques:  $\forall E \in \mathbb{R}^N$ , l'ensemble

$$\{D = A^{eff} E; \quad A_{eff} \in \mathcal{K}(\theta_1, \dots, \theta_m; M_1, \dots, M_m)\}$$

est la boule fermée de diamètre  $[\lambda_- E, \lambda_+ E]$  où  $\lambda_+ = \sum_{j=1}^m \theta_j \lambda_N(M_j)$ ,  $\lambda_- = \sum_{j=1}^m \frac{\theta_j}{\lambda_1(M_j)}$  lorsque les valeurs propres des  $M_j$  sont ordonnées selon  $\lambda_1(M_j) \leq \dots \leq \lambda_N(M_j)$ .

### 3 HOMOGÉNÉISATION DE PROBLÈMES DÉGÉNÉRÉS ET EFFETS NON LOCAUX EN HOMOGÉNÉISATION

#### 3.1 Remarque préliminaire

Si l'ouvert  $\Omega$  est assez régulier, en pratique de bord lipschitzien, pour que l'injection  $H_{loc}^1(\Omega) \subset L_{loc}^2(\Omega)$  soit compacte, alors toute suite de solutions  $u_n$  de problèmes elliptiques telle que  $u_n \in$  borné de  $H_{loc}^1(\Omega)$  vérifie aussi:  $u_n \rightarrow u_\infty$  dans  $L_{loc}^2(\Omega)$  fort et p.p. Des problèmes surviennent lorsque cette condition n'est pas réalisée. En particulier, avec les notations déjà utilisées pour un mélange de deux matériaux isotropes, si  $\alpha \rightarrow 0$ , le matériau devient isolant: c'est le problème des trous; si  $\beta \rightarrow +\infty$ , le matériau devient conducteur parfait.

Dans le cas d'un problème elliptique avec conditions aux limites de Neumann posé dans un ouvert à trous, on a le résultat suivant.

**Proposition 3.1** *Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un ouvert,  $T_n \subset \Omega$  un fermé (par exemple,  $T_n$  est la réunion de trous),  $\Omega_n = \Omega \setminus T_n$ . On suppose que  $\partial\Omega \cap \partial T_n = \emptyset$  et que  $\partial\Omega_n = \partial\Omega \cup \partial T_n$ . Soit à résoudre*

$$-\operatorname{div}(a_n \operatorname{grad}(u_n)) = f_n, \quad \Omega_n; \quad (3.1)$$

$$(a_n \operatorname{grad}(u_n)) \cdot \nu = 0, \quad \partial T_n; \quad (3.2)$$

$$u_n = 0, \quad \partial\Omega \quad (3.3)$$

où  $f_n \in L^2(\Omega_n)$ ,  $\nu$  désigne la normale extérieure à  $\Omega_n$ . A la limite  $n \rightarrow \infty$ , le problème obtenu est de même nature si  $\partial T_n$  est régulier, en pratique localement lipschitzien. Cette dernière condition est nécessaire pour construire un opérateur de prolongement  $P_n : V_n \rightarrow V$  avec  $V = H_0^1(\Omega)$  tel que:

$$\int_{\Omega} |\operatorname{grad}(P_n v)|^2 dx \leq C_* \int_{\Omega} |\operatorname{grad}(v)|^2 dx, \quad \forall v \in V_n.$$

**Remarque 3.2** *Si les trous ne sont pas assez réguliers, on obtient des problèmes de nature différente avec en particulier des effets non locaux possibles.*

#### 3.2 Problèmes elliptiques dégénérés: premier exemple

En général, on vérifie qu'une suite de problèmes elliptiques dégénérés peut conduire à une équation effective d'un type différent, c'est-à-dire contenant des termes non locaux; la question se posait de savoir si la théorie de l'homogénéisation s'étendait à certains problèmes elliptiques dégénérés auxquels on ne pouvait plus appliquer un argument utilisant l'injection compacte de  $H^1(\Omega)$  dans  $L_{loc}^2(\Omega)$ .

Le problème suivant autorise des calculs explicites. Soit:

$$-a_n(y) \frac{\partial^2 u^{\text{①}}}{\partial x^2} + b^{\text{①}}(y) u^{\text{①}} = f(\cdot, y) \quad \text{dans } \Omega = \mathbb{R} \times \omega, \quad (3.4)$$



$$u^{(\mathbb{n})}(\cdot, y) \in H^1(\mathbb{R}), \quad \text{p.p. en } y \in \omega, \quad (3.5)$$

$$0 < \alpha \leq a_n \leq \beta \quad \text{p.p. dans } \omega, \quad (3.6)$$

$$0 < \alpha' \leq \frac{b_n}{a_n} \leq \beta' \quad \text{p.p. dans } \omega, \quad (3.7)$$

Sous des hypothèses utilisant les mesures de Young de la suite  $(a_n, b_n)$ , on montre que

**Proposition 3.3** *La suite  $u_n$  converge au sens suivant:*

$$u_n \rightharpoonup u_\infty \quad \text{dans } L^2(\Omega) \quad \text{faible}$$

où  $u_\infty$  est solution de

$$-a^{eff}(y) \frac{\partial^2 u^\infty}{\partial x^2} + b^{eff}(y) u^\infty - H(\cdot, y) * u = f(\cdot, y) \quad \text{dans } \Omega = \mathbb{R} \times \omega, \quad (3.8)$$

$$u^\infty(\cdot, y) \in H^1(\mathbb{R}), \quad \text{p.p. en } y \in \omega, \quad (3.9)$$

où  $H$  est un terme supplémentaire non local faisant intervenir la mesure de Young de  $(a_n, b_n)$ .

### 3.3 Problèmes elliptiques dégénérés: deuxième exemple

Pour fixer les idées, on regarde le cas où les courbes (et les vitesses) caractéristiques sont constantes et on considère le problème simplifié:

$$\frac{\partial u^{(\mathbb{n})}}{\partial t}(x, t) + a^{(\mathbb{n})}(x) u^{(\mathbb{n})}(x, t) = f(x, t) \quad \text{p.p. dans } \Omega \times (0, +\infty), \quad (3.10)$$

$$u^{(\mathbb{n})}(x, 0) = v(x) \quad \text{p.p. dans } \Omega, \quad (3.11)$$

et on fait les hypothèses suivantes:  $0 < \alpha \leq a^{(\mathbb{n})}(x) \leq \beta$  p.p. en  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ ; la suite  $a^{(\mathbb{n})}$  est associée à une mesure de Young  $\nu_x$ ,  $x \in \Omega$ , et les données  $v$ ,  $f$  sont bornées. On s'attend à obtenir un problème limite de la forme:

$$\frac{\partial u^\infty}{\partial t}(x, t) + a^{eff}(x) u^\infty(x, t) = f(x, t) + \quad (3.12)$$

$$+ \int_0^t K(\cdot, t-s) u^\infty(\cdot, s) ds \quad \text{p.p. dans } \Omega \times (0, +\infty), \quad (3.13)$$

$$u^\infty(x, 0) = v(x) \quad \text{p.p. dans } \Omega, \quad (3.14)$$

où le noyau  $K(x, t)$  dépend de la seule mesure de Young  $\nu_x$  ( $x$  est un paramètre et l'on n'a pas besoin de structure différentielle sur  $\Omega$ ; mais le recours aux mesures de Young sous-entend que certains résultats doivent utiliser le fait que  $\Omega$  est muni

d'une mesure  $\geq 0$  sans atome) et où  $a^{eff}$  est la limite dans  $L^\infty$  faible \* de la suite  $a^{(n)}$ , c'est-à-dire

$$a^{eff}(x) = \int_{[\alpha, \beta]} a \, d\nu_x(a) \quad \text{p.p. en } x \in \Omega.$$

Enfin, on espère que  $K \geq 0$ , ce qui est une condition suffisante pour avoir  $u^\infty \geq 0$  dès que  $v \geq 0$  et  $f \geq 0$ .

**Remarque 3.4** *Le problème étudié avec  $a^{(n)}$  convergeant faiblement, mais non fortement, vers  $a^{eff}$  fournit un exemple simple d'une suite de (semi-)groupes engendrés par (3.10)-(3.11) dont la limite (3.12)-(3.14) n'est pas un semi-groupe puisqu'on ne peut pas avoir  $K = 0$ .*

Pour déterminer la classe d'équations naturellement associée à  $u^\infty$ , on remarque que l'opérateur  $\frac{\partial}{\partial t} + a^{(n)}$  est linéaire et commute avec les translations en  $t$ . Or, un théorème de L. Schwartz dit qu'un opérateur linéaire commutant avec les translations est un opérateur de convolution (avec un noyau qui est une distribution) et il existe un unique noyau répondant à la question posée, à savoir

$$a^{eff} \delta_0 - K.$$

Autrement dit, à la limite, l'équation effective s'écrit

$$\frac{\partial u^\infty}{\partial t} + a^{eff}(x) u^\infty - \int_0^t K(x, t-s) u^\infty(x, s) \, ds = f(x, t) \quad \Omega \times (0, T), \quad (3.15)$$

$$u^\infty(x, 0) = v(x), \quad \Omega \quad (3.16)$$

Pour résoudre le problème, on utilise la transformation de Laplace. On rappelle que si  $w$  est une fonction définie sur  $\mathbb{R}^+$ , sa transformée de Laplace est (formellement) définie par:

$$\mathcal{L}w(p) = \int_0^{+\infty} w(t) e^{-pt} \, dt.$$

Typiquement, elle est holomorphe sur un semi-espace  $\{\text{Re}(p) > \gamma\}$  et la théorie a été étendue par L. Schwartz à une classe de distributions. L'équation transformée devient ici:

$$(p + a^{(n)}(x)) \mathcal{L}u^{(n)}(x, p) = \mathcal{L}f(x, p) + v(x)$$

d'où on déduit la formule:

$$\mathcal{L}u^{(n)}(x, p) = \frac{\mathcal{L}f(x, p) + v(x)}{p + a^{(n)}(x)}, \quad \forall \text{Re } p > -\alpha.$$

On a besoin de calculer la limite faible de  $\frac{1}{p + a^{(n)}(x)}$  où  $p$  joue le rôle d'un paramètre. Pour cela, on utilise la mesure de Young (ou mesure paramétrée au sens

de Pellet- B.) associée à la suite  $a^{(\mathbb{N})}$  dont on rappelle la définition: si  $a^{(\mathbb{N})}$  est une suite de fonctions mesurables à valeurs dans une partie fermée bornée  $J = J(\alpha, \beta)$  de  $\mathbb{R}^p$  ( $p = 1$  en pratique), il existe une suite extraite, encore notée  $a^{(\mathbb{N})}$ , et une famille mesurable  $x \mapsto \nu_x$  de mesures de probabilités sur  $J$  telles que:  $\forall f \in \mathcal{C}^0(J)$ ,  $F(a^{(\mathbb{N})}) \rightharpoonup \ell_F$  dans  $L^\infty(\Omega)$  faible \*, où  $\ell_F(x) = \langle \nu_x, F \rangle = \int_J f(a) d\nu_x(a)$ , p.p. en  $x \in \Omega$ .

### 3.4 Lien avec les opérateurs pseudo-différentiels

La création de termes non locaux dans les équations effectives après homogénéisation confirmait des travaux antérieurs de E. Sanchez-palencia [28, 25] sur des exemples liés à l'acoustique, la viscoélasticité et l'électromagnétisme traités dans le cadre périodique. L'outil mathématique nécessaire est dû à L. Tartar: l'exemple suivant suggéré par J. L. Lions montre comment l'homogénéisation fait parfois intervenir des opérateurs pseudo-différentiels. Plus précisément, on considère:

$$\frac{d^2}{dt^2}(-\operatorname{div}(A_n \operatorname{grad}(u^{(\mathbb{N})})) - \operatorname{div}(B_n \operatorname{grad}(u^{(\mathbb{N})}))) = f, \quad (3.17)$$

$$u^{(\mathbb{N})}(0) = v, \quad \frac{d}{dt}u^{(\mathbb{N})}(0) = w. \quad (3.18)$$

En appliquant au système (3.17) une transformation de Laplace en  $t$ , on se ramène à un problème d'homogénéisation à un paramètre, soit:

$$-\operatorname{div}(p^2 A_n(x) + B_n(x)) \operatorname{grad}(\mathcal{L}u^{(\mathbb{N})})(x, p) = \mathcal{L}f(x, p) + w(x) + p v(x).$$

A la limite  $n \rightarrow \infty$ ,  $u^\infty$  vérifie une équation du type:

$$-\operatorname{div}(H^{eff}(x, p) \operatorname{grad}(\mathcal{L}u^\infty)(x, p)) = \mathcal{L}f(x, p) + w(x) + p v(x). \quad (3.19)$$

où  $H^{eff}(x, p)$  est la limite homogénéisée de  $p^2 A_n(x) + B_n(x)$ . Comme  $H^{eff}(x, p)$  n'est pas en général un polynôme en  $p$ , la transformée de Laplace du membre de gauche de (3.19) est un opérateur pseudo-différentiel.

**Remarque 3.5** *Lorsqu'on envoie des ondes électromagnétiques dans un gaz, on observe des phénomènes étranges tels que absorption et émission "spontanée" lorsque la longueur d'onde utilisée est proche de valeurs caractéristiques des particules infimes qui constituent le gaz. Comme on ne peut espérer obtenir qu'une description statistique des particules qui constituent le gaz, c'est le point de vue probabiliste ([7, 8, 9, 10, 11]) qui a été adopté, par manque d'une bonne théorie mathématique qui confirmerait la conjecture selon laquelle les problèmes hyperboliques non linéaires conduisent à des effets non locaux.*

**Remarque 3.6** *Les effets non locaux ont d'abord été mis en évidence par E. Sanchez-Palencia[26, 27, 28] (qui utilise des développements asymptotiques formels dans un*

cadre périodique) pour des problèmes de visco-élasticité ou des effets de mémoire en élasticité traduisant le fait que certaines grandeurs physiques telles que  $\varepsilon_{eff}$ ,  $\mu_{eff}$  dans les relations  $D = \varepsilon_{eff} E$ ,  $B = \mu_{eff} H$  peuvent dépendre de la fréquence, ce qui est souvent négligé en première approximation. D'autre part, J.L. Lions a construit des exemples où la notion d'opérateur pseudo-différentiel est nécessaire pour interpréter ces effets de mémoire. Ainsi, on peut s'attendre à ce que de tels effets soient essentiels pour expliquer les lois étranges d'absorption et de réémission des physiciens. cf la Remarque 3.5

### 3.5 Equation hyperbolique scalaire

Ce qui suit est basé sur les travaux de [1, 31]. Une autre classe d'opérateurs dégénérés est formée d'équations hyperboliques scalaires du premier ordre. En l'absence d'une théorie générale, on sait traiter quelques cas particuliers, dont celui d'une vitesse caractéristique constante envisagé plus haut. Un second exemple d'étude complète est fourni par [1]: c'est celui que l'on se propose de décrire maintenant.

Dans le problème suivant, les coefficients dépendent d'une direction  $y$  en espace sans dérivation:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^{\textcircled{n}}}{\partial t}(x, y, t) + a^{\textcircled{n}}(y) \frac{\partial u^{\textcircled{n}}}{\partial x}(x, y, t) &= f(x, y, t), \quad \mathbb{R} \times \omega \times (0, +\infty) \quad (3.20) \\ u^{\textcircled{n}}(x, y, 0) &= v(x, y), \quad \mathbb{R} \times \omega, \quad (3.21) \end{aligned}$$

avec  $0 < \alpha \leq a^{\textcircled{n}}(y) \leq \beta$  p.p. en  $y \in \omega$ ,  $f \in L^\infty(\mathbb{R} \times \omega \times (0, +\infty))$ . On a la

**Proposition 3.7** Si  $a^{\textcircled{n}} \rightharpoonup a^\infty$  dans  $L^\infty(\omega)$  faible \* et si  $a^{\textcircled{n}}$  est associée à une mesure de Young  $\nu_y$ ,  $y \in \omega$ , alors: pour tout  $v \in L^\infty(\mathbb{R} \times \omega)$ , les solutions de (3.20) vérifient:  $u^{\textcircled{n}} \rightharpoonup u^\infty$  dans  $L^\infty$  faible \* et  $u^\infty$  est solution de l'équation effective:

$$\frac{\partial u^\infty}{\partial t}(x, y, t) + a^{eff}(y) \frac{\partial u^\infty}{\partial x}(x, y, t) \quad (3.22)$$

$$- \int_0^t \int_{[-\alpha, -\beta]} \frac{\partial^2 u^\infty}{\partial x^2}(x + \lambda(t-s), y, s) d\mu_y(s) ds \quad (3.23)$$

$$= f(x, y, t) \quad \text{dans } \mathbb{R} \times \omega \times (0, +\infty), \quad (3.24)$$

$$u^\infty(x, y, 0) = v(x, y) \quad \text{dans } \mathbb{R} \times \omega, \quad (3.25)$$

où  $\mu_y$  est définie par

$$\left( \int_{[\alpha, \beta]} \frac{d\mu_y(\lambda)}{(z + \lambda)} \right)^{-1} = z + a^\infty(y) + \int_{[-\beta, -\alpha]} \frac{d\nu_y(\lambda)}{(\lambda - z)}, \quad \forall z \notin [-\beta, -\alpha].$$

Les  $\mu_y$ , ( $y \in \omega$ ), sont des mesures  $\geq 0$  de support  $\subset [-\beta, -\alpha]$  et  $a^\infty(y) = \int_{[\alpha, \beta]} d\nu_y(a)$  (c'est-à-dire:  $a^\infty$  est la limite de  $a^{\textcircled{n}}$  dans  $L^\infty$  faible \*).

Soit maintenant à résoudre:

$$\frac{\partial u^{(\mathbb{N})}}{\partial t}(x, t) + a^{(\mathbb{N})}(y) u^{(\mathbb{N})}(x, t) = f(x, t) \quad \text{p.p. dans } \Omega \times (0, +\infty), \quad (3.26)$$

$$u^{(\mathbb{N})}(x, 0) = v(x) \quad \text{p.p. dans } \Omega, \quad (3.27)$$

où  $\alpha \leq a^{(\mathbb{N})} \leq \beta$  p.p. en  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ , la suite  $a^{(\mathbb{N})}$  est associée à une mesure de Young  $\nu_x$ ,  $x \in \Omega$ , les données  $f$ ,  $v$  sont bornées. On a la formule de représentation pour les solutions:

$$u^{(\mathbb{N})}(x, t) = v(x) e^{-ta^{(\mathbb{N})}(x)} + \int_0^t e^{-(t-s)a^{(\mathbb{N})}(x)} f(x, s) ds.$$

Alors:  $e^{-ta^{(\mathbb{N})}(x)} \rightharpoonup B(x, t)$  dans  $L^\infty$  faible \* et  $B(x, t) \neq e^{-ta^{eff}(x)}$  en général. Plus précisément:

$$B(x, t) = \int_{[\alpha, \beta]} e^{-ta} d\nu_x(a)$$

et la limite faible \* de  $u^{(\mathbb{N})}$ , soit  $u^\infty$ , est alors donnée (formellement) par:

$$u^\infty(x, t) = B(x, t) v(x) + \int_0^t B(x, t-s) f(x, s) ds.$$

Il reste à calculer l'équation effective que satisfait  $u^\infty$ , ce qui revient à trouver la classe naturelle de  $u^\infty$ . On s'attend à ce que l'équation effective satisfaite par  $u^\infty$  soit linéaire et invariante par translation en  $t$ , c'est-à-dire de la forme

$$S(x, \cdot) * u^\infty = f + v \otimes \delta_{t=0}.$$

**Remarque 3.8** *Il est naturel de chercher une équation de convolution car le problème est invariant par translation en  $t$  et les opérateurs linéaires qui commutent avec les translations sont toujours donnés par des produits de convolution (au sens de la théorie de L. Schwartz)*

Ceci est réalisé pour  $S$  de la forme

$$S(x, \cdot) = \frac{\partial}{\partial t} + a^\infty(x) - K(x, \cdot) *$$

où  $K$  est un noyau  $\geq 0$ , ne dépendant que de la mesure de Young associée à la suite  $a^{(\mathbb{N})}$ .

On peut aussi travailler avec la transformée de Laplace— c'est d'ailleurs la méthode qui fut d'abord utilisée— si on suppose que le noyau  $K$  attendu admet une transformée de Laplace. Comme ici on ne considère que les fonctions  $h$  nulles pour  $t < 0$  et ne croissant pas trop vite à l'infini, la transformée de Laplace de  $h$  peut être définie par

$$\mathcal{L}h(p) = \int_0^\infty h(t) e^{-pt} dt, \quad \forall \operatorname{Re} p > \gamma$$

où  $\gamma \in \mathbb{R}$  est donné. Le calcul donne:

$$\mathcal{L}u^{\textcircled{\mathbb{N}}}(x, p)(p + a^{\textcircled{\mathbb{N}}}(x)) = \mathcal{L}f(x, p) + v(x)$$

d'où on déduit la formule:

$$\mathcal{L}u^{\textcircled{\mathbb{N}}}(x, p) = \frac{\mathcal{L}f(x, p) + v(x)}{p + a^{\textcircled{\mathbb{N}}}(x)}, \quad \forall \operatorname{Re} p > -\alpha. \quad (3.28)$$

On a besoin de connaître la limite faible de  $\frac{1}{p + a^{\textcircled{\mathbb{N}}}}$  où  $p$  joue le rôle d'un paramètre. Les mesures de Young apparaissent donc naturellement.

*Dans le cas particulier* où  $a^{\textcircled{\mathbb{N}}}(x) = a_*(\frac{x}{\varepsilon_n})$ ,  $\varepsilon_n \rightarrow 0^+$  avec  $a_*$  périodique, on passe facilement à la limite dans (3.28):

$$\mathcal{L}u^{\textcircled{\mathbb{N}}} \rightarrow (\mathcal{L}f(x, p) + v(x)) \int_{[\alpha, \beta]} \frac{d\nu_x(a)}{p + a} =: \mathcal{L}u^\infty.$$

*Dans le cas général*, la transformée de Laplace de l'équation effective s'écrit:

$$\mathcal{L}u^\infty(p + a^{\text{eff}}) - \mathcal{L}K(x, p) = \mathcal{L}f(x, p) + v(x)$$

de sorte que, le terme  $\mathcal{L}f(x, p) + v(x)$  étant "arbitraire", on doit avoir

$$\frac{1}{p + a^{\text{eff}}} = \text{limite faible de } \frac{1}{p + a^{\textcircled{\mathbb{N}}}} = \int_{[\alpha, \beta]} \frac{d\nu_x(a)}{p + a}, \quad \forall \operatorname{Re} p > -\alpha.$$

Autrement dit, on doit montrer que:

$$p + a^{\text{eff}}(x) - \left( \int_{[\alpha, \beta]} \frac{d\nu_x(a)}{p + a} \right)^{-1} \quad (3.29)$$

est bien la transformée de Laplace d'une fonction  $K \geq 0$ . Ici, on a besoin du résultat général qui suit (Helmhotz, Nevanlinna, Pick, Stieltjes) [18]:

**Lemme 3.9** *Si une fonction holomorphe  $\Phi$  définie sur le complémentaire d'un compact  $J$  de l'axe réel est réelle sur  $\mathbb{R} \setminus J$  et vérifie  $\operatorname{Im} \Phi(p) > 0$ ,  $\forall \operatorname{Im} p > 0$ , alors  $\Phi$  admet la représentation suivante:*

$$\Phi(z) = Az + B + \int_J \frac{d\mu(\lambda)}{\lambda - z}$$

où  $A \geq 0$ ,  $B \in \mathbb{R}$ ,  $\mu \geq 0$  est une mesure de Radon  $\geq 0$  à support  $\subset J$ .

Revenant au problème qui nous intéresse, on voit que  $\int_{[\alpha, \beta]} \frac{d\nu_x(a)}{p + a}$  est une fonction holomorphe de  $p$  hors du segment  $[-\beta, -\alpha]$  telle que  $\operatorname{Im} \int_{[\alpha, \beta]} \frac{d\nu_x(a)}{p + a} < 0$  dès

que  $\text{Im } p > 0$ . Plus précisément:  $p \mapsto \int_{[\alpha, \beta]} \frac{d\nu_x(a)}{p+a}$  est holomorphe hors du segment  $-I_x = -\text{Supp}(\nu_x)$ . Comme

$$\int_{[\alpha, \beta]} \frac{d\nu_x(a)}{p+a} > 0 \quad (\text{resp. } < 0), \quad \forall p \in ]-\alpha, +\infty[, \quad (\text{resp. } \forall p \in ]-\infty, \beta[)$$

le Lemme 3.9 s'applique à  $\Phi(x, p) = \left( \int_{[\alpha, \beta]} \frac{d\nu_x(a)}{p+a} \right)^{-1}$  avec  $J = [-\beta, -\alpha] = -\text{Conv}(I_x)$  (= le plus petit intervalle contenant  $-I_x$ ). On en déduit qu'il existe  $A \geq 0$ ,  $B \in \mathbb{R}$ , et une mesure de Radon  $\mu \geq 0$  tels que

$$\left( \int_{[\alpha, \beta]} \frac{d\nu_x(a)}{p+a} \right)^{-1} = Ap + B + \int_{[-\beta, -\alpha]} \frac{d\mu_x(\lambda)}{\lambda - p}.$$

Un développement limité en  $\frac{1}{p}$ ,  $p \rightarrow \infty$ , du membre de gauche permet de calculer les constantes  $A$  et  $B$ . En effet: de la relation

$$\frac{1}{p+a} = \frac{1}{p} \left( 1 - \frac{a}{p} + \frac{a^2}{p^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{p^3}\right) \right)$$

et des définitions

$$\int_{[\alpha, \beta]} d\nu_x(a) = 1 \quad (\text{mesure de probabilité}); \quad (3.30)$$

$$a^{eff} = \int_{[\alpha, \beta]} a d\nu_x(a), \quad (3.31)$$

$$b^{eff} = \int_{[\alpha, \beta]} a^2 d\nu_x(a), \quad (3.32)$$

on déduit que

$$\int_{[\alpha, \beta]} \frac{d\nu_x(a)}{p+a} = \frac{1}{p} \left( 1 - \frac{a^{eff}}{p} + \frac{b^{eff}}{p^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{p^3}\right) \right)$$

puis:

$$\left( \int_{[\alpha, \beta]} \frac{d\nu_x(a)}{p+a} \right)^{-1} = p + a^{eff} + \int_{-\text{conv}(I_x) \subset [-\beta, -\alpha]} \frac{d\mu_x(\lambda)}{\lambda - p}, \quad \forall p \notin -\text{conv}(I_x) \subset [-\beta, -\alpha] \quad (3.33)$$

Par identification, on obtient alors:

$$\mathcal{L}K(x, p) = - \int_{-\text{conv}(I_x)} \frac{d\mu_x(\lambda)}{\lambda - p}, \quad \forall p \notin -\text{conv}(I_x).$$

Or, on a la formule classique:  $\mathcal{L}(e^{-\lambda t}) = \frac{1}{\lambda + p}$ , donc

$$K(x, t) = \int_{-\text{conv}(I_x)} e^{\lambda t} d\mu_x(\lambda).$$

La formule (3.33) dit que l'on passe de  $d\nu_x$  à  $d\mu_x$  au moyen d'une transformation non linéaire non triviale. Plus précisément:

**Remarque 3.10** Si  $\nu_x$  est combinaison linéaire de  $k$  masses de Dirac distinctes, alors  $\left(\int \frac{d\nu_x(a)}{p+a}\right)^{-1}$  est une fraction rationnelle  $\frac{P}{Q}$  où  $P$  et  $Q$  sont des polynômes de degrés  $\leq k-1$  et  $\leq k$  resp. tandis que  $\int_{[-\beta, -\alpha]} \frac{d\mu_x(\lambda)}{p+\lambda}$  est une fraction rationnelle dont le dénominateur est de degré  $\leq k-1$

### 3.6 Le cas d'un problème elliptique dégénéré.

Dans le cas d'un problème stationnaire (indépendent du temps  $t$ ), on utilise la transformée de Fourier en espace. Soit, par exemple:

$$-a^{\textcircled{n}}(y) \frac{\partial^2 u^{\textcircled{n}}}{\partial x^2} + b^{\textcircled{n}}(y) u^{\textcircled{n}} = f(x, y), \quad \Omega = \mathbb{R} \times \omega; \quad (3.34)$$

$$u^{\textcircled{n}}(\cdot, y) \in H^1(\mathbb{R}), \quad \forall y \in \omega \quad (3.35)$$

où les coefficients  $a^{\textcircled{n}}$ ,  $b^{\textcircled{n}}$  vérifient

$$0 < \alpha \leq a^{\textcircled{n}} \leq \beta, \quad \text{p.p. dans } \omega, \quad (3.36)$$

$$0 < \alpha' \leq \frac{b^{\textcircled{n}}}{a^{\textcircled{n}}} \leq \beta', \quad \text{p.p. dans } \omega. \quad (3.37)$$

Alors, pour tout  $f \in L^2(\Omega)$ , il y a une solution unique  $u^{\textcircled{n}}$  telle que  $\|u^{\textcircled{n}}\|_{L^2(\omega; H^1(\mathbb{R}))} \leq C$ .

Quitte à extraire une sous-suite, on suppose que la suite  $(a^{\textcircled{n}}, b^{\textcircled{n}})$  peut être associée à une mesure de Young  $\nu_y$ ,  $y \in \omega$ , et on suppose [29]:

$$\frac{1}{a^{\textcircled{n}}} \rightharpoonup \frac{1}{a^{eff}} = \int \frac{1}{a} d\nu_y(a, b) \quad \text{dans } L^\infty(\omega) \text{ faible } *; \quad (3.38)$$

$$\frac{b^{eff}}{(a^{eff})^2} \rightharpoonup \frac{b^{eff}}{(a^{eff})^2} = \int \frac{b}{a^2} d\nu_y(a, b) \quad \text{dans } L^\infty(\omega) \text{ faible } *; \quad (3.39)$$

On a le résultat [29]:

**Proposition 3.11** Avec les notations de ce paragraphe:

$$u^{\textcircled{n}} \rightharpoonup u^\infty \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible},$$

avec  $u^\infty$  solution de

$$-a^{eff}(y) \frac{\partial^2 u^\infty}{\partial x^2} + b^{eff}(y) u^\infty = \int_{\mathbb{R}} H(\cdot - x', y) u^\infty(x', y) dx' \quad (3.40)$$

$$= f(\cdot, y) \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.41)$$

$$u^\infty(\cdot, y) \in H^1(\mathbb{R}) \quad \text{p.p. en } y \in \omega, \quad (3.42)$$



où

$$H(x, y) = \int_{[-\beta', -\alpha']} \frac{1}{2\sqrt{|\lambda|}} e^{-\sqrt{|\lambda|}|x|} d\mu_y(\lambda)$$

pour une mesure  $\mu_y \geq 0$  de support  $\subset [-\beta', -\alpha']$ .

**Preuve.** On utilise la transformation de Fourier de  $g = g(x, y)$  par rapport à la variable  $x$  définie par:

$$\mathcal{F}_x g(\xi, y) = \int_{\mathbb{R}} g(x, y) e^{-2i\pi(x \cdot \xi)} dx.$$

L'équation (3.34) devient, par transformation de Fourier:

$$\mathcal{F}_x u^{(\mathbb{n})}(\xi, y) = \frac{\mathcal{F}_x f(\xi, y)}{4\pi^2 |\xi|^2 a^{(\mathbb{n})}(y) + b^{(\mathbb{n})}(y)} \quad \text{dans } \Omega$$

ce qui donne, quand  $n \rightarrow \infty$  :

$$\mathcal{F}_x u^\infty(\xi, y) = \int \frac{\mathcal{F}_x f(\xi, y)}{4\pi^2 |\xi|^2 a + b} d\nu_y(a, b) \quad \text{dans } \Omega \quad (3.43)$$

On introduit

$$\psi(y, z) = \int \frac{1}{z a + b} d\nu_y(a, b)$$

qui est holomorphe en  $z \notin [-\beta', -\alpha']$ . Un raisonnement analogue à celui du cas précédent donne la formule

$$\left( \int \frac{1}{z a + b} d\nu_y(a, b) \right)^{-1} = A z + B + \int_{[-\beta', -\alpha']} \frac{d\mu_y(\lambda)}{\lambda - z}, \quad (3.44)$$

$$\forall z \notin [-\beta', -\alpha'] \quad (3.45)$$

où  $\mu_y$  est une mesure  $\geq 0$  de support  $\subset [-\beta', -\alpha']$  et où le calcul donne:  $A = a^{eff}$ ,  $B = b^{eff}$ , dans  $\omega$ . Par identification avec (3.43) et en prenant  $z = 4\pi^2 |\xi|^2$ , on obtient:

$$(4\pi^2 |\xi|^2 a^{eff} + b^{eff} + \int_{[-\beta', -\alpha']} \frac{d\mu_y(\lambda)}{\lambda - 4\pi^2 |\xi|^2}) \mathcal{F}_x u^\infty(\xi, y) \quad (3.46)$$

$$= \mathcal{F}_x f(\xi, y) \quad \text{dans } \Omega. \quad (3.47)$$

On en déduit alors l'existence de  $H$  telle que

$$\mathcal{F}_x H(\xi, y) = \int_{[-\beta', -\alpha']} \frac{d\mu_y(\lambda)}{4\pi^2 |\xi|^2 - \lambda} \quad \text{dans } \Omega.$$

puis l'expression de  $H$ . ■

### 3.7 Problèmes dégénérés et transformation de Fourier: autres exemples.

On a déjà vu qu'une autre classe de problèmes dégénérés est formée d'équations hyperboliques scalaires du premier ordre. L'exemple suivant [1] a été résolu à l'aide

de la transformation de Fourier-Laplace. Soit donc à étudier un problème où les coefficients dépendent à la fois du temps  $t$  et d'une variable d'espace sans dérivation associée:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^{\textcircled{n}}}{\partial t}(x, y, t) + a^{\textcircled{n}}(y) \frac{\partial u^{\textcircled{n}}}{\partial x}(x, y, t) &= f(x, y, t), \quad \mathbb{R} \times \omega \times (0, +\infty); \quad (3.48) \\ u^{\textcircled{n}}(x, y, 0) &= v(x), \quad \mathbb{R} \times \omega \end{aligned} \quad (3.49)$$

où la suite  $a^{\textcircled{n}}$  vérifie

$$0 < \alpha \leq a^{\textcircled{n}}(y) \leq \beta \quad \text{p.p. en } y \in \omega.$$

Si on suppose en outre que  $v$  et  $f$  sont à support compact, leur transformée de Fourier (resp. de Laplace) en  $x$  (resp. en  $t$ ) est bien définie et on a

$$\mathcal{L}_t \mathcal{F}_x u^{\textcircled{n}}(\xi, y, p) = \frac{\mathcal{L}_t \mathcal{F}_x f(\xi, y, p) + \mathcal{F}_x v(\xi, y)}{p + 2i\pi \xi a^{\textcircled{n}}(y)}, \quad \forall \text{Re } p > 0.$$

Supposons que, au moins pour une suite extraite,  $a^{\textcircled{n}}$  soit associée à une mesure de Young  $\nu_y$ ,  $y \in \omega$  (de support  $\subset [\alpha, \beta]$ ). Alors, on trouve que la limite faible de  $u^{\textcircled{n}}$  vérifie

$$\mathcal{L}_t \mathcal{F}_x u^\infty(\xi, y, p) = (\mathcal{F}_x v(\xi, y) + \mathcal{L}_t \mathcal{F}_x f(\xi, y, p)) \int_{[\alpha, \beta]} \frac{d\nu_y(\lambda)}{p + 2i\pi \xi \lambda}.$$

Par transformation de Laplace inverse, on en déduit une équation de convolution pour  $\mathcal{F}_x u^\infty(\xi, y, t)$  (voir formules (42), (44) de [30]):

$$\frac{\partial(\mathcal{F}_x u^\infty)}{\partial t}(\xi, y, t) + 2i\pi \xi a^{eff}(y) \mathcal{F}_x u^\infty(\xi, y, t) + \quad (3.50)$$

$$- \int_0^t K(\xi, y, t-s) \mathcal{F}_x u^\infty(\xi, y, s) ds = 0, \quad (3.51)$$

$$\mathcal{F}_x u^\infty(\xi, y, 0) = \mathcal{F}_x v(\xi, y), \quad (3.52)$$

avec

$$K(\xi, y, \tau) = (2i\pi \xi)^2 \int e^{-2i\pi \xi \lambda \tau} d\mu_y(\lambda)$$

où  $(\mu_y)$  est une famille de mesures  $\geq 0$  à support  $\subset [\alpha, \beta]$  reliées aux mesures de Young  $\nu_y$  par

$$\left( \int \frac{d\nu_y(\lambda)}{q + \lambda} \right)^{-1} = q + a^{eff}(y) - \int \frac{d\mu_y(\lambda)}{q + \lambda}, \quad \forall q \text{ complexe hors du segment réel } [-\beta, -\alpha].$$

La transformation de Fourier inverse donne l'équation aux dérivées partielles (avec terme de mémoire) vérifiée par  $u^\infty$  (formule (45) de [30]):

$$\frac{\partial u^\infty}{\partial t}(x, y, t) + a^{eff}(y) \frac{\partial u^\infty}{\partial x}(x, y, t) + \quad (3.53)$$

$$- \int_0^t \int \frac{\partial^2 u^\infty}{\partial x^2}(x - \lambda(t - s), y, s) d\mu_y(\lambda) ds = 0, \quad (3.54)$$

$$u^\infty(x, y, 0) = v(x, y). \quad (3.55)$$

## 4 EFFETS NON LINÉAIRES EN HOMOGÉNÉISATION ET ESTIMATIONS DE COEFFICIENTS EFFECTIFS.

### 4.1 Position du problème

On a déjà vu qu'il était naturel dans certains problèmes de chercher a priori des équations effectives sous forme d'équations de convolution lorsque le problème étudié était invariant par translation en  $t$  (ou en  $x$  et en  $t$ ) et que les opérateurs linéaires commutant avec les translations s'expriment toujours comme des produits de convolution (au sens de L. Schwartz.) Que se passe-t-il dès lors si le problème étudié est linéaire, de coefficients dépendant du temps? Soit par exemple:

$$\frac{\partial u^{\textcircled{n}}}{\partial t} + a^{\textcircled{n}}(x, t) u^{\textcircled{n}} = f(x, t), \quad \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \quad (4.1)$$

$$u^{\textcircled{n}}(x, 0) = v(x). \quad (4.2)$$

Ce problème a d'abord été étudié par L. Mascarenhas[20] qui utilise une discrétisation en  $t$  pour se ramener aux méthodes antérieures. Mais cette méthode n'a pas de généralisation au cas d'équations non linéaires. L. Tartar reprend le même problème en utilisant une vieille méthode dite de perturbation. On fait désormais les hypothèses suivantes sur les coefficients  $a^{\textcircled{n}}$  :

$$\alpha \leq a^{\textcircled{n}}(x, t) \leq \beta \quad \text{p.p. dans } \Omega \times (0, +\infty), \quad (4.3)$$

$$|a^{\textcircled{n}}(x, t) - a^{\textcircled{n}}(x, s)| \leq \varepsilon(|t - s|) \quad (4.4)$$

$$\text{p.p. en } (x, s, t) \in \Omega \times (0, +\infty) \times (0, +\infty), \quad (4.5)$$

où  $\varepsilon$  est un module d'uniforme continuité tel que:  $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \varepsilon(\sigma) = 0$ .

On définit alors:  $b^{\textcircled{n}}(x, t) = a^{\textcircled{n}}(x, t) - a^\infty(x, t)$  dans  $\Omega \times (0, +\infty)$  et on substitue au problème initial (4.1)-(4.2) le nouveau problème paramétré en  $\gamma$  :

$$\frac{\partial U^{\textcircled{n}}}{\partial t}(x, t, \gamma) + (a^\infty + \gamma b^{\textcircled{n}}) U^{\textcircled{n}}(x, t, \gamma) = f(x, t), \quad \Omega \times (0, +\infty), \quad (4.6)$$

$$U^{\textcircled{n}}(x, 0, \gamma) = v(x). \quad (4.7)$$

Autrement dit, l'équation initiale (4.1)-(4.2) correspond à la valeur  $\gamma = 1$  du paramètre. L'étude se base sur les propriétés d'analyticité en  $\gamma$  de la solution. En effet, on remarque que  $U^{\textcircled{n}}$  peut se développer sous la forme d'une série entière en  $\gamma$ , soit:

$$U^{\textcircled{n}}(x, t, \gamma) = \sum_{k \geq 0} \gamma^k U_k^{\textcircled{n}}(x, t)$$

dont les coefficients sont formellement identifiés suivant le schéma itératif:

$$\frac{\partial U_0^{(\mathbb{n})}}{\partial t}(x, t, \gamma) + a^\infty(x, t) U_0^{(\mathbb{n})}(x, t, \gamma) = f(x, t), \quad \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \quad (4.8)$$

$$U_0^{(\mathbb{n})}(x, 0, \gamma) = v(x). \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial U_k^{(\mathbb{n})}}{\partial t}(x, t, \gamma) + a^\infty U_k^{(\mathbb{n})}(x, t, \gamma) + b^{(\mathbb{n})} U_{k-1}^{(\mathbb{n})}(x, t, \gamma) \quad (4.10)$$

$$= 0, \quad \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \quad (4.11)$$

$$U_k^{(\mathbb{n})}(x, 0, \gamma) = v(x); \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.12)$$

La suite  $U_0^{(\mathbb{n})}$  est indépendante de  $n$ :  $U_0^{(\mathbb{n})} = U_0$  et pour tout  $k \geq 1$ , la suite  $U_k^{(\mathbb{n})}$  est bornée, donc faiblement convergente vers une limite notée  $U_k^\infty$ . En particulier,  $U_0^\infty = U_0$ ,  $U_1^\infty = 0$  car

$$\frac{\partial U_1^{(\mathbb{n})}}{\partial t}(x, t, \gamma) + a^\infty U_1^{(\mathbb{n})}(x, t, \gamma) + b^{(\mathbb{n})} U_0^{(\mathbb{n})}(x, t, \gamma) = \quad (4.13)$$

$$= f(x, t), \quad \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \quad (4.14)$$

$$U_1^{(\mathbb{n})}(x, 0, \gamma) = 0; \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.15)$$

et  $b^{(\mathbb{n})} \rightarrow 0$  par définition. D'autre part, de (4.10)-(4.12) on déduit que

$$U_k^{(\mathbb{n})}(x, t) = - \int_0^t b^{(\mathbb{n})}(x, s) U_{k-1}^{(\mathbb{n})}(x, s) \exp\left(- \int_s^t a^\infty(x, \sigma) d\sigma\right) ds; \quad \forall k \geq 1.$$

En particulier, pour  $k = 2$ :

$$U_2^{(\mathbb{n})}(x, t) = - \int_0^t b^{(\mathbb{n})}(x, s) U_1^{(\mathbb{n})}(x, s) \exp\left(- \int_s^t a^\infty(x, \sigma) d\sigma\right) ds; \quad (4.16)$$

$$\forall k \geq 1; \quad (4.17)$$

$$U_1^{(\mathbb{n})}(x, t) = - \int_0^t b^{(\mathbb{n})}(x, s) U_0(x, s) \exp\left(- \int_s^t a^\infty(x, \sigma) d\sigma\right) ds; \quad (4.18)$$

$$\forall k \geq 1; \quad (4.19)$$

entraîne

$$U_2^{(\mathbb{n})}(x, t) = \int \int_{\{0 \leq s' \leq s \leq t\}} b^{(\mathbb{n})}(x, s) b^{(\mathbb{n})}(x, s') U_0(x, s') \exp\left(- \int_s^t a^\infty(x, \sigma) d\sigma\right) ds' ds.$$

L'uniforme continuité des  $a^{(\mathbb{n})}$  permet d'obtenir l'équation effective:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{k \geq 0} \gamma^k U_k^\infty \right) - \gamma^2 \int_0^t K(x, s, t, \gamma) \left( \sum_{k \geq 0} \gamma^k U_k^\infty \right) ds \quad (4.20)$$

$$= f, \quad \Omega \times (0, +\infty) \quad (4.21)$$

où le noyau  $K$  est analytique en  $\gamma$ .

**Remarque 4.1** *Il existe des variantes. Ainsi, Antonic [2] a regardé le cas particulier de l'équation*

$$-a^{(\mathbb{n})}(y) \frac{\partial^2 u^{(\mathbb{n})}}{\partial x^2} + b^{(\mathbb{n})}(y) u^{(\mathbb{n})} = f(\cdot, y), \quad \Omega = \mathbb{R} \times \omega; \quad (4.22)$$

$$u^{(\mathbb{n})}(\cdot, y) \in H^1(\mathbb{R}), \quad p.p. \text{ en } y \in \omega \quad (4.23)$$

*ainsi que les conséquences sur le comportement de la solution lorsqu'on ajoute un terme d'ordre 1.*

## 4.2 A propos de la turbulence

Dans les équations de Navier-Stokes, la densité de masse  $\rho$  et la quantité de mouvement  $\rho u$  se comportent très bien par rapport à la convergence faible parce qu'elles peuvent être vues comme les coefficients de formes différentielles. Mais la turbulence apparaît dans les situations où la vitesse  $u$  subit des fluctuations et il est donc nécessaire de comprendre comment on peut moyenniser  $u$ , ce qui revient à trouver la topologie la mieux adaptée. La vitesse apparaît typiquement dans le terme de transport

$$\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

On est donc naturellement amené à étudier des problèmes de la forme:

$$\frac{\partial v^{(\mathbb{n})}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 u_i^{(\mathbb{n})} \frac{\partial v^{(\mathbb{n})}}{\partial x_i} = f$$

où  $u^{(\mathbb{n})}$  est désormais un champ de vecteurs donné et où  $v^{(\mathbb{n})}$  désigne la quantité transportée. Si  $v^{(\mathbb{n})}$  est un scalaire, il s'agit d'une équation du premier ordre hyperbolique que l'on peut aussi voir comme un opérateur elliptique dégénéré. Malheureusement, la mise en oeuvre de ce principe n'est pas immédiate, comme on peut le voir sur des cas de figure très simples au départ.

## 4.3 Effet de mémoire

La méthode par transformation de Laplace vue plus haut a été appliquée dans [1] à un problème issu de la mécanique des fluides:

$$\frac{\partial u^{(\mathbb{n})}}{\partial t} + a^{(\mathbb{n})}(y) \frac{\partial u^{(\mathbb{n})}}{\partial x} = f(x, y, t), \quad \mathbb{R} \times \Omega \times (0, T); \quad (4.24)$$

$$u^{(\mathbb{n})}(x, y, 0) = v(x, y), \quad \mathbb{R} \times \Omega. \quad (4.25)$$

La méthode utilisée est la variante ‘‘Laplace-Fourier’’ de celle qui a servi au cas précédent car les équations étudiées sont invariantes non seulement en  $t$  mais aussi en  $x$ . On obtient ainsi l’équation:

$$(p + 2i\pi \xi a^{\textcircled{n}}(y)) \mathcal{L}_t \mathcal{F}_x u^{\textcircled{n}}(p, \xi, y) = \mathcal{L}_t \mathcal{F}_x f(\xi, y, p) + \mathcal{F}_x v(\xi, y)$$

et si  $\nu_y$  est la mesure de Young associée à la suite  $a^{\textcircled{n}}(y)$ , on doit calculer la limite faible de  $\frac{1}{p + 2i\pi \xi a^{\textcircled{n}}(y)}$  égale à

$$\int_I \frac{d\nu_y(a)}{p + 2i\pi \xi a}.$$

On obtient une formule du même type que dans le cas précédent et la transformation de Laplace-Fourier inverse s’applique aisément. On trouve alors l’équation de convolution effective [30]:

$$\frac{\partial u^\infty}{\partial t} + a^{eff}(y) \frac{\partial u^\infty}{\partial x} \tag{4.26}$$

$$- \int_0^t \int_{[-\beta, -\alpha]} \frac{\partial^2 u^\infty}{\partial x^2}(x - \lambda(t - s), y, s) d\mu_y(\lambda) ds \tag{4.27}$$

$$= f(x, y, t), \quad \mathbb{R} \times \Omega \times (0, T), \tag{4.28}$$

$$u^\infty(x, y, 0) = v(x, y), \quad \mathbb{R} \times \Omega. \tag{4.29}$$

**Remarque 4.2** Dans (4.26)-(4.29), la dérivée seconde est intégrée non en  $(x, y, t)$  mais suivant des lignes convergeant au point  $(x, y, t)$  à la vitesse  $-\lambda$  avec un poids qui dépend de  $\lambda$ .

**Remarque 4.3** Dans [2], N. Antonic étudie les effets de mémoire en homogénéisation pour le problème en dimension 1 d’espace:

$$-\frac{\partial^2 u^{\textcircled{n}}}{\partial x^2}(x, t) + b^{\textcircled{n}}(t) \frac{\partial u^{\textcircled{n}}}{\partial x}(x, t) + c^{\textcircled{n}} u^{\textcircled{n}}(x, t) = f(x, t)$$

où les suites  $b^{\textcircled{n}}$  et  $c^{\textcircled{n}}$  sont bornées dans  $L^\infty$ . Comme dans l’exemple développé plus haut, les effets de mémoire sont décrits grâce au théorème de représentation des fonctions de Nevanlinna déjà cité. Un exemple plus simple est considéré dans le travail antérieur de [20].

## 5 LA COMPACTITÉ PAR COMPENSATION, VERSION PRÉLIMINAIRE DES MESURES.

### 5.1 Homogénéisation des problèmes non linéaires; bornes sur les coefficients effectifs

Soit une suite  $u^{(n)}$  définie par:

$$u^{(n)} \rightharpoonup u^\infty, \quad H_{loc}^1(\Omega) \text{ faible}, \quad (5.1)$$

$$-\operatorname{div}(A^{(n)} \operatorname{grad}(u^{(n)})) =: f^{(n)} \rightarrow f, \quad H_{loc}^{-1}(\Omega) \text{ fort}, \quad (5.2)$$

où la suite  $A^{(n)}$  est bornée dans  $L^\infty(\Omega)$  et vérifie une propriété d'uniforme coercivité:

$$(A^{(n)} \lambda \cdot \lambda) \geq \alpha |\lambda|^2, \quad \text{p.p. en } x \in \Omega, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^N, \quad \forall n.$$

Utilisant les notations de l'électromagnétisme, on pose:

$$E^{(n)} = \operatorname{grad}(u^{(n)}), \quad D^{(n)} = A^{(n)} \cdot E^{(n)} = A^{(n)} \operatorname{grad}(u^{(n)}).$$

Après extraction d'une sous-suite telle que:  $D^{(n)} \rightharpoonup D^\infty$  dans  $L_{loc}^2(\Omega; \mathbb{R}^N)$  faible, on veut identifier la limite faible  $D^\infty$ . Le cas isotrope  $A^{(n)} = a^{(n)} I$  est explicite (F. Murat). En effet, si on suppose que pour un intervalle  $I$  tel que  $\Omega \subset I \times \mathbb{R}^{N-1}$ :

$$a^{(n)} \rightharpoonup a_+ \quad L^\infty(I) \text{ faible} \quad *, \quad (5.3)$$

$$\frac{1}{a^{(n)}} \rightharpoonup \frac{1}{a_-} \quad L^\infty(I) \text{ faible} \quad *, \quad (5.4)$$

alors  $u^{(n)} \rightharpoonup u^\infty$  dans  $H_0^1(\Omega)$  faible et  $L^2(\Omega)$  fort et on cherche une relation entre ces quantités. Or, le Lemme Divergence-Rotationnel s'applique pour montrer que:

$$(D^{(n)} \cdot E^{(n)}) = a^{(n)} |E^{(n)}|^2 \rightharpoonup (D^\infty \cdot E^\infty)$$

au sens des mesures  $\sigma(L^1, \mathcal{C}_c)$ , c'est-à-dire:

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c(\Omega), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \varphi (D^{(n)} \cdot E^{(n)}) = \int_{\Omega} \varphi (D^\infty \cdot E^\infty).$$

En résumé:

$$E^{(n)} \rightharpoonup E^\infty, \quad L^2(\Omega, \mathbb{R}^N) \text{ faible}, \quad (5.5)$$

$$D^{(n)} = a^{(n)} E^{(n)} \rightharpoonup D^\infty, \quad L^2(\Omega, \mathbb{R}^N) \text{ faible}, \quad (5.6)$$

$$(D^{(n)} \cdot E^{(n)}) \rightharpoonup (D^\infty \cdot E^\infty), \quad \text{au sens des mesures} \quad (5.7)$$

$$a^{(n)} \rightharpoonup a^+, \quad L^\infty(I) \text{ faible}^*, \quad (5.8)$$

$$\frac{1}{a^{(n)}} \rightharpoonup \frac{1}{a^-}, \quad L^\infty(I) \text{ faible}. \quad (5.9)$$



L'ensemble suivant apparaît naturellement:

$$K = \{(E, aE, a|E|^2, a, \frac{1}{a}), \quad E \in \mathbb{R}^N, \quad a \in I\}$$

car

$$(E^{(\mathbb{N})}, D^{(\mathbb{N})}, (D^{(\mathbb{N})} \cdot E^{(\mathbb{N})}), a^{(\mathbb{N})}, \frac{1}{a^{(\mathbb{N})}}) \in K \subset \mathbb{R}^{2N+3}$$

et on veut étudier son enveloppe convexe fermée dans  $\mathbb{R}^{2N+3}$ , notée  $\overline{\text{conv}}(K)$ . Pour cela, on commence par une caractérisation théorique des limites faibles\* de quantités satisfaisant des relations non linéaires dans le:

**Lemme 5.1** *Soit  $K$  une partie bornée de  $\mathbb{R}^p$ , et soit  $U^{(\mathbb{N})}$  une suite de fonctions,  $U^{(\mathbb{N})} \rightharpoonup U^\infty$  dans  $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^p)$  faible\* telle que  $U^{(\mathbb{N})} \in K$  p.p. en  $x \in \Omega$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Alors,  $U^\infty \in \overline{\text{conv}}(K)$  p.p. en  $x \in \Omega$ . Inversement,  $\forall V^\infty \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^p)$  telle que  $V^\infty \in \overline{\text{conv}}(K)$  p.p. en  $x \in \Omega$ , il existe une suite  $V^{(\mathbb{N})}$  telle que  $V^{(\mathbb{N})} \rightharpoonup V^\infty$  dans  $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^p)$  faible\* et  $V^{(\mathbb{N})} \in K$  p.p. en  $x \in \Omega$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .*

Une succession de lemmes techniques permet alors de montrer que:

**Lemme 5.2** *Soit*

$$E^{(\mathbb{N})} \rightharpoonup E^\infty, \quad L^2(\Omega; \mathbb{R}^p) \text{ faible}, \quad (5.10)$$

$$D^{(\mathbb{N})} \rightharpoonup D^\infty, \quad L^2(\Omega; \mathbb{R}^p) \text{ faible}, \quad (5.11)$$

$$(D^{(\mathbb{N})} \cdot E^{(\mathbb{N})}) \rightharpoonup (D^\infty \cdot E^\infty), \quad \text{au sens des mesures}, \quad (5.12)$$

$$a^{(\mathbb{N})} \rightharpoonup a^+, \quad L^\infty(\Omega) \text{ faible*}, \quad (5.13)$$

$$\frac{1}{a^{(\mathbb{N})}} \rightharpoonup \frac{1}{a^-}, \quad L^\infty(\Omega) \text{ faible*}. \quad (5.14)$$

On suppose en outre que, pour presque tout  $x \in \Omega$ :

$$(E^{(\mathbb{N})}, D^{(\mathbb{N})}, (D^{(\mathbb{N})} \cdot E^{(\mathbb{N})}), a^{(\mathbb{N})}, \frac{1}{a^{(\mathbb{N})}}) \in \overline{\text{conv}}(K).$$

Alors, pour presque tout  $x \in \Omega$ :

$$(E^\infty, D^\infty, (D^\infty \cdot E^\infty), a^+, \frac{1}{a^-}) \in \overline{\text{conv}}(K). \quad (5.15)$$

Pour caractériser  $\overline{\text{conv}}(K)$  et en déduire les bornes cherchées, on se propose d'établir une réciproque sous la forme: que se passe-t-il si  $E^\infty$  et  $D^\infty$  vérifient (5.15)?

## 5.2 La méthode des fonctions-tests oscillantes

La méthode encore appelée “méthode de l’énergie” (J-L. Lions) ou méthode de dualité par l’école italienne et désignée ici par le vocable “méthode des fonctions-tests oscillantes” considère le point de vue variationnel d’un problème donné et on peut l’étendre avec de moindres efforts à la plupart des équations aux dérivées partielles linéaires de la Mécanique des milieux continus (on sait encore très peu de choses dans le cas non linéaire.) Pour plus de clarté dans l’exposé de cette méthode, on commence par rappeler un résultat de la théorie abstraite (lemme 3 de [32]).

**Lemme 5.3** *Soit*

$$\mathcal{A}_n : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega), \quad u \mapsto -\operatorname{div}(\mathcal{A}_n \operatorname{grad}(u)) =: \mathcal{A}_n u.$$

*Il existe une suite extraite encore notée  $n$ , et un opérateur linéaire continu:  $H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ , tels que  $\forall f \in H^{-1}(\Omega)$ , la suite des solutions de  $\mathcal{A}_n u_n = f$  converge dans  $H_0^1(\Omega)$  faible vers une limite notée  $u^\infty$  solution de  $\mathcal{A}_\infty u^\infty = f$  telle que*

$$(\mathcal{A}_\infty u \cdot u) \geq \alpha \|u\|^2, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega), \quad (5.16)$$

$$\|\mathcal{A}_\infty u\|_{H^{-1}} \leq \frac{K}{\alpha} \|u\|, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega) \quad (5.17)$$

si  $\|\mathcal{A}_n\| \leq K$ . Autrement dit:

$$(\mathcal{A}_n)^{-1} \rightharpoonup (\mathcal{A}_\infty)^{-1}, \quad \mathcal{L}(H_0^1, H^{-1}) \text{ faible.}$$

Soit  $F$  une partie dénombrable dense de  $H^{-1}(\Omega)$  (qui est séparable). On peut alors extraire une suite  $A^{\textcircled{m}}$  telle que  $\forall f \in F$ , la suite  $u_m$  des solutions de  $-\operatorname{div}(A^{\textcircled{m}} \operatorname{grad}(u_m)) = f$  converge dans  $H_0^1(\Omega)$  faible vers un  $u_\infty := S(f)$  et  $A^{\textcircled{m}} \operatorname{grad}(u_m)$  converge dans  $L^2(\Omega; \mathbb{R}^N)$  faible vers  $R(f)$ . Par densité de  $F$  dans  $H^{-1}(\Omega)$ , ceci reste vrai  $\forall f \in H^{-1}(\Omega)$ . L’opérateur  $S$  ainsi construit:  $H^{-1}(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$  est inversible grâce au Lemme de Lax-Milgram (qui justifie la construction) et  $R(f) = C(u_\infty)$  où  $C$  est un opérateur linéaire continu  $H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega; \mathbb{R}^N)$ . On utilise alors le Lemme Divergence-Rotationnel pour montrer que c’est un opérateur local de la forme  $C(v) = A^{eff} \operatorname{grad}(v)$  avec  $A^{eff} \in L^\infty(\Omega)^{N \times N}$ . En effet, on construit une suite de fonctions-tests oscillantes  $v_m$  telle que  $-\operatorname{div}((A^{\textcircled{m}})^T \operatorname{grad}(v_m))$  converge dans  $H_{loc}^{-1}(\Omega)$  fort et

$$v_m \rightharpoonup v_\infty, \quad H^1(\Omega) \text{ faible}, \quad (5.18)$$

$$(A^{\textcircled{m}})^T \operatorname{grad}(v_m) \rightharpoonup w_\infty, \quad L^2(\Omega; \mathbb{R}^N) \text{ faible}, \quad (5.19)$$

et on passe à la limite dans

$$(A^{\textcircled{m}} \operatorname{grad}(u_m) \cdot \operatorname{grad}(v_m)) = (\operatorname{grad}(u_m) \cdot (A^{\textcircled{m}})^T \operatorname{grad}(v_m)).$$

On applique le lemme divergence -rotationnel au membre de gauche, qui converge au sens des mesures vagues  $\sigma(L^1, \mathcal{C}_c(\Omega))$  vers  $(C(u_\infty) \cdot \operatorname{grad}(v_\infty))$ , ainsi qu’au membre

de droite qui converge au sens des mesures vagues  $\sigma(L^1, \mathcal{C}_c(\Omega))$  vers  $(grad(u_\infty) \cdot w_\infty)$  et on en déduit alors que:

$$(C(u_\infty) \cdot grad(v_\infty)) = (grad(u_\infty) \cdot w_\infty) \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

On construit la suite  $v_m$  de la manière suivante: on se donne un ouvert  $\Omega'$ ,  $\Omega \subset\subset \Omega'$  et on prolonge  $A \stackrel{\textcircled{\mathbb{N}}}{\phantom{A}}$  dans  $\Omega' - \Omega$  en posant par exemple:  $A \stackrel{\textcircled{\mathbb{N}}}{\phantom{A}} = \alpha I$  si  $x \in \Omega' \setminus \Omega$  et en résolvant:

$$- \operatorname{div}((A \stackrel{\textcircled{\mathbb{N}}}{\phantom{A}})^T grad(v_m)) = g, \quad \Omega', \quad g \in H^{-1}(\Omega').$$

La suite  $v_m$  ainsi obtenue est bornée dans  $H_0^1(\Omega')$ , ainsi que la suite des restrictions à  $\Omega$  dans  $H^1(\Omega)$ . Quitte à extraire de nouveau, on obtient  $v_m$  cherchée. Par le Lemme 5.3, on peut toujours choisir  $g \in H^{-1}(\Omega')$  de sorte que la limite faible  $v_\infty$  soit arbitraire dans  $H_0^1(\Omega')$ , et en particulier, pour tout  $j = 1, \dots, N$ ,  $\exists g_j \in H^{-1}(\Omega')$  tel que  $v_\infty = x_j$  p.p. dans  $\Omega$ . On en déduit alors que  $C(u_\infty) = A^{eff} grad(u_\infty)$  pour un  $A^{eff} \in L^2(\Omega)^{N \times N}$ . Un raisonnement analogue permet de montrer que (Proposition 8 de [32]):

**Proposition 5.4** *Si  $A \stackrel{\textcircled{\mathbb{N}}}{\phantom{A}} \in \mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega)$  et si  $A \stackrel{\textcircled{\mathbb{N}}}{\phantom{A}} \xrightarrow{H} A^{eff}$ , alors  $(A \stackrel{\textcircled{\mathbb{N}}}{\phantom{A}})^T \xrightarrow{H} (A^{eff})^T$  et en particulier, la  $H$ -limite  $(A^{eff})^T$  de la suite des  $(A \stackrel{\textcircled{\mathbb{N}}}{\phantom{A}})^T$  est encore un opérateur local au sens précédent.*

**Remarque 5.5** *La Proposition 5.4 montre que  $(A \stackrel{\textcircled{\mathbb{N}}}{\phantom{A}})^T$  se comporte comme  $A \stackrel{\textcircled{\mathbb{N}}}{\phantom{A}}$ , et en particulier que l'étude de la  $H$ -convergence pour le problème adjoint s'effectue de manière analogue.*

Décrivons la méthode utilisée ici, appelée à tort “méthode de l'énergie” et que l'on préfère appeler “méthode des fonctions-tests oscillantes”.

On utilise le Lemme Divergence-Rotationnel pour montrer que  $\mathcal{A}_\infty$  est encore un opérateur local de la forme  $\mathcal{A}_\infty v = A^{eff} grad(v)$  où  $A^{eff} \in L^\infty(\Omega)^{N \times N}$ . En effet: on construit une suite de fonctions-tests oscillantes  $v \stackrel{\textcircled{\mathbb{N}}}{\phantom{v}}$  associées au problème adjoint: plus précisément, se fixant un ouvert  $\Omega'$ ,  $\Omega \subset\subset \Omega'$ , on prolonge  $A_n$  par  $\alpha I$  dans  $\Omega' \setminus \Omega$  et on note  $v \stackrel{\textcircled{\mathbb{N}}}{\phantom{v}}$  la solution de

$$- \operatorname{div}(A_n^T grad(v \stackrel{\textcircled{\mathbb{N}}}{\phantom{v}})) = g, \quad \Omega'; \tag{5.20}$$

$$v \stackrel{\textcircled{\mathbb{N}}}{\phantom{v}} \in H_0^1(\Omega') \tag{5.21}$$

où  $g \in H^{-1}(\Omega')$  est à choisir. Le lemme 5.3 dit que l'isomorphisme dû au lemme de Lax-Milgram:

$$\mathcal{B}_n := - \operatorname{div}(A_n^T grad(\cdot)) \quad : \quad H_0^1(\Omega') \rightarrow H^{-1}(\Omega')$$

vérifie

$$\mathcal{B}_n^{-1} g \rightharpoonup \mathcal{B}_\infty^{-1} g = v^\infty \quad H_0^1(\Omega') \text{ faible}, \tag{5.22}$$

$$A_n^T grad(\mathcal{B}_n^{-1} g) \rightharpoonup w^\infty(g) \quad L^2(\Omega') \text{ faible}, \tag{5.23}$$

où  $w^\infty(g)$  est une fonction linéaire de  $g$  qui est à choisir. En effet, par l'isomorphisme  $\mathcal{B}_\infty$ , on peut toujours choisir  $g \in H^{-1}(\Omega')$  tel que  $v^\infty (= \mathcal{B}_\infty^{-1} g) = \lambda \cdot x$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}^N$  et alors  $w^\infty = w^\infty(\lambda)$  est une fonction linéaire de  $\lambda$ , soit  $w^\infty(\lambda) = (A^{eff})^T \lambda$ . On a donc:

$$A_n^T \text{grad}(v \overset{\circ}{\mathbb{N}}) \rightharpoonup w^\infty = (A^{eff})^T \lambda, \quad H_0^1(\Omega) \text{ faible.}$$

Revenant au problème qui nous intéresse, on passe à la limite dans les deux membres de l'égalité

$$(A_n \text{grad}(u \overset{\circ}{\mathbb{N}}) \cdot \text{grad}(v \overset{\circ}{\mathbb{N}})) = (\text{grad}(u \overset{\circ}{\mathbb{N}}) \cdot A_n^T \text{grad}(v \overset{\circ}{\mathbb{N}})).$$

Plus précisément, le Lemme Divergence-Rotationnel dit que le membre de gauche (resp. de droite) converge au sens des mesures vagues vers  $(\mathcal{A}_\infty u^\infty \cdot \text{grad}(v^\infty))$  (resp. vers  $(\text{grad}(u^\infty) \cdot (A^{eff})^T \lambda)$ ). On en déduit que

$$(\mathcal{A}_\infty u^\infty \cdot \text{grad}(v^\infty)) = (\text{grad}(u^\infty) \cdot (A^{eff})^T \lambda) \quad \text{p.p. dans } \Omega,$$

c'est-à-dire que

$$(\mathcal{A}_\infty u^\infty \cdot \lambda) = (\text{grad}(u^\infty) \cdot (A^{eff})^T \lambda) \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

Le choix  $\lambda = e_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  entraîne que:

$$(\mathcal{A}_\infty u^\infty \cdot e_i) = (\text{grad}(u^\infty) \cdot (A^{eff})^T e_i) \tag{5.24}$$

$$= (A^{eff} \text{grad}(u^\infty) \cdot e_i), \quad i = 1, \dots, N; \tag{5.25}$$

c'est-à-dire:

$$\mathcal{A}_\infty u^\infty = A^{eff} \text{grad}(u^\infty), \quad A^{eff} \in (L^\infty(\Omega))^{N \times N}$$

### 5.3 Le cas monotone régulier

Le théorème de Lax-Milgram s'applique classiquement dans le cadre hilbertien: soit  $M : V \rightarrow V'$  opérant linéairement de  $V$  dans son dual  $V'$  et vérifiant une hypothèse de  $V$ -ellipticité:

$$(M u \cdot u) \geq \alpha \|u\|^2, \quad \forall u \in V$$

qui fait de  $M$  un isomorphisme de  $V$  sur  $V'$ .

Dans le cas non linéaire, on considère toujours  $M : V \rightarrow V'$  de "classe  $\mathcal{C}^1$ ", où  $M'(v)$  satisfait uniformément aux conditions de Lax-Milgram, c'est-à-dire:

$$(M'(v) u \cdot u) \geq \alpha \|u\|^2, \quad \forall (u, v) \in V^2.$$

Alors  $M$  est un difféomorphisme global de  $V \rightarrow V'$ . On peut généraliser au cas de deux espaces de Banach  $E, F$ : alors  $M : E \rightarrow F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  de norme  $\|M'(u)\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq K$ . On suppose que l'on peut appliquer le lemme de Lax-Milgram

qui entraîne alors que  $\|M'(u)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq K'$  et  $M$  est un difféomorphisme global de  $E$  sur  $F$ . On obtient ainsi le cas abstrait dit "régulier" où la classe naturelle des opérateurs est caractérisée par les conditions:

$$(M(b) - M(a) \cdot b - a) \geq \alpha \|a - b\|^2, \quad \forall (a, b) \in E \times F, \quad (5.26)$$

$$\|M(a) - M(b)\| \leq K \|a - b\| \quad (5.27)$$

#### 5.4 Réalisation du cas abstrait régulier

Dans la suite l'ouvert  $\Omega$  est supposé borné pour pouvoir appliquer l'inégalité de Poincaré. On considère la classe de problèmes:

$$-\operatorname{div}(F(x, \operatorname{grad}(u))) = f \in H^{-1}(\Omega), \quad (5.28)$$

$$u \in H_0^1(\Omega) \quad (5.29)$$

où  $F(x, \lambda)$  vérifie les conditions de Carathéodory:  $F$  est mesurable en  $x$  et continue en  $\lambda$ . Pour fixer les idées, on prend  $F(x, 0) = 0$ . On suppose en outre que  $F$  vérifie des conditions d'uniforme monotonicté:  $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ ,

$$|F(x, \lambda) - F(x, \mu)| \leq \gamma |\lambda - \mu|, \quad \text{p.p. en } x \in \Omega, \quad (5.30)$$

$$(F(x, \lambda) - F(x, \mu) \cdot \lambda - \mu) \geq \alpha |\lambda - \mu|^2, \quad \text{p.p. en } x \in \Omega. \quad (5.31)$$

**Remarque 5.6** *Le plus souvent, on préfère remplacer (5.30) par*

$$(F(x, \lambda) - F(x, \mu) \cdot \lambda - \mu) \geq \frac{1}{\beta} |F(x, \lambda) - F(x, \mu)|^2, \quad \text{p.p. en } x \in \Omega, \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N. \quad (5.32)$$

*et on vérifie alors directement que (5.30)-(5.31) est équivalent à (5.32)-(5.31): cela revient à remplacer les constantes caractéristiques  $(\alpha, \gamma)$  par  $(\alpha, \beta = \frac{\gamma^2}{\alpha})$ .*

On a le:

**Théorème 5.7** *Soit  $F^{(\mathfrak{n})}$  vérifiant:  $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ ,*

$$(F^{(\mathfrak{n})}(x, \lambda) - F^{(\mathfrak{n})}(x, \mu) \cdot \lambda - \mu) \geq \alpha |\lambda - \mu|^2, \quad \text{p.p. en } x \in \Omega, \quad (5.33)$$

$$(F^{(\mathfrak{n})}(x, \lambda) - F^{(\mathfrak{n})}(x, \mu) \cdot \lambda - \mu) \geq \frac{1}{\beta} |F(x, \lambda) - F(x, \mu)|^2, \quad (5.34)$$

$$\text{p.p. en } x \in \Omega. \quad (5.35)$$

*Alors, il existe une sous-suite encore notée  $\mathfrak{n}$  et il existe  $M^\infty \in \mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega)$  tels que: la suite des solutions  $u^{(\mathfrak{n})}$  de*

$$M^{(\mathfrak{n})} u^{(\mathfrak{n})} := -\operatorname{div}(F^{(\mathfrak{n})}(x, \operatorname{grad}(u^{(\mathfrak{n})}))) = f, \quad \Omega; \quad (5.36)$$

$$u^{(\mathfrak{n})} \in H_0^1(\Omega) \quad (5.37)$$

vérifie

$$u^{(\mathbb{n})} \rightharpoonup u^\infty \quad H_0^1(\Omega) \text{ faible}; \quad (5.38)$$

$$F^{(\mathbb{n})}(x, \text{grad}(u^{(\mathbb{n})})) \rightharpoonup F^\infty(x, \text{grad}(u^\infty)) \quad L^2(\Omega)^N \text{ faible} \quad (5.39)$$

où  $u^\infty$  est solution de

$$M^\infty u^\infty := -\text{div}(F^\infty(x, \text{grad}(u^\infty))) = f, \quad \Omega; \quad (5.40)$$

$$u^\infty \in H_0^1(\Omega) \quad (5.41)$$

**Preuve.** Par le lemme de Lax-Milgram, on voit que  $M^{(\mathbb{n})}$  est inversible, d'inverse borné. En effet: soit:  $u^{(\mathbb{n})} = (M^{(\mathbb{n})})^{-1} f$ . Alors,  $\|(M^{(\mathbb{n})})^{-1}\|_{\mathcal{L}(V, V')} \leq C$  car:

$${}_{H^{-1}}\langle f \cdot u^{(\mathbb{n})} \rangle_{H_0^1} = {}_{H^{-1}}\langle M^{(\mathbb{n})}(u^{(\mathbb{n})}) \cdot u^{(\mathbb{n})} \rangle_{H_0^1} \quad (5.42)$$

$$= (F^{(\mathbb{n})}(x, \text{grad}(u^{(\mathbb{n})})) \cdot \text{grad}(u^{(\mathbb{n})})) \quad (5.43)$$

$$\geq \alpha |\text{grad}(u^{(\mathbb{n})})|^2 = \|u^{(\mathbb{n})}\|_{H_0^1}^2 \quad (5.44)$$

c'est-à-dire:

$$\|u^{(\mathbb{n})}\|_{H_0^1} = \|(M^{(\mathbb{n})})^{-1} f\|_{H_0^1} \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{H^{-1}}.$$

On en déduit qu'il existe une suite extraite  $(u^{(\mathbb{m})})$  qui converge faiblement vers un  $u^\infty(f) \in V$  dans  $V$ . Ceci est vrai pour tout  $f$  appartenant à une partie  $F$  dénombrable dense de  $V' = H^{-1}$ : après extraction d'une suite diagonale, on peut supposer que:

$$\forall f \in F, \quad (M^{(\mathbb{m})})^{-1} f \rightharpoonup S(f) \quad \text{dans } V,$$

puis que,  $F$  étant dense dans  $V'$ :

$$\forall f \in V', \quad (M^{(\mathbb{m})})^{-1} f \rightharpoonup S(f) \quad \text{dans } V.$$

$S$  est inversible. En effet:

$${}_{H_0^1}\langle S(f), f \rangle_{H^{-1}} = \lim_{m \rightarrow \infty} {}_{H_0^1}\langle u^{(\mathbb{m})}, f \rangle_{H^{-1}} \quad (5.45)$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} {}_{H_0^1}\langle u^{(\mathbb{m})}, M^{(\mathbb{m})} u^{(\mathbb{m})} \rangle_{H^{-1}} \quad (5.46)$$

$$\geq \liminf_{m \rightarrow \infty} \alpha \|u^{(\mathbb{m})}\|_V^2 \quad (5.47)$$

Mais on a aussi l'estimation:

$$\|M^{(\mathbb{m})}(u^{(\mathbb{m})})\|_{V'} = \|f\|_{V'} \leq K \|u^{(\mathbb{m})}\|_V$$

de sorte que (5.45)-(5.47) entraîne

$${}_{H_0^1}\langle S(f), f \rangle_{H^{-1}} \geq \frac{\alpha}{K^2} \|f\|_{V'}^2.$$

La coercivité de  $S$  permet d'appliquer le Lemme de Lax-Milgram qui dit que  $S$  est inversible et que:

$$\|S^{-1}\| \leq \frac{K^2}{\alpha}.$$

Le procédé de suite diagonale décrit plus haut peut être modifié de sorte que la suite  $(u^{(\mathfrak{m})})$  vérifie:

$$u^{(\mathfrak{m})} \rightharpoonup u^\infty = S(f) \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega), \quad (5.48)$$

$$F^{(\mathfrak{m})}(x, \text{grad}(u^{(\mathfrak{m})})) \rightharpoonup C(f) \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega). \quad (5.49)$$

$S$  étant inversible d'après ce qui précède, on a  $C(f) = N(u^\infty)$  où  $N$  est un opérateur non linéaire  $H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  en général. Il reste à vérifier que  $N$  est local, c'est-à-dire de la forme:  $N(v) = F^\infty(x, \text{grad}(v))$ ,  $\forall v \in V$  avec  $F^\infty \in \mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega)$ .

On commence par montrer que:  $\forall (u, v) \in H_0^1(\Omega)^2$ ,

$$(N(u) - N(v)) \cdot \text{grad}(u) - \text{grad}(v) \geq \alpha |\text{grad}(u) - \text{grad}(v)|^2, \quad (5.50)$$

$$(N(u) - N(v)) \cdot \text{grad}(u) - \text{grad}(v) \geq \frac{1}{\beta} |N(u) - N(v)|^2. \quad (5.51)$$

En effet: soit  $(u, v) \in H_0^1(\Omega)^2$ . On pose:

$$f = -\text{div}(N(u)), \quad g = -\text{div}(N(v)) \quad (5.52)$$

de sorte que  $u = u^\infty$ ,  $v = v^\infty$ . Pour toute fonction régulière  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ,  $\varphi u^{(\mathfrak{m})}$ ,  $\varphi v^{(\mathfrak{m})}$ ,  $\varphi u$  et  $\varphi v$  peuvent être choisies comme fonctions tests:

$${}_{H^{-1}} \langle f - g, \varphi u^{(\mathfrak{m})} - \varphi v^{(\mathfrak{m})} \rangle_{H_0^1} \quad (5.53)$$

$$= \int_{\Omega} (F^{(\mathfrak{m})}(x, \text{grad}(u^{(\mathfrak{m})})) - F^{(\mathfrak{m})}(x, \text{grad}(v^{(\mathfrak{m})}))) \quad (5.54)$$

$$\cdot \text{grad}(\varphi u^{(\mathfrak{m})}) - \text{grad}(\varphi v^{(\mathfrak{m})})) \quad (5.55)$$

$$= \int_{\Omega} (F^{(\mathfrak{m})}(x, \text{grad}(u^{(\mathfrak{m})})) - F^{(\mathfrak{m})}(x, \text{grad}(v^{(\mathfrak{m})}))) \quad (5.56)$$

$$\cdot \varphi (\text{grad}(u^{(\mathfrak{m})}) - \text{grad}(v^{(\mathfrak{m})}))) \quad (5.57)$$

$$+ (u^{(\mathfrak{m})} - v^{(\mathfrak{m})}) \text{grad}(\varphi)). \quad (5.58)$$

Or:  $u^{(\mathfrak{m})} \rightarrow u$  et  $v^{(\mathfrak{m})} \rightarrow v$  dans  $L^2(\Omega)$  fort car l'inclusion  $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$  est compacte. Donc:

$${}_{H^{-1}} \langle f - g, \varphi u - \varphi v \rangle_{H_0^1} \quad (5.59)$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (F^{(\mathfrak{m})}(x, \text{grad}(u^{(\mathfrak{m})})) - F^{(\mathfrak{m})}(x, \text{grad}(v^{(\mathfrak{m})}))) \quad (5.60)$$

$$\cdot \varphi (\text{grad}(u^{(\mathfrak{m})}) - \text{grad}(v^{(\mathfrak{m})}))) \quad (5.61)$$

$$+ \int_{\Omega} (N(u) - N(v)) \cdot (u - v) \text{grad}(\varphi). \quad (5.62)$$

Mais, par définition (5.52) de  $f$  et  $g$ :

$${}_{H^{-1}}\langle f - g, \varphi u - \varphi v \rangle_{H_0^1} = \int_{\Omega} (N(u) - N(v)) \cdot \varphi (\text{grad}(u) - \text{grad}(v)) + (u - v) \text{grad}(\varphi) \quad (5.63)$$

de sorte que (5.59)-(5.62) entraîne:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (F^{\mathbb{m}}(x, \text{grad}(u^{\mathbb{m}})) - F^{\mathbb{m}}(x, \text{grad}(v^{\mathbb{m}}))) \quad (5.64)$$

$$\cdot \varphi (\text{grad}(u^{\mathbb{m}}) - \text{grad}(v^{\mathbb{m}})) \quad (5.65)$$

$$= \int_{\Omega} (N(u) - N(v)) \cdot \varphi (\text{grad}(u) - \text{grad}(v)), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad (5.66)$$

ce qui s'écrit encore:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (F^{\mathbb{m}}(x, \text{grad}(u^{\mathbb{m}})) - F^{\mathbb{m}}(x, \text{grad}(v^{\mathbb{m}}))) \quad (5.67)$$

$$\cdot \text{grad}(u^{\mathbb{m}}) - \text{grad}(v^{\mathbb{m}})) \quad (5.68)$$

$$= \int_{\Omega} \varphi (N(u) - N(v)) \cdot \text{grad}(u) - \text{grad}(v), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (5.69)$$

On prend  $\varphi \geq 0$  et alors:

$$\int_{\Omega} \varphi (N(u) - N(v)) \cdot \text{grad}(u) - \text{grad}(v) \quad (5.70)$$

$$\geq \liminf_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \alpha \varphi |\text{grad}(u^{\mathbb{m}}) - \text{grad}(v^{\mathbb{m}})|^2 \quad (5.71)$$

$$\geq \int_{\Omega} \alpha \varphi |\text{grad}(u) - \text{grad}(v)|^2 \quad (5.72)$$

car  $\text{grad}(u^{\mathbb{m}}) \rightharpoonup \text{grad}(u)$  et  $\text{grad}(v^{\mathbb{m}}) \rightharpoonup \text{grad}(v)$  dans  $L^2(\Omega)$  faible. Ceci est vrai  $\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$  avec  $\varphi \geq 0$ , donc:

$$(N(u) - N(v)) \cdot \text{grad}(u) - \text{grad}(v) \geq \alpha |\text{grad}(u) - \text{grad}(v)|^2 \quad (5.73)$$

$$\text{p.p. dans } \Omega, \quad \forall (u, v) \in H_0^1(\Omega)^2. \quad (5.74)$$

De même:

$$\int_{\Omega} \varphi (N(u) - N(v)) \cdot \text{grad}(u) - \text{grad}(v) \quad (5.75)$$

$$\geq \liminf_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{1}{\beta} \varphi |F^{\mathbb{m}}(x, \text{grad}(u^{\mathbb{m}})) - F^{\mathbb{m}}(x, \text{grad}(v^{\mathbb{m}}))|^2 \quad (5.76)$$

$$\geq \int_{\Omega} \frac{1}{\beta} \varphi |N(u) - N(v)|^2 \quad (5.77)$$



car  $F^{\textcircled{m}}(x, \text{grad}(u^{\textcircled{m}})) \rightarrow N(u)$  et  $F^{\textcircled{m}}(x, \text{grad}(v^{\textcircled{m}})) \rightarrow N(v)$  dans  $L^2(\Omega)$  faible. Il en résulte, par le même raisonnement que plus haut:

$$(N(u) - N(v)) \cdot \text{grad}(u) - \text{grad}(v) \geq \frac{1}{\beta} |N(u) - N(v)|^2, \quad \text{p.p. dans } \Omega, \quad \forall (u, v) \in H_0^1(\Omega)^2.$$

Une conséquence immédiate de cette dernière inégalité est que:

$$|N(u) - N(v)| \leq \beta |\text{grad}(u) - \text{grad}(v)|, \quad \text{p.p. dans } \Omega, \quad \forall (u, v) \in H_0^1(\Omega)^2.$$

On en déduit en particulier que:  $\forall \omega$  ouvert  $\subset \Omega$ ,

$$N(u) = N(v) \quad \text{p.p. dans } \Omega \quad \text{dès que} \quad \text{grad}(u) = \text{grad}(v) \quad \text{p.p. dans } \omega. \quad (5.78)$$

Pour conclure dans  $\Omega$ : on écrit  $\Omega$  come la réunion dénombrable d'une suite d'ouverts croissante  $\omega_k \subset \omega_{k+1}$  tels que l'inclusion  $\bar{\omega}_k \subset \Omega$  soit compacte et on définit  $F^\infty(x, \lambda)$  pour tout  $(x, \lambda) \in \Omega \times \mathbb{R}^N$  comme suit. Pour  $\lambda \in \mathbb{R}^N$  donné, soit  $v_k \in H_0^1(\Omega)$  tel que  $\text{grad}(v_k) = \lambda$  (par exemple:  $v_k(x) = (x \cdot \lambda)$ ). Alors  $F^\infty(x, \lambda) = N(v_k)$  dans  $\omega_k$ . Ceci définit bien une fonction mesurable sur  $\Omega$  car  $N(v_k) = N(v_l)$  dans  $\omega_k \cap \omega_l$  à cause de  $\text{grad}(v_k) = \text{grad}(v_l) = \lambda$  vrai dans  $\omega_k \cap \omega_l$  par hypothèse et de (5.78). Maintenant, si  $w \in H_0^1(\Omega)$  est affine par morceaux et donc si  $\text{grad}(w) \in L^2(\Omega)$  est constante par morceaux, alors (5.78) entraîne que  $N(w) = F^\infty(x, \text{grad}(w))$  p.p. dans  $\Omega$  d'après ce qui précède. Comme les fonctions affines par morceaux sont denses dans  $H_0^1(\Omega)$ ,  $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ , il existe une suite  $(w_j)$  de fonctions affines par morceaux telles que:  $\text{grad}(w_j) \rightarrow \text{grad}(w)$  dans  $L^2(\Omega)$  fort et comme:

$$|N(v) - F^\infty(x, \text{grad}(w_k))| = |N(v) - N(w_k)| \leq \beta |\text{grad}(v) - \text{grad}(w_k)| \quad \text{p.p. dans } \Omega, \quad (5.79)$$

on en déduit que

$$F^\infty(x, \text{grad}(w_k)) \rightarrow N(v) \quad \text{dans } L^2(\Omega)$$

et, quitte à extraire:

$$F^\infty(x, \text{grad}(w_k)) \rightarrow N(v) \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

Or, pour une nouvelle suite extraite:

$$\text{grad}(w_k) \rightarrow \text{grad}(v) \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

On remarque que  $\lambda \rightarrow F^\infty(x, \lambda)$  est continue sur  $\mathbb{R}^N$ . En effet: si  $u_k = (\lambda \cdot x)$  et si  $v_k = (\mu \cdot x)$  dans  $\omega_k$ , alors, avec les mêmes notations que plus haut:

$$|F^\infty(x, \lambda) - F^\infty(x, \mu)| = |N(u_k) - N(v_k)| \quad (5.80)$$

$$\leq \beta |\text{grad}(u_k) - \text{grad}(v_k)| = \beta |\lambda - \mu|, \quad \text{p.p. dans } \omega_k, \quad \forall k. \quad (5.81)$$

On en déduit que:

$$|F^\infty(x, \lambda) - F^\infty(x, \mu)| \leq \beta |\lambda - \mu| \quad \text{p.p. dans } \Omega. \quad (5.82)$$

Donc, en particulier:

$$F^\infty(x, \text{grad}(w_k)) \rightarrow F^\infty(x, \text{grad}(v)) \quad \text{p.p. dans } \Omega,$$

c'est-à-dire, compte tenu de (5.79):

$$F^\infty(x, \text{grad}(v)) = N(v), \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

■

## 6 LES MATÉRIAUX FEUILLETÉS

Le résultat dû à F. Murat s'énonce ainsi.

**Proposition 6.1** *Soit*

$$E^{\textcircled{n}} \rightharpoonup E^\infty, \quad L^2_{loc}(\Omega; \mathbb{R}^N) \text{ faible}, \quad (6.1)$$

$$D^{\textcircled{n}} = A^{\textcircled{n}}(x_1) E^{\textcircled{n}} \rightharpoonup D^\infty, \quad L^2_{loc}(\Omega; \mathbb{R}^N) \text{ faible}, \quad (6.2)$$

$$\text{div}(D^{\textcircled{n}}), \quad \frac{\partial E_i^{\textcircled{n}}}{\partial x_j} - \frac{\partial E_j^{\textcircled{n}}}{\partial x_i} \in \text{compact fixe de } H^{-1}_{loc}(\Omega) \text{ fort} \quad (6.3)$$

On suppose en outre que

$$0 < \alpha \leq A_{11}^{\textcircled{n}}(x_1) \leq \beta \text{ p.p. en } x_1 \quad (6.4)$$

Alors:

$$D^\infty = A^{eff}(x_1) E^\infty \text{ p.p. dans } \Omega$$

où la matrice  $A^{eff}$  sera explicitée plus loin.

**Remarque 6.2** *On n'a pas besoin de supposer  $A^{\textcircled{n}}$  symétrique et la preuve montre que l'uniforme ellipticité n'est pas indispensable ici: il suffit d'avoir l'hypothèse plus faible (6.4).*

**Remarque 6.3** *Le problème a été résolu par F. Murat en 1970 dans le cas particulier de l'équation de diffusion, par Mc Connell en 1974-1975 dans le cadre de l'élasticité linéaire. L'étude a été généralisée par L. Tartar suivant des principes que l'on va exposer dans la suite.*

L'idée de base consiste à remarquer que  $D_1^{\textcircled{n}}$  n'oscille pas en  $x_1$ , et qu'il en est de même pour les composantes  $E_2^{\textcircled{n}}, \dots, E_N^{\textcircled{n}}$  du champ électrique, à cause de l'information sur les dérivées partielles dont on dispose, soit

$$\frac{\partial E_j^{\textcircled{n}}}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1^{\textcircled{n}}}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, N.$$

Autrement dit, le vecteur

$$(D_1^{\textcircled{n}}, E_2^{\textcircled{n}}, \dots, E_N^{\textcircled{n}})^T$$

est le vecteur des "bonnes composantes" tandis que le vecteur

$$(E_1^{\textcircled{n}}, D_2^{\textcircled{n}}, \dots, D_N^{\textcircled{n}})^T$$

est le vecteur des composantes restantes ‘‘oscillantes’’ en  $x_1$  et on a la relation:

$$\begin{pmatrix} D_1^{\textcircled{n}} \\ E_2^{\textcircled{n}} \\ \dots \\ E_N^{\textcircled{n}} \end{pmatrix} = B^{\textcircled{n}}(x_1) \begin{pmatrix} E_1^{\textcircled{n}} \\ D_2^{\textcircled{n}} \\ \dots \\ D_N^{\textcircled{n}} \end{pmatrix}$$

où la matrice  $B^{\textcircled{n}} = \Phi(A^{\textcircled{n}})$  dépend de  $A^{\textcircled{n}}$ . On définit ainsi une transformation (involutive) non linéaire  $\Phi$  telle que

$$D_1^{\textcircled{n}} = \sum_{j=1}^N A_{1j}^{\textcircled{n}} E_j^{\textcircled{n}}; \quad (6.5)$$

$$E_i^{\textcircled{n}} = \frac{1}{A_{1i}^{\textcircled{n}}} (D_1^{\textcircled{n}} - \sum_{j=1}^N A_{ij}^{\textcircled{n}} E_j^{\textcircled{n}}), \quad i = 2, \dots, N. \quad (6.6)$$

Le Lemme Divergence-Rotationnel permet de montrer que:

$$\begin{pmatrix} D_1^\infty \\ E_2^\infty \\ \dots \\ E_N^\infty \end{pmatrix} = \text{limite faible de } B^{\textcircled{n}}(x_1) \begin{pmatrix} E_1^{\textcircled{n}} \\ D_2^{\textcircled{n}} \\ \dots \\ D_N^{\textcircled{n}} \end{pmatrix}$$

On en déduit que si  $A^{\textcircled{n}}$  ne dépend que de  $x_1$ , c'est-à-dire si  $A^{\textcircled{n}} = A^{\textcircled{n}}(x_1)$ , et si en outre (6.4) est vrai, alors  $D^{\textcircled{n}} = A^{\textcircled{n}} E^{\textcircled{n}}$  est équivalent à

$$\begin{pmatrix} D_1^{\textcircled{n}} \\ E_2^{\textcircled{n}} \\ \dots \\ E_N^{\textcircled{n}} \end{pmatrix} = \Phi(A^{\textcircled{n}}) \begin{pmatrix} E_1^{\textcircled{n}} \\ D_2^{\textcircled{n}} \\ \dots \\ D_N^{\textcircled{n}} \end{pmatrix}$$

avec  $\Phi(A^{\textcircled{n}}) \rightharpoonup \Phi(A^{eff})$  dans  $L^\infty(\Omega; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N))$  faible\*.

## 6.1 Retour sur le Lemme Divergence-Rotationnel

Le raisonnement précédent utilise une variante du lemme divergence-rotationnel adapté au cas des matériaux en tranches qui s'énonce comme suit:

**Lemme 6.4** *Soit*

$$F^{\textcircled{n}} \rightharpoonup F^\infty \quad L_{loc}^2(\Omega)^N \text{ faible}, \quad (6.7)$$

$$\text{div}(F^{\textcircled{n}}) \in \text{compact de } H^{-1}(\Omega) \text{ fort.} \quad (6.8)$$

Alors:

$$\forall \varphi^{\mathbb{N}}(x_1) \rightharpoonup \varphi^\infty(x_1) \quad L^\infty(\Omega) \text{ faible } *,$$

on a

$$\varphi^{\mathbb{N}}(x_1) F_1^{\mathbb{N}} \rightharpoonup \varphi^\infty(x_1) F_1^\infty \quad \text{au sens des mesures vagues.}$$

**Preuve.** C'est une conséquence du Lemme Divergence-Rotationnel appliqué à la quantité

$$\begin{pmatrix} \varphi^{\mathbb{N}}(x_1) \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} \otimes F^{\mathbb{N}} = \begin{pmatrix} \varphi^{\mathbb{N}}(x_1) F_1^{\mathbb{N}} \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

■

## 6.2 Homogénéisation de l'équation de la diffusion

Un résultat important pour comprendre la H-convergence est la formule des (matériaux en) tranches où les coefficients de la matrice associée oscillent dans une seule direction, par exemple en la variable  $x_1$ . Le résultat s'énonce ainsi:

**Lemme 6.5** Soit  $A^\varepsilon = A^\varepsilon(x_1)$ . On dit que  $A^\varepsilon \xrightarrow{H} A^{eff}$  si

$$\frac{1}{A_{11}^\varepsilon} \rightharpoonup \frac{1}{A_{11}^{eff}}, \quad L^\infty \text{ faible } *, \quad (6.9)$$

$$\frac{A_{i1}^\varepsilon}{A_{11}^\varepsilon} \rightharpoonup \frac{A_{i1}^{eff}}{A_{11}^{eff}}, \quad L^\infty \text{ faible } *, \quad \forall i \neq 1, \quad (6.10)$$

$$\frac{A_{1j}^\varepsilon}{A_{11}^\varepsilon} \rightharpoonup \frac{A_{1j}^{eff}}{A_{11}^{eff}}, \quad L^\infty \text{ faible } *, \quad \forall j \neq 1, \quad (6.11)$$

$$A_{ij}^\varepsilon - \frac{A_{i1}^\varepsilon A_{1j}^\varepsilon}{A_{11}^\varepsilon} \rightharpoonup A_{ij}^{eff} - \frac{A_{i1}^{eff} A_{1j}^{eff}}{A_{11}^{eff}}, \quad L^\infty \text{ faible } *, \quad \forall i, j \neq 1. \quad (6.12)$$

## 6.3 Homogénéisation de l'équation de l'élasticité linéarisée.

On utilise la relation

$$\sigma_{ij}^{\mathbb{N}} = \sum_{k,\ell=1}^N C_{ijkl}^{\mathbb{N}} \varepsilon_{kl}^{\mathbb{N}} \quad \text{où} \quad \varepsilon_{kl}^{\mathbb{N}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\ell^{\mathbb{N}}}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k^{\mathbb{N}}}{\partial x_\ell} \right).$$

Le tenseur  $\sigma^{\mathbb{N}} = (\sigma_{ij}^{\mathbb{N}})$  est le tenseur symétrique des contraintes de Cauchy et on peut toujours supposer que  $C_{ijkl}^{\mathbb{N}} = C_{ijlk}^{\mathbb{N}} = C_{jikl}^{\mathbb{N}}$ ,  $\forall i, j, k, \ell$ . Mais le

raisonnement s'applique encore à des matériaux plus généraux tels que les matériaux hyperélastiques caractérisés par  $C_{ijkl}^{\mathbb{n}} = C_{klij}^{\mathbb{n}}$ . Les équations d'équilibre s'écrivent

$$\sum_{j=1}^N \frac{\partial \sigma_{ij}^{\mathbb{n}}}{\partial x_j} = f_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Pour une direction donnée  $\xi \in \mathbb{R}^N$ , on définit le tenseur acoustique associé  $A^{\mathbb{n}}(\xi)$  en posant:

$$A_{ik}^{\mathbb{n}}(\xi) = \sum_{j,\ell} C_{ijkl}^{\mathbb{n}} \xi_j \xi_\ell, \quad \forall i, \ell.$$

Dans le cas des matériaux feuilletés suivant la direction de  $e_1$ , la formule des tranches est vraie s'il existe  $\alpha > 0$  tel que

$$(A^{\mathbb{n}}(e_1) \lambda \cdot \lambda) \geq \alpha |\lambda|^2, \quad \text{p.p. dans } \Omega, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^N, \quad \forall n.$$

Alors, les bonnes composantes vis-à-vis du Lemme Divergence-Rotationnel (non oscillantes en  $x_1$ ) sont les  $\sigma_{i1}^{\mathbb{n}}$ , ainsi que les  $\sigma_{1i}^{\mathbb{n}}$  par symétrie,  $i = 1, \dots, N$ , puis les  $\frac{\partial u_k^{\mathbb{n}}}{\partial x_\ell}$ , c'est-à-dire les  $\varepsilon_{k\ell}^{\mathbb{n}}$  par symétrie,  $k, \ell = 2, \dots, N$ . Les composantes restantes sont celles qui oscillent en  $x_1$ , c'est-à-dire  $\varepsilon_{i1}^{\mathbb{n}}$ ,  $\varepsilon_{1i}^{\mathbb{n}}$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $\varepsilon_{k\ell}^{\mathbb{n}}$ ,  $k, \ell = 2, \dots, N$ . On remplace la relation (matricielle) de constitution

$$\sigma^{\mathbb{n}} = \mathbb{C}^{\mathbb{n}}(\varepsilon^{\mathbb{n}})$$

par

$$O^{\mathbb{n}} = D^{\mathbb{n}} G^{\mathbb{n}}$$

où l'on a défini les matrices  $O^{\mathbb{n}}$ ,  $G^{\mathbb{n}}$  par:

$$O_{1i}^{\mathbb{n}} = \varepsilon_{1i}^{\mathbb{n}}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (6.13)$$

$$O_{i1}^{\mathbb{n}} = \varepsilon_{i1}^{\mathbb{n}}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (6.14)$$

$$O_{ij}^{\mathbb{n}} = \sigma_{ij}^{\mathbb{n}}, \quad i, j = 2, \dots, N, \quad (6.15)$$

et

$$G_{1i}^{\mathbb{n}} = \sigma_{1i}^{\mathbb{n}}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (6.16)$$

$$G_{i1}^{\mathbb{n}} = \sigma_{i1}^{\mathbb{n}}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (6.17)$$

$$G_{ij}^{\mathbb{n}} = \varepsilon_{ij}^{\mathbb{n}}, \quad i, j = 2, \dots, N, \quad (6.18)$$

respectivement. Alors, la théorie montre que:  $\mathbb{C}^{\mathbb{n}} \rightarrow \mathbb{C}^{eff}$  et on retrouve les formules des matériaux en tranches linéairement élastiques établies par Mac Connell.

## 6.4 Retour sur l'équation de diffusion

La formule permettant de calculer la matrice effective des coefficients homogénéisés donnée par (6.9) dans le cas de l'équation de la diffusion est vraie sous l'hypothèse moins forte que celle qui est a priori imposée par la théorie abstraite de la H-convergence puisqu'elle se réduit à  $A_{11}^{(n)}(x_1) \geq \alpha > 0$  p.p. en  $x_1$  si  $A^{(n)} = A^{(n)}(x_1)$  (les couches sont orientées perpendiculairement à  $e_1$  pour fixer les idées). Cette remarque reste vraie pour l'équation d'évolution (non elliptique):

$$\rho^{(n)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} (a^{(n)}(x) \frac{\partial u^{(n)}}{\partial x}) = f$$

si  $a^{(n)} \geq \alpha > 0$  et si  $\rho^{(n)} \geq \alpha > 0$  p.p. dans  $\Omega$ ,  $\forall n$  car alors: si  $\rho^{(n)} \rightarrow \rho^\infty$  et si  $\frac{1}{a^{(n)}} \rightarrow \frac{1}{a^\infty}$  dans  $L^\infty(\Omega)$  faible \*, alors l'équation "limite" effective est du même type avec  $\rho^{(n)}$  et  $a^{(n)}$  remplacés par  $\rho^\infty$  et  $a^\infty$  resp.

**Remarque 6.6** Dans le cas de l'équation non linéaire

$$\operatorname{div} (F^{(n)}(x_1, \operatorname{grad}(u^{(n)}))) = f,$$

le même raisonnement dit que l'on doit remplacer  $D^{(n)} = F^{(n)}(x_1, E^{(n)})$  par un système de la forme:

$$\begin{pmatrix} E_1^{(n)} \\ D_2^{(n)} \\ \dots \\ D_N^{(n)} \end{pmatrix} = G^{(n)} \left( x_1, \begin{pmatrix} D_1^{(n)} \\ E_2^{(n)} \\ \dots \\ E_N^{(n)} \end{pmatrix} \right).$$

Il faut avoir  $F_1^{(n)}$  inversible dans la direction de  $e_1$ , mais on ne sait pas passer à la limite. Par contre, on sait construire des solutions oscillantes explicites lorsque  $f \equiv 0$ . Le candidat à un théorème d'homogénéisation est identifié, mais la conclusion reste à établir.

## 6.5 Le problème de l'élasticité non linéaire

En élasticité non linéaire, on utilise le tenseur (non symétrique) des contraintes de Piola-Kirchhoff et on définit le tenseur des déformations par  $E_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  où  $u(x)$  est le déplacement d'un point matériel  $x$  entre sa position de départ et la position finale  $x + u(x)$ . Pour un matériau tel que l'acier,  $F$  est proche de l'espace des matrices de rotation  $SO(3)$  alors qu'en élasticité linéarisée l'approximation consiste

à dire que la déformation est proche de  $I$ . En élasticité non linéaire les composantes du bon vecteur  $G^{\mathbb{N}}$  sont

$$G_{i1}^{\mathbb{N}} = \sigma_{i1}^{\mathbb{N}}, \quad G_{1i}^{\mathbb{N}} = \sigma_{1i}^{\mathbb{N}}, \quad i = 1, \dots, N; \quad (6.19)$$

$$G_{ij}^{\mathbb{N}} = F_{ij}^{\mathbb{N}}, \quad i, j = 2, \dots, N. \quad (6.20)$$

tandis que les composantes oscillantes en  $x_1$  sont représentées par un tenseur  $O^{\mathbb{N}}$  tel que

$$O_{i1}^{\mathbb{N}} = F_{i1}^{\mathbb{N}}, \quad O_{1i}^{\mathbb{N}} = F_{1i}^{\mathbb{N}}, \quad i = 1, \dots, N; \quad (6.21)$$

$$O_{ij}^{\mathbb{N}} = \sigma_{ij}^{\mathbb{N}}, \quad i, j = 2, \dots, N. \quad (6.22)$$

Alors, on remplace la relation usuelle  $\sigma^{\mathbb{N}} = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}(x_1, F^{\mathbb{N}})$  par la relation  $O^{\mathbb{N}} = G^{\mathbb{N}}(x_1, D^{\mathbb{N}})$  qui permet d'identifier a priori le problème homogénéisé si le passage à la limite est autorisé. En général, on ne sait pas si cette limite existe. Néanmoins, dans le cas de matériaux hyperélastiques, une condition naturelle à imposer est que l'énergie du matériau soit uniformément convexe dans toutes les directions de la forme  $a \otimes e_1$ .

## 6.6 Une condition abstraite

La condition

$$(D - \lambda_- E \cdot D - \lambda_+ E) \leq 0 \quad \text{pour } \lambda_- \leq \lambda_+ \quad (6.23)$$

est intéressante pour caractériser les milieux homogénéisés. Elle peut être vue comme une généralisation de la relation  $D^\infty = a E^\infty$  des milieux isotropes puisqu'elle signifie exactement que  $D$  est dans la boule fermée de  $\mathbb{R}^N$  de diamètre  $[\lambda_- E, \lambda_+ E]$ . D'un point de vue mathématique, elle nous intéresse car elle passe à la limite au sens suivant:

**Lemme 6.7** *Si  $0 < \alpha \leq b^{\mathbb{N}} \leq a^{\mathbb{N}} \leq \beta < +\infty$  p.p. dans  $\Omega$  et si*

$$(E^{\mathbb{N}}, D^{\mathbb{N}}) \rightharpoonup (E^\infty, D^\infty), \quad L^2_{loc}(\Omega) \times L^2_{loc}(\Omega) \text{ faible}, \quad (6.24)$$

$$(D^{\mathbb{N}} \cdot E^{\mathbb{N}}) \rightharpoonup (D^\infty \cdot E^\infty), \quad \text{au sens des mesures vagues}, \quad (6.25)$$

$$a^{\mathbb{N}} \rightharpoonup a^\infty, \quad L^\infty(\Omega) \text{ faible } *, \quad (6.26)$$

$$\frac{1}{b^{\mathbb{N}}} \rightharpoonup \frac{1}{b^\infty}, \quad L^\infty(\Omega) \text{ faible } *, \quad (6.27)$$

et si on suppose en outre que

$$(D^{\mathbb{N}} - a^{\mathbb{N}} E^{\mathbb{N}} \cdot D^{\mathbb{N}} - b^{\mathbb{N}} E^{\mathbb{N}}) \leq 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega$$

alors:

$$(D^\infty - a^\infty E^\infty \cdot D^\infty - b^\infty E^\infty) \leq 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega$$



Dans le cas général où  $a^{(\mathbb{n})} < b^{(\mathbb{n})}$  est possible, le théorème concerne les matériaux tels que  $D^{(\mathbb{n})} = M^{(\mathbb{n})} E^{(\mathbb{n})}$  où  $M^{(\mathbb{n})}$  est symétrique, non nécessairement diagonale et il dit qu'à la limite on a encore la structure  $D^\infty = M^\infty E^\infty$  avec  $M^\infty$  symétrique.

En effet, on vérifie que si deux vecteurs  $D, E$  de  $\mathbb{R}^N$  sont reliés par (6.23), alors il existe une matrice  $M$  symétrique  $M$  telle que  $D = M E$  et que les valeurs propres de  $M$  sont dans l'intervalle  $[\lambda_-, \lambda_+]$ . Ce dernier point permet d'appliquer le Lemme 6.7 avec  $b^{(\mathbb{n})} = \lambda_1(M^{(\mathbb{n})})$  et  $a^{(\mathbb{n})} = \lambda_N(M^{(\mathbb{n})})$  si on ordonne les valeurs propres de  $M^{(\mathbb{n})}$  suivant

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N.$$

Cela se vérifie ainsi: si  $M$  est symétrique, on peut toujours se placer dans une base orthonormée de  $\mathbb{R}^N$  qui la diagonalise. Alors:  $D = M E$  s'écrit, composante par composante:  $D_j = \lambda_j E_j, j = 1, \dots, N$ , d'où

$$|(D - \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_N) E)_j| \tag{6.28}$$

$$= |\lambda_j - \frac{(\lambda_1 + \lambda_N)}{2}| |E_j| \tag{6.29}$$

$$\leq \frac{|\lambda_1 - \lambda_N|}{2} |E_j| \tag{6.30}$$

c'est-à-dire:

$$((M - \frac{\lambda_1 + \lambda_N}{2} I) E \cdot E) \leq \frac{|\lambda_1 - \lambda_N|}{2} |E|^2$$

ce qui montre que les valeurs propres de la matrice symétrique translatée de  $M$ , soit  $M - \frac{(\lambda_1 + \lambda_N)}{2} I$ , sont de module  $\leq \frac{|\lambda_1 - \lambda_N|}{2}$ . Le passage à la limite permet d'identifier  $\lambda_+, \frac{1}{\lambda_-}$  comme

$$a^{(\mathbb{n})} = \lambda_N(M^{(\mathbb{n})}) \rightarrow \lambda_+; \tag{6.31}$$

$$\frac{1}{b^{(\mathbb{n})}} = \frac{1}{\lambda_1(M^{(\mathbb{n})})} \rightarrow \frac{1}{\lambda_-}, \quad L^\infty(\Omega) \quad \text{faible.} \quad * \tag{6.32}$$

**Remarque 6.8** La construction qui donne  $M$  telle que  $D = M E$  montre que si  $N \geq 2$  et si  $E \neq 0$  avec  $(D - \lambda_- E \cdot D - \lambda_+ E) = 0$ , c'est-à-dire si  $D$  est sur la sphère de diamètre  $[\lambda_- E, \lambda_+ E]$ , alors  $D = M E$  pour une matrice symétrique  $M$  telle que  $\lambda_1(M) = \lambda_-$  et  $\lambda_2(M) = \dots = \lambda_N(M) = \lambda_+$ . En particulier, cette sphère est ou non réduite à un point suivant que l'on est dans le cas isotrope ou non isotrope.

Le Lemme 6.7 est aussi une conséquence du résultat suivant:

**Lemme 6.9** Soit la fonction réelle  $\Phi$  définie sur  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times (0, +\infty)^2$  par:

$$\Phi(E, D, a, b) = \frac{1}{(a-b)} (D - a E \cdot D - b E) \quad \text{si } a < b, \quad (6.33)$$

$$\Phi(E, D, a, b) = 0 \quad \text{si } a = b \quad \text{et } D = a E, \quad (6.34)$$

$$\Phi(E, D, a, b) = +\infty \quad \text{sinon.} \quad (6.35)$$

Alors,  $\Phi$  est une fonction convexe de  $(E, D, (D \cdot E), a, \frac{1}{b})$ . Plus précisément:

$$\begin{aligned} \Phi(E, D, a, b) &= \quad (6.36) \\ &= \sup_{v, w \in \mathbb{R}^N} (- (D \cdot E) + 2 (E \cdot v) + 2 (D \cdot w) - \frac{1}{v} |v|^2 - 2 (v \cdot w) - a |w|^2) \quad (6.37) \end{aligned}$$

**Preuve.** On s'inspire des résultats du cas isotrope où  $D \stackrel{\textcircled{n}}{=} a_n E \stackrel{\textcircled{n}}{=}$ . En effet: ce cas fait intervenir les limites dans  $L^\infty(\Omega)$  faible \* des quantités  $a_n, \frac{1}{a_n}$  (soit  $a_+, \frac{1}{a_-}$  resp. ) dès que  $a_n$  ne dépend que d'une seule variable ( $x_1$  pour fixer les idées), ou, ce qui revient au même, d'une combinaison linéaire des composantes  $x_1, \dots, x_N$ . On construit alors des suites  $E \stackrel{\textcircled{n}}{=}, D \stackrel{\textcircled{n}}{=} a_n E \stackrel{\textcircled{n}}{=}$  telles que  $E \stackrel{\textcircled{n}}{\rightharpoonup} E^\infty, D \stackrel{\textcircled{n}}{\rightharpoonup} D^\infty$ , dans  $L^2(\Omega)$  faible, et on vérifie (par le Lemme Divergence-Rotationnel) que

$$a_n |E \stackrel{\textcircled{n}}{=}|^2 = (D \stackrel{\textcircled{n}}{=} \cdot E \stackrel{\textcircled{n}}{=}) \rightharpoonup (D^\infty \cdot E^\infty) \quad \text{faible}$$

au sens des mesures vagues. Dans le cas général, on s'intéresse donc à l'enveloppe convexe (fermée) dans  $\mathbb{R}^{2N+k+1}$  de l'ensemble

$$K = \{(E, a E, a |E|^2, f_1(a), \dots, f_k(a)), \quad E \in \mathbb{R}^N, \quad a \in [\lambda_-, \lambda_+] \}$$

où  $f_1, \dots, f_k$  sont  $k$  fonctions données sur un intervalle  $[\lambda_-, \lambda_+]$ . Les calculs font alors naturellement intervenir les limites dans  $L^\infty(\Omega)$  faible \* des quantités  $a_n, \frac{1}{a_n}$ . De plus, caractériser  $\overline{\text{conv}}(K)$  revient à minimiser sur  $E \in \mathbb{R}^N, a \in [\lambda_-, \lambda_+]$  des expressions de la forme

$$(v \cdot E) + (w \cdot a E) + C a |E|^2 + \sum_{i=1}^k C_i f_i(a)$$

lorsque  $v, w, \in \mathbb{R}^N, C, C_1, \dots, C_k \in \mathbb{R}$ . Or, on trouve  $-\infty$  dès que  $C < 0$  ou que  $C = 0$  et  $v, w$  sont non tous deux nuls. Autrement dit, on est ramené (après normalisation) à calculer

$$\inf_{E \in \mathbb{R}^N} \{(v \cdot E) + (w \cdot a E) + a |E|^2\} = f(v, w).$$

Or:

$$\min_{E \in \mathbb{R}^N} (a |E|^2 + (E \cdot v) + (a E \cdot w)) = \quad (6.38)$$

$$= \min_{E \in \mathbb{R}^N} (a |E|^2 - 2 (E \cdot (\frac{-v}{2})) - 2 (a E \cdot (\frac{-w}{2}))) = \quad (6.39)$$

$$= -\frac{1}{a} \left| -\frac{v}{2} - \frac{aw}{2} \right|^2 = \quad (6.40)$$

$$= -\frac{1}{4a} |v + aw|^2 = \quad (6.41)$$

$$= -\frac{1}{4a} |v|^2 - \frac{(v \cdot w)}{2} - \frac{a|w|^2}{4} \quad (6.42)$$

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^N. \quad (6.43)$$

On passe à la limite dans l'inégalité

$$a_n |E^{(\mathbf{n})}|^2 + (E^{(\mathbf{n})} \cdot v) + (a_n E^{(\mathbf{n})} \cdot w) \quad (6.44)$$

$$\geq -\frac{1}{4b_n} |v|^2 - \frac{v \cdot w}{2} - \frac{a_n |w|^2}{4} \quad (6.45)$$

et on obtient:  $(a_n \rightharpoonup a_\infty, \frac{1}{a_n} \rightharpoonup \frac{1}{b_\infty}$  dans  $L^\infty(\Omega)$  faible \*)

$$(D^\infty \cdot E^\infty) + (E^\infty \cdot v) + (D^\infty \cdot w) \quad (6.46)$$

$$\geq -\frac{1}{4b_\infty} |v|^2 - \frac{v \cdot w}{2} - \frac{a_\infty |w|^2}{4} \quad (6.47)$$

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^N. \quad (6.48)$$

On minimise le membre de gauche de (6.46) par rapport aux variables  $v, w \in \mathbb{R}^N$ , ce qui entraîne que les dérivées partielles par rapport à  $v$  et  $w$  s'annulent. Il en résulte que:

$$(E^\infty \cdot \bar{v}) + (D^\infty \cdot \bar{w}) + \frac{(v \cdot \bar{v})}{2b_\infty} + \frac{(\bar{v} \cdot w) + (v \cdot \bar{w})}{2} + \frac{a_\infty}{2} (w \cdot \bar{w}) = 0 \quad (6.49)$$

$$\forall \bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^N, \quad (6.50)$$

c'est-à-dire

$$(E^\infty + \frac{v}{2b_\infty} + \frac{w}{2}) \cdot \bar{v} + (D^\infty + \frac{v}{2} + \frac{a_\infty}{2} w) \cdot \bar{w} = 0, \quad (6.51)$$

$$\forall \bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^N, \quad (6.52)$$

c'est-à-dire encore:  $(v, w) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$  est solution du système

$$E^\infty + \frac{v}{2b_\infty} + \frac{w}{2} = 0, \quad (6.53)$$

$$D^\infty + \frac{v}{2} + \frac{a_\infty}{2} w = 0. \quad (6.54)$$

On en déduit la condition nécessaire:

$$v + a_\infty w = -2D^\infty, \quad (6.55)$$

$$\frac{v}{b_\infty} + w = -2E^\infty, \quad (6.56)$$

avec la restriction  $0 < b_\infty \leq a_\infty$ . Le déterminant du système linéaire (6.55)-(6.56) de deux équations en les deux inconnues  $v, w$  est  $1 - \frac{a_\infty}{b_\infty}$ . Si  $0 < b_\infty < a_\infty$ , alors

il y a une solution unique donnée par

$$v = \frac{2b_\infty}{(b_\infty - a_\infty)} (a_\infty E^\infty - D^\infty) \quad (6.57)$$

$$w = \frac{2}{(b_\infty - a_\infty)} (D^\infty - b_\infty E^\infty) \quad (6.58)$$

De (6.38)-(6.43) on déduit alors que:

$$(a_\infty - b_\infty) (D^\infty \cdot E^\infty) - b_\infty (E^\infty \cdot (a_\infty E^\infty - D^\infty)) \quad (6.59)$$

$$- (D^\infty \cdot (D^\infty - b_\infty E^\infty)) \geq 0 \quad (6.60)$$

c'est-à-dire

$$(D^\infty - b_\infty E^\infty \cdot D^\infty - a_\infty E^\infty) \leq 0.$$

Si  $a_\infty = b_\infty$ , alors,  $D^\infty = a_\infty E^\infty$  p.p. dans  $\Omega$  et cela est réalisé si et seulement si  $a_n \rightarrow a_\infty$  dans  $L^1_{loc}(\Omega)$  fort, c'est-à-dire dans  $L^p_{loc}(\Omega)$  fort,  $\forall p < +\infty$ . ■

**Remarque 6.10** *Le Lemme 6.9 fournit un résultat optimal.*

**Remarque 6.11** *On peut étendre le Lemme 6.9 au cas de tranches perpendiculaires à une direction  $e$  arbitrairement donnée. En effet: il suffit de substituer à  $D_1$  et  $E_2, \dots, E_N$  les bonnes directions  $e$  et  $E - (E \cdot e)e$  resp. Plus précisément, on écrit que*

$$(E^{(\mathbb{N})} \cdot e) = \frac{1}{a_n} (D^{(\mathbb{N})} \cdot e), \quad (6.61)$$

$$D^{(\mathbb{N})} - (D^{(\mathbb{N})} \cdot e)e = a_n (E^{(\mathbb{N})} - (E^{(\mathbb{N})} \cdot e)e) \quad (6.62)$$

dont les limites sont:

$$(E^\infty \cdot e) = \frac{1}{b_\infty} (D^{(\mathbb{N})} \cdot e), \quad (6.63)$$

$$D^\infty - (D^\infty \cdot e)e = a_\infty (E^\infty - (E^\infty \cdot e)e) \quad (6.64)$$

Des raisonnements plus compliqués permettent d'établir d'autres estimations.

## 7 COMPACTITÉ PAR COMPENSATION ET ESTIMATIONS DE BORNES EFFECTIVES

### 7.1 Le Lemme Divergence-Rotationnel

On rappelle le résultat fondamental établi par F. Murat et L. Tartar en 1974.

**Lemme 7.1** *Soit*

$$E^{\textcircled{n}} \rightharpoonup E^\infty \quad L^2(\Omega; \mathbb{R}^N) \text{ faible}, \quad (7.1)$$

$$D^{\textcircled{n}} \rightharpoonup D^\infty \quad L^2(\Omega; \mathbb{R}^N) \text{ faible}, \quad (7.2)$$

$$\frac{\partial E_j^{\textcircled{n}}}{\partial x_k} - \frac{\partial E_k^{\textcircled{n}}}{\partial x_j} \in \text{borné de } L^2(\Omega) \text{ fort} \quad (7.3)$$

$$(\text{ resp. } \in \text{ compact de } H^{-1}(\Omega) \text{ fort}), \quad (7.4)$$

$$\sum_{j=1}^N \frac{\partial D_j^{\textcircled{n}}}{\partial x_j} \in \text{borné de } L^2(\Omega) \quad (7.5)$$

$$(\text{ resp. } \in \text{ compact de } H^{-1}(\Omega) \text{ fort}), \quad (7.6)$$

Alors:

$$\sum_{j=1}^N E_j^{\textcircled{n}} D_j^{\textcircled{n}} =: (E^{\textcircled{n}} \cdot D^{\textcircled{n}}) \quad (7.7)$$

$$\rightharpoonup \sum_{j=1}^N E_j^\infty D_j^\infty =: (E^\infty \cdot D^\infty) \quad \text{au sens des mesures vagues.} \quad (7.8)$$

*c'est-à-dire*

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c(\Omega), \quad \int_{\Omega} (E^{\textcircled{n}} \cdot D^{\textcircled{n}}) \varphi \, dx \rightharpoonup \int_{\Omega} (E^\infty \cdot D^\infty) \varphi \, dx$$

**Remarque 7.2** *Si*  $N = 1$ , (7.6) entraîne que

$$D^{\textcircled{n}} \rightarrow D^\infty \quad L^2(\Omega) \text{ fort}$$

*et alors (7.7)-(7.8) est vrai au sens de la topologie faible  $\sigma(L^1(\Omega), L^\infty(\Omega))$  de  $L^1(\Omega)$ . Mais cela n'est pas toujours vrai dès que  $N \geq 2$ .*

**Preuve.** En effet: on peut construire un contre-exemple dû à L. Tartar comme suit. Soit  $\omega \subset\subset \Omega$  où  $\omega$  est une petite boule ouverte. On résout:

$$-\Delta u_n = 0, \quad \omega; \quad (7.9)$$

$$u_n = w_n \quad \partial\omega \quad (7.10)$$

où  $w_n \in H^{1/2}(\partial\omega)$  est choisi tel que:

$$w_n \rightharpoonup 0, \quad H^{1/2}(\partial\omega) \text{ faible}, \quad (7.11)$$

$$w_n \quad \text{ne converge pas fortement vers } 0, \quad \text{dans } L^2(\partial\omega) \text{ fort.} \quad (7.12)$$

Ceci est toujours possible dès que  $H^{1/2}(\partial\omega)$  est de dimension infinie, c'est-à-dire dès que  $N \geq 2$ . Alors

$$u_n \rightharpoonup 0, \quad H^1(\omega) \text{ faible}$$

mais

$$u_n \text{ ne converge pas fortement vers } 0 \text{ dans } H^1(\omega).$$

On prolonge  $u_n$  par 0 dans  $\Omega - \omega$  en résolvant

$$-\Delta u_n = 0, \quad \Omega \setminus \omega; \tag{7.13}$$

$$u_n = w_n \quad \partial\omega; \tag{7.14}$$

$$u_n = 0 \quad \partial\Omega. \tag{7.15}$$

On obtient ainsi une suite  $u_n \in H_0^1(\Omega)$  telle que

$$u_n \rightharpoonup 0, \quad H_0^1(\Omega) \text{ faible}, \tag{7.16}$$

et la convergence dans  $H_0^1(\Omega)$  n'est pas forte. Dans  $\omega$ , on définit

$$E^{(\mathbb{N})} = \text{grad}(u_n), \quad D^{(\mathbb{N})} = \text{grad}(u_n).$$

On étend  $E^{(\mathbb{N})}$  et  $D^{(\mathbb{N})}$  à  $\Omega$  de deux manières distinctes. Soit  $P \in \mathcal{L}(H^1(\omega); H^1(\mathbb{R}^N))$  un opérateur d'extension de  $\omega$  à  $\mathbb{R}^N$ . On pose

$$E^{(\mathbb{N})} = \text{grad}(P u_n) \quad \text{dans } \Omega.$$

L'extension de  $D^{(\mathbb{N})}$  est choisie de sorte que  $\text{div}(D^{(\mathbb{N})})$  soit bornée au sens du Lemme 7.1. Plus précisément, on construit  $\psi \in H^1(\Omega \setminus \omega)$  en résolvant

$$-\Delta \psi_n = 0, \quad \Omega \setminus \omega, \tag{7.17}$$

$$\psi_n = 0, \quad \partial\Omega; \tag{7.18}$$

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial \nu} = D^{(\mathbb{N})} \cdot \nu \quad (= \frac{\partial u_n}{\partial \nu}), \quad \partial\omega \tag{7.19}$$

où  $\nu$  désigne la normale orientée extérieure à  $\partial\omega$ . Cette définition a un sens. En effet: par construction

$$\frac{\partial u_n}{\partial \nu} \in H^{-1/2}(\partial\omega) = (H^{1/2}(\partial\omega))',$$

ce qui revient au même de dire que  $D^{(\mathbb{N})} \in H(\text{div}; \omega)$  par construction et qu'un théorème de régularité de J-L. Lions entraîne que la trace  $D^{(\mathbb{N})} \cdot \nu$  existe dans  $H^{-1/2}(\partial\omega)$ . Maintenant,  $D^{(\mathbb{N})}$  peut être étendu à  $\Omega$  en posant  $D^{(\mathbb{N})} = \text{grad}(\psi_n)$  dans  $\Omega \setminus \omega$  et  $\text{div}(D^{(\mathbb{N})}) = 0$  dans  $\Omega$ . Le lemme 7.1 s'applique et montre que

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c(\Omega), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (E^{(\mathbb{N})} \cdot D^{(\mathbb{N})}) \varphi \, dx = 0$$

Mais si on prend seulement  $\varphi = \chi_\omega \in L^\infty(\Omega)$ , alors

$$\int_{\Omega} (E^{(\mathbb{N})} \cdot D^{(\mathbb{N})}) \varphi \, dx = \int_{\omega} (E^{(\mathbb{N})} \cdot D^{(\mathbb{N})}) \, dx = \int_{\omega} |\text{grad}(u_n)|^2 \, dx \tag{7.20}$$

et cette quantité ne converge pas vers 0. On aboutit ainsi à une contradiction. Donc on ne peut pas remplacer la convergence au sens des mesures vagues par la topologie faible  $\sigma(L^1(\Omega), L^\infty(\Omega))$  de  $L^1(\Omega)$  dès que  $N \geq 2$ . Par contre, on peut améliorer le résultat en prenant les fonctions-tests  $\varphi$  dans  $VMO \cap L^\infty(\Omega)$ . ■

**Remarque 7.3** *Le produit scalaire  $(E \cdot D)$  est la seule application non affine qui passe à la limite faible. Plus précisément, il est l'unique réponse au problème suivant: chercher toutes les fonctions continues  $F$  sur  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$  telles que pour toutes les suites vérifiant*

$$E^{(\mathbb{n})} \rightharpoonup E^\infty, \quad L^\infty(\Omega) \text{ faible } *, \quad (7.21)$$

$$D^{(\mathbb{n})} \rightharpoonup D^\infty, \quad L^\infty(\Omega) \text{ faible } *, \quad (7.22)$$

$$\operatorname{div}(D^{(\mathbb{n})}) \in \text{partie bornée de } L^\infty(\Omega), \quad (7.23)$$

$$\operatorname{rot}(E^{(\mathbb{n})}) \in \text{partie bornée de } L^\infty(\Omega), \quad (7.24)$$

on ait

$$F(E^{(\mathbb{n})}, D^{(\mathbb{n})}) \rightharpoonup F(E^\infty, D^\infty) \quad L^\infty(\Omega) \text{ faible } *.$$

Ce problème a été résolu par F. Murat et L. Tartar qui ont montré que cela se réalise pour  $F$  continue sur  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$  si et seulement si: il existe une constante  $c \in \mathbb{R}$  telle que

$$F(E, D) = c(E \cdot D) + \text{fonction affine de } (E, D) = \quad (7.25)$$

$$= c_1 + c_2 \cdot E + c_3 \cdot D + c_4(E \cdot D) \quad (7.26)$$

où  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 4$ ,  $c_j \in \mathbb{R}^N$ ,  $j = 2, 3$ . Autrement dit, même si les hypothèses plus fortes (7.21)-(7.24) sont satisfaites, le résultat général est que

$$\forall j = 1, \dots, N, \quad E_j^{(\mathbb{n})} D_j^{(\mathbb{n})} \rightharpoonup E_j^\infty D_j^\infty + R_j$$

où  $R_j$  est un reste et le Lemme 7.1 dit que  $R_1 + \dots + R_N = 0$ , ce qui justifie le nom de "compacité par compensation" donné par J-L. Lions au procédé.

**Remarque 7.4** *Le cadre abstrait pour la synthèse du raisonnement précédent est le suivant: sous des hypothèses de convergence faible du type de (7.24)-(7.22) complétées par des informations différentielles telles que (7.23)-(7.24), on peut passer à la limite faible*

$$F(E^{(\mathbb{n})}, D^{(\mathbb{n})}) \rightharpoonup F(E^\infty, D^\infty)$$

pour toute fonction  $F$  continue sur  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$  de la forme (7.25)-(7.26).

## 7.2 Généralisation: le théorème quadratique

S'appuyant sur un article de Schulenberger et Wilcox signalé par J-L. Lions, F. Murat donne une première généralisation du Lemme 7.1 sous la forme d'un théorème

bilinéaire: se donnant une première (resp. deuxième) suite  $U^{(\mathbb{n})}$  (resp.  $V^{(\mathbb{n})}$ ) convergeant faiblement vers une première (resp. deuxième) limite  $U^\infty$  (resp.  $V^\infty$ ) et satisfaisant une première (resp. deuxième) liste de contraintes différentielles, il caractérisait l'ensemble des formes bilinéaires  $B$  ayant la propriété que  $B(U^{(\mathbb{n})}, V^{(\mathbb{n})})$  converge automatiquement vers  $B(U^\infty, V^\infty)$  au sens des mesures vagues. Sur une suggestion de L. Tartar, il établit ensuite la variante quadratique: si  $U^{(\mathbb{n})}$  converge faiblement vers une limite  $U^\infty$  et vérifie une liste de contraintes différentielles, il caractérise les formes quadratiques  $Q$  telles que  $Q(U^{(\mathbb{n})})$  converge automatiquement vers  $Q(U^\infty)$  au sens des mesures vagues. Finalement, L. Tartar vérifie que cela revient à chercher les formes quadratiques  $Q$  telles que: si  $Q(U^{(\mathbb{n})})$  converge au sens des mesures vagues vers une limite  $\nu$ , alors cela implique que nécessairement  $\nu \geq Q(U^\infty)$  et la même méthode que celle qui a permis d'établir le Lemme 7.1 donne ici la caractérisation exacte sans l'hypothèse de rang constant utilisée dans la première approche de F. Murat.

Le résultat de base est contenu dans l'énoncé suivant dit "Théorème quadratique":

**Théorème 7.5** *Soit*

$$U^{(\mathbb{n})} \rightharpoonup U^\infty \quad L^2(\Omega)^N \text{ faible}, \quad (7.27)$$

$$\sum_{j,k=1}^N A_{ijk} \frac{\partial U_j^{(\mathbb{n})}}{\partial x_k} \in \text{compact de } H^{-1}(\Omega) \text{ fort}, \quad i = 1, \dots, q. \quad (7.28)$$

On introduit les ensembles caractéristiques

$$\mathcal{V} = \{(\lambda, \xi) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^N - \{0\}, \quad \sum_{j,k} A_{ijk} \lambda_j \xi_k = 0, \quad i = 1, \dots, q\}, \quad (7.29)$$

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^p; \quad \exists \xi \in \mathbb{R}^N - \{0\}, \quad (\lambda, \xi) \in \mathcal{V}\} \quad (7.30)$$

ainsi que, pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^N - \{0\}$ :

$$\Lambda_\xi = \{\lambda \in \mathbb{R}^p, \quad (\lambda, \xi) \in \mathcal{V}\}.$$

Alors  $\Lambda = \cup_{\xi \in \mathbb{R}^N - \{0\}} \Lambda_\xi$ . En outre, si on suppose que  $\dim \Lambda_\xi$  ne dépend pas de  $\xi$  (hypothèse de rang constant), alors: la condition nécessaire et suffisante pour qu'une forme quadratique  $Q$  vérifie

$$Q(U^{(\mathbb{n})}) \rightharpoonup Q(U^\infty) \quad \text{au sens des mesures vagues}$$

est que  $Q(\lambda) = 0, \quad \forall \lambda \in \Lambda$ .

**Remarque 7.6** *Le Lemme 7.1 correspond au cas où  $U = (E, D)$  avec la liste des informations différentielles portant sur  $\operatorname{div}(D)$  et  $\operatorname{rot}(E)$ . Alors, les ensembles caractéristiques associés s'écrivent:*

$$\mathcal{V} = \{(e, d, \xi); \quad \xi \text{ parallèle à } e \quad (7.31)$$

$$\text{et perpendiculaire à } d\}, \quad (7.32)$$

$$\Lambda = \{(e, d), \quad (e \cdot d) = 0\} \quad (7.33)$$



On vérifie que si  $Q(U) = (e \cdot d)$ ,  $\forall U = (e, d) \in \Lambda$ , alors le Théorème 7.5 dit que

$$(E^{\textcircled{n}} \cdot D^{\textcircled{n}}) \rightharpoonup (E^\infty \cdot D^\infty) \quad \text{au sens des mesures vagues.}$$

La Remarque 7.6 permet de reformuler le problème en posant la question: caractériser les formes quadratiques  $Q$  telles que: si  $Q(U^{\textcircled{n}}) \rightharpoonup \mu$  au sens des mesures vagues, alors  $\mu \geq Q(U^\infty)$  avec les mêmes notations que plus haut. Plus précisément, on a le

**Théorème 7.7** Soit  $U^{\textcircled{n}}$  une suite vérifiant (7.27)-(7.28). Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une forme quadratique  $Q$  vérifie

$$\text{si } (Q(U^{\textcircled{n}}) \rightharpoonup Q(U^\infty) + \mu \quad \text{au sens des mesures } ) \quad \text{alors } (\mu \geq 0)$$

est que  $Q(\lambda) \geq 0$ ,  $\forall \lambda \in \Lambda$

**Remarque 7.8** Le Théorème 7.7 est encore appelé "Théorème quadratique sans hypothèse de rang constant".

### 7.3 Retour à l'hypothèse de rang constant

Ce paragraphe est consacré à l'étude d'un contre-exemple montrant que l'hypothèse de rang constant n'est pas toujours vérifiée dans le cadre du Théorème 7.7. En effet, si  $N = 2$ , soit

$$u_i^{\textcircled{n}} \rightharpoonup u_i^\infty, \quad L^2(\Omega) \text{ faible}, \quad i = 1, 2, \quad (7.34)$$

$$\frac{\partial u_1^{\textcircled{n}}}{\partial x_1} \in \text{ borné de } L^2(\Omega), \quad (7.35)$$

$$\frac{\partial u_2^{\textcircled{n}}}{\partial x_2} \in \text{ borné de } L^2(\Omega). \quad (7.36)$$

Alors

$$u_1^{\textcircled{n}} u_2^{\textcircled{n}} \rightharpoonup u_1^\infty u_2^\infty \quad \text{au sens des mesures vagues.} \quad (7.37)$$

Néanmoins: l'hypothèse de rang constant n'est pas vérifiée dans ce cas. En effet: pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^N$ ,  $\xi \neq 0$ , fixé, on a

$$\Lambda_\xi = \{ \lambda \in \mathbb{R}^p, \quad \lambda_1 \xi_1 = \lambda_2 \xi_2 = 0. \}$$

Si  $\xi_1 = 0$ , alors  $\Lambda_\xi = \{(\lambda_1, 0), \quad \lambda_1 \in \mathbb{R} \}$ . Si  $\xi_2 = 0$ , alors  $\Lambda_\xi = \{(0, \lambda_2), \quad \lambda_2 \in \mathbb{R} \}$ . Dans ces deux cas,  $\dim \Lambda_\xi = 1$ . Si  $\xi_1 \xi_2 \neq 0$ , alors  $\Lambda_\xi = \{0\}$  et  $\dim \Lambda_\xi = 0 \neq 1$ .

**Remarque 7.9** On a

$$\Lambda = \cup_{\xi \neq 0} \Lambda_\xi = \{ \lambda \in \mathbb{R}^2, \quad \lambda_1 \lambda_2 = 0 \}$$

Autrement dit,  $\Lambda$  est la réunion des deux axes de coordonnées et annule la forme quadratique  $\lambda_1 \lambda_2$ , conformément à (7.37).

## 7.4 Conditions nécessaires différentielles

On considère la variante suivante de l'énoncé fondamental de la compacité par compensation "sans hypothèse de rang constant". Plus précisément, soit le problème: caractériser les fonctions continues  $F : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant, pour toute suite  $U^{(\mathbb{n})}$  telle que

$$U^{(\mathbb{n})} \rightharpoonup U^\infty \quad L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^p) \text{ faible } *, \quad (7.38)$$

$$\sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^N A_{ijk} \frac{\partial U_j^{(\mathbb{n})}}{\partial x_k} = 0, \quad i = 1, \dots, q, \quad (7.39)$$

la propriété de passer à la limite faible:

$$F(U^{(\mathbb{n})}) \rightharpoonup F(U^\infty) \quad \text{dans } L^\infty(\Omega) \text{ faible } *.$$

Pour cela, on a besoin d'introduire la variété caractéristique de  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^N$

$$\mathcal{V} = \left\{ (\lambda, \xi) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^N, \xi \neq 0, \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^N A_{ijk} \lambda_j \xi_k = 0, \quad i = 1, \dots, q \right\}$$

ainsi que sa projection sur la première composante:

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^p, \exists \xi \in \mathbb{R}^N - \{0\}, (\lambda, \xi) \in \mathcal{V} \right\}$$

On vérifie que  $\Lambda$  contient le critère cherché. En particulier, la première condition nécessaire trouvée sur  $F$  est que  $F''(u)(\lambda, \lambda) = 0$ ,  $\forall \lambda \in \Lambda$ ,  $\forall u \in \mathbb{R}^p$ , dès que  $F$  est suffisamment régulière, c'est-à-dire de classe  $\mathcal{C}^2$ . Plus précisément:

**Proposition 7.10** *Si  $F$  est solution du problème posé ci-dessus et si*

$$(\lambda^m, \xi^m) \in \mathcal{V}, \quad m = 1, \dots, r, \quad \text{avec rang de } (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^r) < r$$

alors:  $\forall a \in \mathbb{R}^p$ ,

$$f''(a)(\lambda \cdot \lambda) = 0, \quad (7.40)$$

$$\dots \quad \dots \quad (7.41)$$

$$f^{(r)}(a)(\lambda^1, \dots, \lambda^r) = 0, \quad (7.42)$$

Autement dit on obtient  $r - 1$  conditions nécessaires différentielles utilisant  $\mathcal{V}$  et les dérivées successives de  $F$  d'ordre  $\leq r$ .

**Remarque 7.11** *La Proposition 7.10 montre qu'en poursuivant l'analyse, on peut ajouter d'autres conditions nécessaires différentielles portant sur  $F$  et  $\mathcal{V}$ . Or, on peut limiter la recherche aux fonctions  $F$  continues en interprétant ces conditions différentielles soit comme des conditions de saut, par analogie avec la condition de Hankine-Hugoniot, soit comme des conditions au sens des distributions.*

## 7.5 Conditions nécessaires de convexité

On a la

**Proposition 7.12** Soit  $F : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ , continue. On suppose que pour toute suite  $U^{(\mathbb{n})}$  vérifiant (7.38)-(7.39) ainsi que

$$F(U^{(\mathbb{n})}) \rightharpoonup V^\infty, \quad L^\infty(\Omega) \text{ faible} \quad * \quad (7.43)$$

on a  $V^\infty \geq F(U^\infty)$  p.p. dans  $\Omega$ . Alors,  $F$  est convexe dans les directions de  $\Lambda$ , c'est-à-dire  $t \mapsto F(a + t\lambda)$  est convexe,  $\forall a \in \mathbb{R}^N$ ,  $\forall \lambda \in \Lambda$ .

**Preuve.** Soit  $(\lambda, \xi) \in \mathcal{V}$ . On considère la suite  $U^{(\mathbb{n})} = a + f_n((\xi \cdot x))\lambda$  où  $f_n$  est une fonction scalaire,  $a \in \mathbb{R}^N$  est donné arbitrairement. Si  $f_n$  est suffisamment régulière, on a, pour tout  $(\lambda, \xi) \in \mathcal{V}$ :

$$\sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^N A_{ijk} \frac{\partial U_j^{(\mathbb{n})}}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^N A_{ijk} \lambda_j \xi_k f'_n((\xi \cdot x)) = 0$$

par définition de  $\mathcal{V}$ . Ceci est encore vrai au sens de  $\mathcal{D}'$  si  $f_n$  est seulement continue. On prend pour  $f_n$  une fonction caractéristique, soit  $f_n = \chi_n \in \{0, 1\}$ , telle que

$$\chi_n \rightharpoonup \theta \quad L^\infty(\mathbb{R}) \text{ faible} \quad *.$$

Alors:

$$U^{(\mathbb{n})} = a + \chi_n((\xi \cdot x))\lambda = \quad (7.44)$$

$$= \chi_n((\xi \cdot x))(a + \lambda) + (1 - \chi_n((\xi \cdot x)))a \quad (7.45)$$

de sorte que

$$U^{(\mathbb{n})} \rightharpoonup U^\infty = a + \theta\lambda, \quad L^\infty(\Omega) \text{ faible} \quad *.$$

Or:

$$F(U^{(\mathbb{n})}) = \chi_n((\xi \cdot x))F(a + \lambda) + (1 - \chi_n((\xi \cdot x)))F(a) \quad (7.46)$$

$$\rightharpoonup \theta F(a + \lambda) + (1 - \theta)F(a) =: V^\infty, \quad \text{dans } L^\infty(\Omega) \text{ faible} \quad \text{\textcircled{7.47}}$$

On en déduit, par hypothèse sur  $F$  que:

$$\theta F(a + \lambda) + (1 - \theta)F(a) \geq F(\theta(a + \lambda) + (1 - \theta)a).$$

■

**Corollaire 7.13** Soit  $F : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ , continue. On suppose que pour toute suite  $U^{(\mathbb{n})}$  vérifiant (7.38)-(7.39) ainsi que (7.43), on ait  $V^\infty = F(U^\infty)$ . Alors:  $F$  est affine dans les directions de  $\Lambda$ .

**Remarque 7.14** Dans le cas particulier où  $\Lambda$  engendre  $\mathbb{R}^p$ , le Corollaire 7.13 signifie que  $F$  est affine dans  $p$  directions linéairement indépendantes, c'est-à-dire que  $F$  est une fonction polynôme de degré  $\leq p$ .

**Proposition 7.15** *Le Corollaire 7.13 donne une condition nécessaire, mais non suffisante.*

**Preuve.** Si le degré de  $F$  est  $\leq 3$ , alors la condition nécessaire (7.40) n'est pas toujours une condition suffisante. En effet: soit

$$u_i^{(n)} \rightharpoonup u_i^\infty \quad L^\infty(\Omega) \text{ faible } *, \quad i = 1, 2, 3; \quad (7.48)$$

$$\frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial x_i} \in \text{ borné de } L^\infty, \quad i = 1, 2; \quad (7.49)$$

$$\frac{\partial u_3^{(n)}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3^{(n)}}{\partial x_2} \in \text{ borné de } L^\infty. \quad (7.50)$$

La variété caractéristique  $\mathcal{V}$  est alors définie par

$$\mathcal{V} = \{ (\lambda, \xi) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^p, \quad \xi \neq 0, \quad \lambda_1 \xi_1 = \lambda_2 \xi_2 = \lambda_3 (\xi_1 + \xi_2) = 0 \}$$

d'où on déduit que si  $\xi_1 \neq 0$  (resp.  $\xi_2 \neq 0$ ), alors  $\Lambda_\xi = \{ \lambda \in \mathbb{R}^3, \quad \lambda_1 = 0 \}$  (resp.  $\Lambda_\xi = \{ \lambda \in \mathbb{R}^3, \quad \lambda_2 = 0 \}$ ). Si  $\xi_1 + \xi_2 = 0$ , alors  $\Lambda_\xi = \{ \lambda \in \mathbb{R}^3, \quad \lambda_3 = 0 \}$ . Il en résulte que  $\Lambda$  est la réunion des trois axes de coordonnées et que les formes quadratiques  $u_1 u_2$ ,  $u_2 u_3$ ,  $u_3 u_1$  sont nulles sur  $\Lambda$ , donc passent à la limite faible. Soit maintenant  $F(U) = U_1 U_2 U_3$ : c'est une fonction polynôme de degré 3 qui vérifie la condition nécessaire (7.40)-(7.42) sur  $\mathbb{R}^3$  sans être faiblement continue.

En effet: il existe une suite  $U^{(n)} = (u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, u_3^{(n)})$  telle que

$$u_1^{(n)} u_2^{(n)} u_3^{(n)} \text{ ne converge pas faiblement vers } u_1^\infty u_2^\infty u_3^\infty.$$

Pour le voir, il suffit de remarquer que

$$u_1^{(n)} = \sin(n x_2) \rightharpoonup 0, \quad L^\infty \text{ faible } *, \quad (7.51)$$

$$u_2^{(n)} = \cos(n x_1) \rightharpoonup 0, \quad L^\infty \text{ faible } *, \quad (7.52)$$

$$u_3^{(n)} = \sin(n(x_1 - x_2)) \rightharpoonup 0, \quad L^\infty \text{ faible } *, \quad (7.53)$$

où

$$u_3^{(n)} = \sin(n x_1) \cos(n x_2) - u_1^{(n)} u_2^{(n)}.$$

Mais

$$u_1^{(n)} u_2^{(n)} u_3^{(n)} = \quad (7.54)$$

$$= \sin \frac{(2n x_1)}{2} \sin \frac{(2n x_2)}{2} - (\sin(n x_2))^2 (\cos(n x_1))^2 - \frac{1}{4} \quad (7.55)$$

$$\rightharpoonup -\frac{1}{4} \neq 0. \quad (7.56)$$

■

## 7.6 Retour sur le cas quadratique: exemple du jacobien

Ce paragraphe s'inspire des travaux de Morrey et Reyschetnyak. On rappelle que dans  $\mathbb{R}^2$ , le jacobien, noté

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x, y)}$$

est la quantité:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}.$$

Le résultat s'énonce:

**Proposition 7.16** *Soit*

$$(\varphi_1^{(\mathbb{n})}, \varphi_2^{(\mathbb{n})}) \rightharpoonup (\varphi_1^\infty, \varphi_2^\infty), \quad \text{dans } W^{1,p}(\Omega) \text{ faible}, p \geq 2.$$

Alors:

$$\frac{\partial\varphi_1^{(\mathbb{n})}}{\partial x} \frac{\partial\varphi_2^{(\mathbb{n})}}{\partial y} - \frac{\partial\varphi_1^{(\mathbb{n})}}{\partial y} \frac{\partial\varphi_2^{(\mathbb{n})}}{\partial x} \tag{7.57}$$

$$\rightharpoonup \frac{\partial\varphi_1^\infty}{\partial x} \frac{\partial\varphi_2^\infty}{\partial y} - \frac{\partial\varphi_1^\infty}{\partial y} \frac{\partial\varphi_2^\infty}{\partial x} \tag{7.58}$$

au sens des mesures vagues.

**Preuve.** On utilise le Lemme Divergence-Rotationnel avec

$$E^{(\mathbb{n})} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1^{(\mathbb{n})}}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi_1^{(\mathbb{n})}}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad D^{(\mathbb{n})} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_2^{(\mathbb{n})}}{\partial y} \\ -\frac{\partial\varphi_2^{(\mathbb{n})}}{\partial x} \end{pmatrix}.$$

On a

$$\frac{\partial\varphi_1^{(\mathbb{n})}}{\partial x} \frac{\partial\varphi_2^{(\mathbb{n})}}{\partial y} - \frac{\partial\varphi_1^{(\mathbb{n})}}{\partial y} \frac{\partial\varphi_2^{(\mathbb{n})}}{\partial x} = \tag{7.59}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left( \varphi_1^{(\mathbb{n})} \frac{\partial\varphi_2^{(\mathbb{n})}}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \varphi_1^{(\mathbb{n})} \frac{\partial\varphi_2^{(\mathbb{n})}}{\partial x} \right) \tag{7.60}$$

Le membre de droite de l'égalité (7.59)-(7.60) est défini pour  $p \geq \frac{4}{3}$ . Si  $p = \frac{4}{3}$ ,

alors le conjugué de  $p$  est  $p^* = 4$  et on raisonne avec  $\varphi^{(\mathbb{n})} \in L^{p^*}$ ,  $\frac{\partial\varphi_2^{(\mathbb{n})}}{\partial x} \in L^p$ .

Si  $p > \frac{4}{3}$ , alors  $\varphi_1^{(\mathbb{n})} \in$  borné de  $W^{1,p} \subset$  compact de  $L^q$  dès que  $p \leq q < p^*$ . On passe à la limite dans chacun des produits apparaissant au second membre de (7.59)-(7.60). ■

Dans  $\mathbb{R}^3$ , le jacobien est aussi le déterminant et on a:

**Proposition 7.17** *Soit*

$$(\varphi_1^{(\mathbb{n})}, \varphi_2^{(\mathbb{n})}, \varphi_3^{(\mathbb{n})}) \rightharpoonup (\varphi_1^\infty, \varphi_2^\infty, \varphi_3^\infty), \quad W^{1,p} \text{ faible}, \quad p \geq 3.$$

*Alors:*

$$\det(\nabla\varphi^{(\mathbb{n})}) \rightharpoonup \det(\nabla\varphi^\infty)$$

*au sens des mesures vagues.*

**Preuve.** On utilise le Lemme Divergence-Rotationnel en prenant pour  $D^{(\mathbb{n})}$  le vecteur dans  $\mathbb{R}^3$  formé des mineurs fondamentaux de  $\nabla\varphi^{(\mathbb{n})}$ , c'est-à-dire:

$$D_1^{(\mathbb{n})} = \frac{\partial(\varphi_2^{(\mathbb{n})}, \varphi_3^{(\mathbb{n})})}{\partial(y, z)}, \quad D_2^{(\mathbb{n})} = \frac{\partial(\varphi_3^{(\mathbb{n})}, \varphi_1^{(\mathbb{n})})}{\partial(z, x)}, \quad D_3^{(\mathbb{n})} = \frac{\partial(\varphi_1^{(\mathbb{n})}, \varphi_2^{(\mathbb{n})})}{\partial(x, y)}.$$

Alors:  $\operatorname{div}(D^{(\mathbb{n})}) = 0$  et on passe à la limite (faible) dans

$$\frac{\partial\varphi_1^{(\mathbb{n})}}{\partial x} D_1^{(\mathbb{n})} + \frac{\partial\varphi_2^{(\mathbb{n})}}{\partial x} D_2^{(\mathbb{n})} + \frac{\partial\varphi_3^{(\mathbb{n})}}{\partial x} D_3^{(\mathbb{n})} \tag{7.61}$$

et on vérifie que (7.61) converge faiblement vers la bonne limite, soit  $\det(\nabla\varphi^\infty)$ . ■

## 7.7 Utilisation des formes différentielles

Les travaux de J. Ball sur l'élasticité non linéaire, qui utilisent les propriétés de lagrangien nul des déterminants de jacobiens, peuvent aisément se retrouver par le Lemme Divergence-Rotationnel dans les cas  $N = 2, 3$ . Mais la généralisation au cas  $N > 3$  n'est pas naturelle. Celle-ci apparaît quand on regarde l'exemple très instructif des formes différentielles. En particulier, comme elles permettent de réécrire le système des équations de Maxwell, on va voir que l'on peut passer à la limite dans ces dernières en utilisant le Lemme divergence-rotationnel. On commence par énoncer un lemme fondamental.

**Lemme 7.18** *Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un ouvert,  $a_n$  (resp.  $b_n$ ) une suite de  $k$ -formes (resp.  $\ell$ -formes) différentielles sur  $\Omega$  de coefficients bornés dans  $L^2(\Omega)$  telles que:*

$$a_n \rightharpoonup a_\infty \quad L^2(\Omega) \text{ faible}, \tag{7.62}$$

$$b_n \rightharpoonup b_\infty \quad L^2(\Omega) \text{ faible}. \tag{7.63}$$

*On suppose en outre que les dérivées extérieures  $da_n, db_n$  ont leurs coefficients bornés dans  $L^2(\Omega)$ . Alors les produits extérieurs vérifient:*

$$a_n \wedge b_n \rightharpoonup a_\infty \wedge b_\infty$$

*au sens des mesures vagues  $\sigma(L^1(\Omega), \mathcal{C}_c)$ .*

**Remarque 7.19** *Un raisonnement analogue montre que la formule*

$$d(a \wedge b) = da \wedge b + (-1)^{|a|} a \wedge db$$

*où  $|a|$  est l'ordre de la forme différentielle  $a$ , passe à la limite faible au sens du Lemme Divergence-Rotationnel.*

## 7.8 Equipartition de l'énergie

Le Lemme Divergence-Rotationnel ne voit pas l'énergie microscopique éventuellement cachée. Pour s'en convaincre, il suffit d'étudier la suite des solutions de l'équation des ondes scalaires:

$$\square u_n := \rho \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} - \Delta u_n = 0, \quad \Omega \times (0, T),$$

telle que

$$u_n \rightharpoonup 0 \quad H_{loc}^1(\Omega \times (0, T)) \quad \text{faible.}$$

Une telle suite existe bien dès lors qu'on se donne des conditions aux limites convenables, par exemple de Dirichlet ou de Neumann, ainsi que des conditions initiales:

$$u_n(\cdot, 0) = v_n, \quad \frac{\partial u_n}{\partial t}(\cdot, 0) = w_n \quad \text{dans } \Omega$$

avec

$$v_n \rightharpoonup v_\infty \quad H^1(\Omega) \quad \text{faible,} \quad (7.64)$$

$$w_n \rightharpoonup w_\infty \quad L^2(\Omega) \quad \text{faible.} \quad (7.65)$$

Alors:

$$\frac{1}{2} \rho \left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^2 \rightharpoonup h, \quad \mathcal{D}', \quad (7.66)$$

$$\frac{1}{2} \rho |\text{grad}(u_n)|^2 \rightharpoonup h, \quad \mathcal{D}', \quad (7.67)$$

pour une certaine mesure  $h$ , de sorte que

$$\frac{1}{2} \rho \left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^2 - \frac{1}{2} \rho |\text{grad}(u_n)|^2$$

converge vers 0 au sens des mesures vagues. Autrement dit, il y a équipartition de l'énergie macroscopique: les énergies cinétique et potentielle ont même limite faible.

## 7.9 Equipartition de l'énergie dans les équations de Maxwell

On s'intéresse au problème de l'équipartition de l'énergie dans les équations de Maxwell:

$$\text{div}(B^{\mathbb{N}}) = 0, \quad (7.68)$$

$$\frac{\partial B^{\mathbb{N}}}{\partial t} + \text{rot}(E^{\mathbb{N}}) = 0, \quad (7.69)$$

$$\text{div}(D^{\mathbb{N}}) = \rho^{\mathbb{N}}, \quad (7.70)$$

$$-\frac{\partial D^{\mathbb{N}}}{\partial t} + \text{rot}(H^{\mathbb{N}}) = j^{\mathbb{N}}. \quad (7.71)$$

Cet exemple est également très instructif car on s'apercevra que le Lemme divergence-rotationnel ne suffit pas pour conclure et qu'il faut soit avoir recours à la version générale de la compacité par compensation, soit utiliser le formalisme des formes différentielles. C'est ce dernier point de vue qu'on se propose d'adopter ici, dû à Joel Robbin pour l'intuition et à L. Tartar pour la mise en oeuvre.

Soit donc

$$B^{\mathbb{N}} \rightharpoonup B^\infty, \quad E^{\mathbb{N}} \rightharpoonup E^\infty, \quad (7.72)$$

$$H^{\mathbb{N}} \rightharpoonup H^\infty, \quad D^{\mathbb{N}} \rightharpoonup D^\infty, \quad (7.73)$$

$$L^2(\Omega \times (0, T)) \text{ faible}, \quad (7.74)$$

$$\rho^{\mathbb{N}} = \operatorname{div}(D^{\mathbb{N}}) \in \text{borné de } L^2(\Omega) \quad (7.75)$$

$$\text{(resp. compact de } H^{-1}(\Omega) \text{ fort.)} \quad (7.76)$$

$$j^{\mathbb{N}} = -\frac{\partial D^{\mathbb{N}}}{\partial t} + \operatorname{rot}(H^{\mathbb{N}}) \in \text{borné de } L^2(\Omega) \quad (7.77)$$

$$\text{(resp. compact de } H^{-1}(\Omega) \text{ fort.)} \quad (7.78)$$

L'équation de l'énergie macroscopique s'écrit:

$$\frac{\partial \rho^\infty}{\partial t} + \rho^\infty = 0.$$

Dans le formalisme des formes différentielles, le champ électrique  $E$  (resp. de polarisation  $D$ ) est associé à la 1-forme  $\tilde{E} = \sum_{i=1}^N E_i dx_i$  (resp. la  $N-1$ -forme

$$\tilde{D} = \sum_{i=1}^N D_i d\tilde{x}_i \text{ où}$$

$$\tilde{x}_i = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_N.$$

La densité de charge  $\rho$  et la densité de courant  $j$  sont les coefficients d'une 3-forme différentielle:

$$\tilde{\rho} j = \rho dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \quad (7.79)$$

$$- (j_1 dx_2 \wedge dx_3 + j_2 dx_3 \wedge dx_1 + j_3 dx_1 \wedge dx_2) \wedge dt \quad (7.80)$$

qui vérifie (Théorème de Poincaré)  $d(\tilde{\rho} j) = 0$ , équivalent à la conservation de la charge:  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(j) = 0$ . Le champ de polarisation  $D$  et le champ magnétique  $B$  sont les coefficients d'une 2-forme

$$\tilde{D} \tilde{H} = D_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + D_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1 + D_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + \quad (7.81)$$

$$- (E_1 dx_1 + E_2 dx_2 + E_3 dx_3) \wedge dt \quad (7.82)$$

et l'équation  $\frac{\partial B}{\partial t} + \operatorname{rot}(E) = 0$  équivaut à  $d(\tilde{B} \tilde{E}) = 0$ . Pour une suite de solutions  $(B^{\mathbb{N}}, E^{\mathbb{N}}, D^{\mathbb{N}}, H^{\mathbb{N}})$  des équations de Maxwell (7.68)-(7.71) convergeant faiblement dans  $L^2_{loc}(\Omega \times (0, T))$  vers  $(B^\infty, E^\infty, D^\infty, H^\infty)$ , le Lemme fondamental dit que l'on peut passer à la limite faible dans toute quantité qui s'exprime



comme le produit extérieur de formes différentielles. En particulier, des formules

$$\widetilde{D}H \wedge \widetilde{D}H = (D \cdot H) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dt, \quad (7.83)$$

$$\widetilde{B}E \wedge \widetilde{B}E = -(B \cdot E) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dt, \quad (7.84)$$

$$\widetilde{D}H \wedge \widetilde{B}E = ((B \cdot H) - (D \cdot E)) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dt, \quad (7.85)$$

on déduit que l'on peut passer à la limite faible dans les quantités  $(D^{(n)} \cdot H^{(n)})$ ,  $(B^{(n)} \cdot E^{(n)})$ ,  $(B^{(n)} \cdot H^{(n)}) - (D^{(n)} \cdot E^{(n)})$ . En particulier, si

$$(B^{(n)}, E^{(n)}, D^{(n)}, H^{(n)}) \rightharpoonup 0 \quad L^2(\Omega \times (0, T)) \quad \text{faible},$$

alors:

$$(B^{(n)} \cdot H^{(n)}) - (D^{(n)} \cdot E^{(n)}) \rightharpoonup 0 \quad \text{au sens des mesures vagues.}$$

Autrement dit, il y a équipartition entre les énergies macroscopiques électrique et magnétique.

## 8 FORME PRÉLIMINAIRE DES H-MESURES

### 8.1 Le cas quadratique

Le problème classique de compacité par compensation dans le cas quadratique est posé sous la forme: soit

$$U \stackrel{\textcircled{n}}{\rightharpoonup} U^\infty \quad L^2(\Omega)^p \text{ faible,} \quad (8.1)$$

$$\sum_{j,k} A_{ijk} \frac{\partial U_j \stackrel{\textcircled{n}}{\rightharpoonup}}{\partial x_k} \in \text{compact de } H^{-1}(\Omega) \text{ fort, } i = 1, \dots, q. \quad (8.2)$$

On se propose de calculer la matrice symétrique  $R = (R_{ij})$  dont le coefficient générique  $R_{ij}$  est une mesure définie par

$$U_i \stackrel{\textcircled{n}}{\rightharpoonup} U_j \stackrel{\textcircled{n}}{\rightharpoonup} \rightharpoonup U_i^\infty U_j^\infty + R_{ij} \quad \text{au sens des mesures vagues.} \quad (8.3)$$

Le Théorème dit que: si  $Q$  est une forme quadratique réelle vérifiant  $Q(\lambda) \geq 0$ ,  $\forall \lambda \in \Lambda$ , et si  $Q(U \stackrel{\textcircled{n}}{\rightharpoonup}) \rightharpoonup l$  au sens des mesures vagues dans  $\Omega$ , alors  $l \geq Q(U^\infty)$  p.p. au sens des mesures vagues dans  $\Omega$ . En termes de la matrice  $R$  définie par (8.3), cela signifie que si on note  $Q(U) = \sum_{i,j} q_{ij} U_i U_j$  avec  $q_{ij} = q_{ji}$ , alors  $\sum_{ij} q_{ij} R_{ij} \geq 0$  pour toute forme quadratique  $Q$  positive dans les directions de  $\Lambda$ , c'est-à-dire pour toute forme quadratique  $Q$  vérifiant  $\sum_{i,j} q_{ij} \lambda_i \lambda_j \geq 0$ ,  $\forall \lambda \in \Lambda$ . Autrement dit: si  $R_{ij}$  est une fonction intégrable,  $\forall i, j$ , alors

$$R(x) \in \text{Conv}\{\lambda \otimes \lambda, \lambda \in \Lambda\} \quad \text{p.p. en } x \in \Omega$$

Dans le cas général où les  $R_{ij}$  sont des mesures (de Radon), le théorème de Radon-Nykodym dit que si  $\mu = R_{11} + \dots + R_{NN}$ , alors  $R_{ij} = \rho_{ij} \tau$  où les fonctions  $\rho_{ij}$  sont  $\tau$ -intégrables et où

$$\rho(x) = (\rho_{ij}(x)) \in \text{Conv}\{\lambda \otimes \lambda, \lambda \in \Lambda\} \quad \tau \text{ p.p. en } x \in \Omega.$$

Or, un point dans l'enveloppe convexe d'un ensemble  $K$  est le centre de masse d'une mesure de probabilité à support dans  $K$ . La théorie des  $H$ -mesures fournit une généralisation du théorème de compacité par compensation et permet, en explicitant cette enveloppe convexe, de décrire ces mesures de probabilité.

### 8.2 Le théorème quadratique

On déduit une condition suffisante de compacité par compensation d'un résultat plus général vrai pour des fonctionnelles quadratiques souvent appelé "théorème quadratique".

**Théorème 8.1** Soit  $Q$  une forme quadratique réelle homogène sur  $\mathbb{R}^p$  et positive suivant les directions de  $\Lambda$ , c'est-à-dire telle que:

$$Q(\lambda) \geq 0, \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

On suppose que:

$$U^{(\mathbb{n})} \rightharpoonup U^\infty \quad L_{loc}^2(\Omega; \mathbb{R}^p) \text{ faible}, \quad (8.4)$$

$$Q(U^{(\mathbb{n})}) \rightharpoonup \nu \quad \text{au sens des mesures}, \quad (8.5)$$

$$\sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^N A_{ijk} \frac{\partial U_j^{(\mathbb{n})}}{\partial x_k} \in \text{compact de } H_{loc}^{-1}(\Omega) \text{ fort}, \quad i = 1, \dots, q. \quad (8.6)$$

Alors  $\nu \geq Q(U^\infty)$  au sens des mesures.

**Preuve.** On réécrit les hypothèses sous la forme

$$U^{(\mathbb{n})} - U^\infty \rightharpoonup 0 \quad L_{loc}^2(\Omega; \mathbb{R}^p) \text{ faible}, \quad (8.7)$$

$$\sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^N A_{ijk} \frac{\partial (U_j^{(\mathbb{n})} - U_j^\infty)}{\partial x_k} \in \text{compact de } H_{loc}^{-1}(\Omega) \text{ fort}, \quad i = 1, \dots, q. \quad (8.8)$$

car

$$\sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^N A_{ijk} \frac{\partial (U_j^{(\mathbb{n})} - U_j^\infty)}{\partial x_k} \quad (8.9)$$

$$\in - \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^N A_{ijk} \frac{\partial U_j^\infty}{\partial x_k} + \text{compact de } H_{loc}^{-1}(\Omega) \text{ fort} \quad (8.10)$$

$$\in \text{compact de } H_{loc}^{-1}(\Omega) \text{ fort}, \quad i = 1, \dots, q. \quad (8.11)$$

En effet: l'image par une translation (qui est inversible, continue ainsi que son inverse) d'un compact est un compact. De plus,

$$Q(U^{(\mathbb{n})} - U^\infty) = Q(U^{(\mathbb{n})}) + Q(U^\infty) + \quad (8.12)$$

$$- B(U^{(\mathbb{n})}, U^\infty) - B(U^\infty, U^{(\mathbb{n})}) \quad (8.13)$$

où  $B(\cdot, \cdot)$  est la forme bilinéaire canoniquement associée à  $Q$ , telle que:

$$B(U^{(\mathbb{n})}, U^\infty) \rightarrow Q(U^\infty), \quad (8.14)$$

$$B(U^\infty, U^{(\mathbb{n})}) \rightarrow Q(U^\infty). \quad (8.15)$$

On en déduit que

$$Q(U^{(\mathbb{n})} - U^\infty) \rightharpoonup \nu + Q(U^\infty) - 2Q(U^\infty) = \quad (8.16)$$

$$= \nu - Q(U^\infty) \quad (8.17)$$

au sens des mesures. Ayant en vue d'appliquer la transformation de Fourier, on localise: soit  $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega)$  et soit  $V^{(\mathbb{n})} = \varphi(U^{(\mathbb{n})} - U^\infty)$  étendu par 0 hors de  $\Omega$ .

Alors

$$V^{(\mathbb{n})} \rightharpoonup 0 \quad L^2(\mathbb{R}^N) \text{ faible}, \quad (8.18)$$

$$\text{Supp}(V^{(\mathbb{n})}) \subset \text{compact fixe de } \mathbb{R}^N \quad (8.19)$$

$$\sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^N A_{ijk} \frac{\partial V_j^{(\mathbb{n})}}{\partial x_k} \rightarrow 0 \quad H^{-1}(\mathbb{R}^N) \text{ fort.} \quad (8.20)$$

On veut montrer que  $\nu - Q(U^\infty) \geq 0$ . Pour cela, il suffit de vérifier que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} Q(V^{(\mathbb{n})}) \geq 0.$$

En effet: on en déduira que  $\langle \nu - Q(U^\infty), \varphi^2 \rangle \geq 0$ ,  $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega)$  et, par densité de  $\mathcal{C}_c^1(\Omega)$  dans  $\mathcal{C}_c(\Omega)$ ,  $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ . Comme les fonctions  $\geq 0$  de  $\mathcal{C}_c(\Omega)$  s'écrivent comme le carré d'un élément de  $\mathcal{C}_c(\Omega)$ , on en déduit alors que  $\nu - Q(U^\infty) \geq 0$  au sens des mesures. Pour  $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ , on définit sa transformée de Fourier ainsi que sa transformée de Fourier inverse:

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-2i\pi(x \cdot \xi)} dx, \quad (8.21)$$

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}f(\xi) e^{2i\pi(x \cdot \xi)} d\xi. \quad (8.22)$$

La formule de Plancherel entraîne que  $\|\mathcal{F}f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$ . En particulier, en notant  $Q$  le prolongement à  $\mathbb{C}^p$  de  $Q$ , on se ramène par la formule de Plancherel à montrer que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} Q(\mathcal{F}V^{(\mathbb{n})}) \geq 0.$$

Comme  $V^{(\mathbb{n})} \rightharpoonup 0$  dans  $L^2(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^p)$ , et comme  $\text{Supp}(V^{(\mathbb{n})})$  reste dans un compact fixe de  $\mathbb{R}^N$ , on a:

$$\mathcal{F}V^{(\mathbb{n})} \rightarrow 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N, \quad (8.23)$$

$$|\mathcal{F}V^{(\mathbb{n})}| \leq C, \quad \text{dans } \mathbb{R}^N. \quad (8.24)$$

On en déduit, d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, que

$$\mathcal{F}V^{(\mathbb{n})} \Big|_B \rightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(B) \text{ fort}$$

pour toute boule  $B$  assez grande de  $\mathbb{R}^N$ . Il reste à étudier le comportement à l'infini de  $\mathcal{F}V^{(\mathbb{n})}$  pour conclure. L'information à l'infini est contenue dans les équations aux dérivées partielles que vérifie  $\mathcal{F}V^{(\mathbb{n})}$ , et en particulier:

$$\sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^N A_{ijk} \frac{\partial V_j^{(\mathbb{n})}}{\partial x_k} \rightarrow 0 \quad \text{dans } H^{-1}(\mathbb{R}^N), \quad i = 1, \dots, q$$

entraîne que

$$\sum_{i=1}^q \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(1+|\xi|^2)} \left| \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^N A_{ijk} \mathcal{F}V^{(\mathbb{n})}(\xi) \xi_k \right|^2 d\xi \rightarrow 0$$

ce qu'on peut interpréter en disant que  $\mathcal{F}V^{(\mathbb{n})}(\xi)$  est "presque dans  $\mathcal{V}$ " quand  $n \rightarrow \infty$  est assez grand ( puisque

$$\frac{\xi_k}{\sqrt{1+|\xi|^2}} \sim \frac{\xi_k}{|\xi|} \quad \text{quand } |\xi| \rightarrow +\infty.)$$

Or:

$$\int_{\mathbb{R}^N} Q(V^{(\mathbb{n})}) dx = \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^N} Q(\mathcal{F}V^{(\mathbb{n})}) d\xi \in \mathbb{R}$$

après extension de  $Q$  à  $\mathbb{C}^p$ . On est donc ramené à montrer que

$$\operatorname{Re} Q(\lambda) \geq 0, \quad \forall \lambda \in \Lambda + i\Lambda \subset \mathbb{C}^p$$

où  $\Lambda + i\Lambda$  désigne le complexifié de  $\Lambda$ . Pour terminer, on admet le lemme technique 8.2 ci-dessous (qui se vérifie par contradiction) dans lequel le choix  $\lambda = \mathcal{F}V^{(\mathbb{n})}$  conduit à

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{Re} Q(\mathcal{F}V^{(\mathbb{n})}) d\xi \geq -M\varepsilon$$

et le résultat annoncé s'en déduit quand  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . ■

**Lemme 8.2**  $\forall \varepsilon > 0, \exists C(\varepsilon) > 0$  telle que

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}^p, \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^N, \quad \eta \neq 0, \tag{8.25}$$

$$\operatorname{Re} Q(\lambda) \geq -\varepsilon |\lambda|^2 + \tag{8.26}$$

$$- C(\varepsilon) \sum_{i=1}^q \left| \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^N A_{ijk} \lambda_j \frac{\eta_k}{|\eta|} \right|^2. \tag{8.27}$$

## 9 BORNES SUR LES COEFFICIENTS EFFECTIFS

### 9.1 Position du problème

On considère la suite  $u^{(\mathbb{n})}$  des solutions de

$$-\operatorname{div}(A^{(\mathbb{n})} \operatorname{grad}(u^{(\mathbb{n})})) = f, \quad (9.1)$$

$$\operatorname{grad}(u^{(\mathbb{n})}) \rightharpoonup \operatorname{grad}(u^\infty), \quad (9.2)$$

$$A^{(\mathbb{n})} \operatorname{grad}(u^{(\mathbb{n})}) \rightharpoonup A^{eff} \operatorname{grad}(u^\infty) \quad (9.3)$$

On applique le théorème de compacité par compensation avec les quantités:

$$E^{(\mathbb{n})} = \operatorname{grad}(u^{(\mathbb{n})}), \quad D^{(\mathbb{n})} = A^{(\mathbb{n})} \operatorname{grad}(u^{(\mathbb{n})})$$

telles que

$$\operatorname{rot}(E^{(\mathbb{n})}) = 0, \quad \operatorname{div}(D^{(\mathbb{n})}) = -f.$$

Alors, le résultat principal est que

$$(E^{(\mathbb{n})} \cdot D^{(\mathbb{n})}) \rightharpoonup (E^\infty \cdot D^\infty) \quad \text{au sens des mesures vagues sur } \Omega.$$

### 9.2 Calcul de correcteurs

On suppose que  $A^{(\mathbb{n})} \in \mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega)$  et que  $A^{(\mathbb{n})} \xrightarrow{H} A^{eff}$ . Soit  $\Omega \subset\subset \Omega'$ . On prolonge  $A^{(\mathbb{n})}$  par  $\alpha I$  dans  $\Omega' \setminus \Omega$  et, quitte à extraire, on suppose que la suite  $A^{(\mathbb{n})}$  ainsi prolongée est H-convergente vers une H-limite encore noté  $A^{eff}$ . D'après la théorie générale  $A^{eff}$  ainsi définie est nécessairement un prolongement à  $\Omega'$  de la H-limite définie dans  $\Omega$ . Pour  $i = 1, \dots, N$ , on se donne  $\varphi_i \in H_0^1(\Omega')$  tel que  $\operatorname{grad}(\varphi_i) = e_i$  dans  $\Omega$ , où  $e_i$  désigne le  $i$ ème vecteur de la base caconique de  $\mathbb{R}^N$ .

Soit  $U^{(\mathbb{n})}$  solution de

$$-\operatorname{div}(A^{(\mathbb{n})} \operatorname{grad}(U^{(\mathbb{n})})) = -\operatorname{div}(A^{eff} \operatorname{grad}(\varphi_1)), \quad \Omega', \quad (9.4)$$

$$U^{(\mathbb{n})} \in H_0^1(\Omega'). \quad (9.5)$$

La théorie de la H-convergence dit que, par construction d'une suite H-convergente:

$$U^{(\mathbb{n})} \rightharpoonup U^\infty \quad H_0^1(\Omega') \quad \text{faible}; \quad (9.6)$$

$$\#^1 E^{(\mathbb{n})} := \operatorname{grad}(U^{(\mathbb{n})}) \rightharpoonup \operatorname{grad}(\varphi_1) =: \#^1 E^\infty, \quad L^2(\Omega') \quad \text{faible} \quad (9.7)$$

$$\#^1 D^{(\mathbb{n})} := A^{(\mathbb{n})} \operatorname{grad}(U^{(\mathbb{n})}) \rightharpoonup \#^1 D^\infty := A^{eff} \operatorname{grad}(\varphi_1) \quad L^2(\Omega') \quad \text{faible} \quad (9.8)$$

où  $U^\infty$  est solution de

$$-\operatorname{div}(A^{eff} \operatorname{grad}(U^\infty)) = -\operatorname{div}(A^{eff} \operatorname{grad}(\varphi_1)) \quad \text{dans } \Omega'.$$

c'est-à-dire  $U^\infty = \varphi_1$ . On en déduit que

$$\#^1 E^{\textcircled{n}} \Big|_\Omega \rightharpoonup \#^1 E^\infty \Big|_\Omega = e_1 \quad L^2(\Omega) \text{ faible}, \quad (9.9)$$

$$\#^1 D^{\textcircled{n}} \Big|_\Omega \rightharpoonup \#^1 D^\infty \Big|_\Omega = A^{eff} e_1 \quad L^2(\Omega) \text{ faible}. \quad (9.10)$$

On recommence pour  $e_1, \dots, e_N$  successivement avec  $\#^i E^\infty = e_i$ ,  $\#^i D^\infty = A^{eff} e_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , p.p. dans  $\Omega$ . On note  $\mathbb{P}_n$  la matrice dont la  $i$ ème colonne est  $\#^i E^{\textcircled{n}}$  :  $\mathbb{P}_n e_i = \#^i E^{\textcircled{n}}$ . D'après ce qui précède:

$$\mathbb{P}_n \rightharpoonup I \quad L^2(\Omega) \text{ faible}, \quad (9.11)$$

$$\mathbb{Q}_n := A^{\textcircled{n}} \mathbb{P}_n \rightharpoonup A^{eff} \quad L^2(\Omega) \text{ faible}. \quad (9.12)$$

De plus, si  $\lambda \in \mathbb{R}^N$  est arbitrairement fixé, on note  $\lambda = \sum_{i=1}^N \lambda_i e_i$  sa décomposition dans la base  $e_1, \dots, e_N$  de  $\mathbb{R}^N$ , de sorte que

$$\mathbb{P}_n \lambda = \sum_{i=1}^N \lambda_i \mathbb{P}_n e_i = \sum_{i=1}^N \lambda_i \#^i E^{\textcircled{n}}$$

ce qui entraîne que

$$\text{rot}(\mathbb{P}_n \lambda) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \text{rot}(\#^i E^{\textcircled{n}}) = 0, \quad (9.13)$$

$$\text{div}(\mathbb{P}_n \lambda) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \text{div}(\mathbb{P}_n e_i) \in \text{compact de } H^{-1}(\Omega) \text{ fort}. \quad (9.14)$$

En résumé:

$$\text{si } A^{\textcircled{n}} \in \mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega), \quad (9.15)$$

$$\text{et si } A^{\textcircled{n}} \underset{H}{\rightharpoonup} A^{eff} \quad (9.16)$$

alors il existe une suite extraite  $\textcircled{m}$  et une suite de correcteurs  $\mathbb{P}_m$  telles que

$$\mathbb{P}_m \rightharpoonup I \quad L^2(\Omega; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)) \text{ faible}, \quad (9.17)$$

$$\text{rot}(\mathbb{P}_m \lambda) \in \text{compact de } H^{-1}(\Omega; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)) \text{ fort}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^N. \quad (9.18)$$

Si de plus on définit  $\mathbb{Q}_m = A^{\textcircled{m}} \mathbb{P}_m$ , alors

$$\mathbb{Q}_m \rightharpoonup A^{eff} \quad L^2(\Omega; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)) \text{ faible}, \quad (9.19)$$

$$\text{div}(\mathbb{Q}_m \lambda) \in \text{compact de } H_{loc}^{-1}(\Omega) \text{ fort}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^N. \quad (9.20)$$

La construction montre que la  $i$ ème colonne de  $\mathbb{P}_m$  (resp. de  $\mathbb{Q}_m$ ) joue le rôle d'un correcteur  $\#^i E^{\textcircled{m}}$  (resp.  $\#^i D^{\textcircled{m}}$ ), de sorte que le Lemme Divergence-Rotationnel s'applique au couple  $(\#^i E^{\textcircled{m}}, \#^i D^{\textcircled{m}})$ , et établit ainsi que  $\mathbb{Q}_m^T \mathbb{P}_m \rightharpoonup (A^{eff})^T$  au sens des mesures vagues.

### 9.3 Formes quadratiques et correcteurs

La version quadratique du théorème de compacité par compensation *cfle Théorème 8.1* fournit une caractérisation analytique de toutes les formes quadratiques vérifiant: pour toute suite  $(\tilde{\mathbb{P}}_n, \tilde{\mathbb{Q}}_n)$  telle que

$$\tilde{\mathbb{P}}_n \rightharpoonup \tilde{\mathbb{P}}^\infty \quad L^2(\Omega; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)) \quad \text{faible}, \quad (9.21)$$

$$\tilde{\mathbb{Q}}_n \rightharpoonup \tilde{\mathbb{Q}}^\infty \quad L^2(\Omega; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)) \quad \text{faible}, \quad (9.22)$$

avec

$$\text{rot}(\tilde{\mathbb{P}}_n \lambda) \in \text{compact de } H^{-1}(\Omega; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)) \quad \text{fort}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^N, \quad (9.23)$$

$$\text{div}(\tilde{\mathbb{Q}}_n \lambda) \in \text{compact de } H^{-1}(\Omega; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)) \quad \text{fort}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^N, \quad (9.24)$$

on a

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} F(\tilde{\mathbb{P}}_n, \tilde{\mathbb{Q}}_n) \varphi \, dx \geq \int_{\Omega} F(\tilde{\mathbb{P}}^\infty, \tilde{\mathbb{Q}}^\infty) \varphi \, dx \quad (9.25)$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c(\Omega), \quad \varphi \geq 0. \quad (9.26)$$

Plus précisément, on va montrer que ceci est vrai si et seulement si  $F(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) \geq 0$  pour tout  $(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$  appartenant à un ensemble caractéristique à déterminer. Par analogie avec la théorie de la compacité par compensation, on cherche un ensemble  $\Lambda$  solution du problème: trouver  $\xi \in \mathbb{R}^N$ ,  $\xi \neq 0$ , tel que:  $\Lambda = \Lambda_\xi$  et

$$(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) \in \Lambda_\xi \iff \begin{array}{l} \text{les colonnes de } \mathbb{P} \text{ (resp. de } \mathbb{Q}) \text{ sont parallèles à } \xi \\ \text{(resp. perpendiculaires à } \xi) \end{array} \quad (9.27)$$

$$\iff \mathbb{P} = \xi \otimes a, \quad a \in \mathbb{R}^N \quad \text{et} \quad (\mathbb{Q} \lambda \cdot \xi) = 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^N. \quad (9.29)$$

$$\iff \mathbb{P} = \xi \otimes a, \quad a \in \mathbb{R}^N \quad \text{et} \quad \mathbb{Q}^T \xi = 0, \quad (9.30)$$

d'où l'on déduit la caractérisation: (9.21)-(9.26) est vrai si et seulement si

$$F(\xi \otimes a, \mathbb{Q}) \geq 0, \quad \forall a, \xi \in \mathbb{R}^N, \quad (9.31)$$

$$\forall \mathbb{Q} = \mathbb{Q}_\xi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \quad \text{telle que} \quad \mathbb{Q}_\xi^T \xi = 0. \quad (9.32)$$

### 9.4 Quelques exemples

(i) PREMIER EXEMPLE On commence par chercher  $F$  adaptée aux mélanges de matériaux isotropes et en particulier ceux dont le mélange homogénéisé est aussi isotrope, c'est-à-dire pour lesquels on a  $A^{eff} = a^{eff} I$ . Si on impose en outre que  $F$  soit invariante par changement de base orthonormée, le lemme divergence-rotationnel donne  $F$  de la forme

$$F_{ij}^\pm(P, Q) = \pm (Q P^T)_{ij} = \pm \sum_{k=1}^N Q_{ik} P_{jk}$$



et on voit alors immédiatement que

$$F^\pm(P, Q) = \pm \text{Trace}(Q P^T)$$

sont deux exemples de fonctions  $F$  vérifiant (9.31)-(9.32) invariantes par changement de base orthonormée. Comme  $\text{Trace}(P^T P)$ ,  $(\text{Trace}(P))^2$ ,  $\text{Trace}(Q^T Q)$ ,  $(\text{Trace}(Q))^2$  sont invariantes par changement de base orthonormée, on peut chercher celles de leurs combinaisons linéaires qui vérifient (9.31)-(9.32). On trouve immédiatement que

$$F_P(P, Q) = \text{Trace}(P^T P) - (\text{Trace}(P))^2 \quad (9.33)$$

convient car si  $P = \xi \otimes a$  pour un  $a \in \mathbb{R}^N$ , alors  $\text{Trace}(P^T P) = |\xi|^2 |a|^2$  et  $\text{Trace}(P) = (\xi \cdot a)$  de sorte que  $\text{Trace}(P^T P) \geq (\text{Trace}(P))^2$  par Cauchy-Schwarz. Ensuite, on trouve que

$$F_Q(P, Q) = (N - 1) \text{Trace}(Q^T Q) - (\text{Trace}(Q))^2 \quad (9.34)$$

satisfait également (9.31)-(9.32) comme conséquence du lemme suivant appliqué à  $Q_\xi$  dont le rang est  $\leq N - 1$ .

**Lemme 9.1** *Si  $M \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$  et si  $\text{rang}(M) \leq r$ , alors*

$$r \text{Trace}(M^T M) - (\text{Trace}(M))^2 \geq 0.$$

**Preuve.** Quitte à effectuer un changement de base orthonormée, on se ramène au cas où  $M$  est de la forme :  $M_{ij} = 0$ ,  $\forall i > r$ . Alors  $\text{Trace}(M) = \sum_{i=1}^r M_{ii}$  et

$$(\text{Trace}(M))^2 \leq \left( \sum_{i=1}^r M_{ii}^2 \right) \left( \sum_{i=1}^r 1 \right) = r \sum_{i=1}^r M_{ii}^2.$$

Mais

$$\text{Trace}(M^T M) = \sum_{i,j=1}^r M_{ij}^2 \geq \sum_{i=1}^r M_{ii}^2.$$

■

En faisant varier  $r = 1, \dots, N - 1$ , on obtient le résultat pour  $F(P, Q)$  avec  $\text{rang}(Q) \leq N - 1$  ( $\text{rang}(Q) = N$  si et seulement si  $Q$  est inversible et alors  $Q^T \xi \neq 0$ ,  $\forall \xi \neq 0$ ).

(ii) DEUXIÈME EXEMPLE Dans le cas général où  $A$  est symétrique, non nécessairement isotrope, on cherche  $F$  satisfaisant (9.31)-(9.32) sous la forme d'une combinaison linéaire :

$$F(P, Q) = \sum_{i,k=1}^N c_{ik} F_{ik}(P, Q) + \alpha F_P(P, Q) + \beta F_Q(P, Q) + \quad (9.35)$$

$$+ \text{ affine } (\text{Trace}(P), \text{Trace}(Q)), \quad \alpha, \beta \geq 0. \quad (9.36)$$

## 9.5 Le cas général

Le résultat de base est contenu dans le

**Théorème 9.2** *Soit  $F$  une fonction continue sur  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$  vérifiant: pour toute suite  $(\tilde{\mathbb{P}}_n, \tilde{\mathbb{Q}}_n)$  telle que*

$$\tilde{\mathbb{P}}_n \rightharpoonup \tilde{\mathbb{P}}^\infty \quad L^2(\Omega; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)) \text{ faible}, \quad (9.37)$$

$$\tilde{\mathbb{Q}}_n \rightharpoonup \tilde{\mathbb{Q}}^\infty \quad L^2(\Omega; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)) \text{ faible}, \quad (9.38)$$

$$\text{rot}(\tilde{\mathbb{P}}_n \lambda) \in \text{compact de } H_{loc}^{-1}(\Omega) \text{ fort}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^N, \quad (9.39)$$

$$\text{div}(\tilde{\mathbb{Q}}_n \lambda) \in \text{compact de } H_{loc}^{-1}(\Omega) \text{ fort}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^N, \quad (9.40)$$

on a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} F(\tilde{\mathbb{P}}_n, \tilde{\mathbb{Q}}_n) \varphi \, dx \geq \int_{\Omega} F(\tilde{\mathbb{P}}^\infty, \tilde{\mathbb{Q}}^\infty) \varphi \, dx, \quad (9.41)$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c(\Omega), \quad \varphi \geq 0. \quad (9.42)$$

On définit  $g$  sur  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$  en posant

$$g(A) = \sup_{P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)} F(P, AP) \leq \infty. \quad (9.43)$$

Alors, si  $A \stackrel{\textcircled{n}}{\in} \mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega)$  et si  $A \stackrel{\textcircled{n}}{\in} \underline{H} A^{eff}$ , on a:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g(A \stackrel{\textcircled{n}}{\in}) \varphi \, dx \geq \int_{\Omega} g(A^{eff}) \varphi \, dx, \quad (9.44)$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c(\Omega), \quad \varphi \geq 0. \quad (9.45)$$

**Preuve.** On suppose que  $g \neq \infty$  (sinon, c'est terminé.) Quitte à extraire, on peut supposer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} F(\mathbb{P}_n, \mathbb{Q}_n) \varphi \, dx = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} F(\mathbb{P}_n, \mathbb{Q}_n) \varphi \, dx \quad (9.46)$$

$$\geq \int_{\Omega} F(I, A^{eff}) \varphi \, dx \quad (9.47)$$

pour  $\varphi \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ ,  $\varphi \geq 0$  donnée. Soit  $X \in \mathcal{C}^1(\Omega; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N))$  et soit  $\tilde{\mathbb{P}}_n = \mathbb{P}_n X$ ,  $\tilde{\mathbb{Q}}_n = \mathbb{Q}_n X$ : cette suite satisfait les hypothèses de l'énoncé avec

$$\tilde{\mathbb{P}}^\infty = X, \quad \tilde{\mathbb{Q}}^\infty = A^{eff} X$$

et on en déduit que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} F(\mathbb{P}_n X, \mathbb{Q}_n X) \varphi \, dx = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} F(\mathbb{P}_n X, A \stackrel{\textcircled{n}}{\in} \mathbb{P}_n X) \varphi \, dx \quad (9.48)$$

$$\geq \int_{\Omega} F(X, A^{eff} X) \varphi \, dx \quad (9.49)$$

avec

$$F(\mathbb{P}_n X, A \stackrel{\textcircled{n}}{\in} \mathbb{P}_n X) \leq g(A \stackrel{\textcircled{n}}{\in}).$$

Il en résulte que:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g(A^{\textcircled{n}}) \varphi \, dx \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} F(\mathbb{P}_n X, A^{\textcircled{n}} \mathbb{P}_n X) \varphi \, dx \quad (9.50)$$

$$\geq \int_{\Omega} F(X, A^{eff} X) \varphi \, dx \quad (9.51)$$

$$\forall X \in \mathcal{C}^1(\Omega; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)) \quad , \quad (9.52)$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c(\Omega), \quad \varphi \geq 0. \quad (9.53)$$

Si  $X \in L^\infty(\Omega; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N))$ , on conclut par un argument de densité. Plus précisément, il existe une suite  $X_n \in \mathcal{C}^1(\Omega; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N))$  telle que  $X_n \rightarrow X$  p.p. dans  $\Omega$  et  $X_n$  reste uniformément bornée dans  $L^\infty(\Omega; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N))$ . Par le théorème de convergence dominée de Lebesgue:

$$F(X_n, A^{eff} X_n) \rightarrow F(X, A^{eff} X) \quad \text{dans } L^1(\Omega) \text{ fort.}$$

D'après la première étape:

$$\forall k \geq 1 : \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g(A^{\textcircled{n}}) \varphi \, dx \geq \int_{\Omega} F(X_k, A^{eff} X_k) \varphi \, dx \quad (9.54)$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c(\Omega), \quad \varphi \geq 0, \quad (9.55)$$

puis, quand  $k \rightarrow \infty$ :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g(A^{\textcircled{n}}) \varphi \, dx \geq \int_{\Omega} F(X, A^{eff} X) \varphi \, dx \quad (9.56)$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c(\Omega), \quad \varphi \geq 0, \quad (9.57)$$

On conclut par troncature: on montre le résultat annoncé pour  $g$  remplacée par

$$g_r = \sup_{\|P\| \leq r} F(P, A^{eff} P)$$

et on fait tendre  $r \rightarrow \infty$ . ■

On obtient alors une collection de résultats particuliers:

**Lemme 9.3** *Si*

$$F_P(P, Q) := \alpha (\text{Trace}(P^T P) - (\text{Trace}(P))^2) - \text{Trace}(Q^T P) + 2\text{Trace}(P)$$

*alors:  $\forall A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$  telle que  $A = A^T$  et  $A \geq \alpha I$  (au sens de la forme quadratique associée), on a*

$$g_P(A) = \frac{\tau}{(1 + \alpha \tau)} < +\infty \quad \text{avec} \quad \tau = \sum_{j=1}^N \frac{1}{\lambda_j(A) - \alpha} \quad (9.58)$$

où  $g$  est associée à la forme quadratique définie par  $A$  selon (9.43).

**Lemme 9.4** *Si*

$$F_Q(P, Q) := = \left( (N-1) \text{Trace}(Q^T Q) - (\text{Trace}(Q))^2 \right) + \quad (9.59)$$

$$- \beta (N-1) \text{Trace}(Q^T P) + 2\text{Trace}(Q), \quad (9.60)$$

alors:  $\forall A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$  telle que  $A = A^T$  et  $A \leq \beta I$  ( au sens de la forme quadratique associée), on a

$$g_Q(A) = \frac{\sigma}{(\sigma + N - 1)} < +\infty \quad \text{avec} \quad \sigma = \sum_{j=1}^N \frac{\lambda_j(A)}{\beta - \lambda_j(A)} \quad (9.61)$$

où  $g$  est associée à la forme quadratique définie par  $A$  selon (9.43).

Les lemmes 9.3 et 9.4 permettent de retrouver les bornes de Hashin-Shtrikman [14, 16] dans le cas de matériaux en tranches. En effet, pour

$$A \stackrel{\textcircled{n}}{\underset{H}{\sim}} A^{eff}, \quad A \stackrel{\textcircled{n}}{\in} \mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega),$$

l'inégalité (9.44) entraîne que

$$g(A^{eff}) \leq \theta g(\alpha I) + (1 - \theta) g(\beta I), \quad \text{p.p. dans } \Omega. \quad (9.62)$$

Dans le cas particulier où  $F(P, Q) = F_P(P, Q)$  est définie par (9.33), le Lemme 9.3 montre que  $g = g_P$  est donnée par (9.58) et on en déduit que

$$g_P(\alpha I) = \frac{1}{\alpha}, \quad g_P(\beta I) = \frac{N}{(N - 1)\alpha + \beta}$$

et (9.62) signifie que

$$\frac{\tau_{eff}}{1 + \alpha \tau_{eff}} \leq \frac{\theta}{\alpha} + \frac{(1 - \theta)N}{(N - 1)\alpha + \beta} = \frac{1}{\lambda_-(\theta) - \alpha} + \frac{N - 1}{\lambda_+(\theta) - \alpha}.$$

L'égalité a lieu dans le cas de matériaux en tranches pour lesquels on dispose des formules donnant l'expression de  $A^{eff}$ . En particulier, on vérifie que la borne supérieure est atteinte lorsque  $A^{eff}$  a une valeur propre égale à  $\lambda_-(\theta)$  et  $N - 1$  valeurs propres égales à  $\lambda_+(\theta)$ .

Dans le cas particulier où  $F(P, Q) = F_Q(P, Q)$  est donnée par (9.34), le Lemme 9.4 montre que  $g$  a pour expression (9.61). Par le calcul, on obtient alors:

$$g_Q(\alpha I) = \frac{N\alpha}{\alpha + (N - 1)\beta}, \quad g_Q(\beta I) = 1$$

et (9.62) signifie que

$$\frac{\sigma_{eff}}{\sigma_{eff} + N - 1} \leq \frac{(\theta N + (1 - \theta))\alpha + (1 - \theta)(N - 1)\beta}{\alpha + (N - 1)\beta} = \quad (9.63)$$

$$= \frac{1}{\beta - \lambda_-(\theta)} + \frac{N - 1}{\beta - \lambda_+(\theta)} \quad (9.64)$$

la borne supérieure étant atteinte pour la même matrice  $A^{eff}$  que pour  $g_P$ .

## 10 LES H-MESURES

### 10.1 Première idée

Revenant au problème de la diffusion paramétré par  $\mathbb{N}$ , on pose  $E^{\mathbb{N}} = \text{grad}(u^{\mathbb{N}})$  et  $D^{\mathbb{N}} = A^{\mathbb{N}} E^{\mathbb{N}}$  avec

$$E^{\mathbb{N}} \rightharpoonup E^\infty \quad L^2_{loc}(\Omega; \mathbb{R}^N) \text{ faible}, \quad (10.1)$$

$$D^{\mathbb{N}} \rightharpoonup D^\infty \quad L^2_{loc}(\Omega; \mathbb{R}^N) \text{ faible}, \quad (10.2)$$

$$E^{\mathbb{N}} \in \text{compact de } H^{-1}_{loc}(\Omega) \text{ fort}, \quad (10.3)$$

$$D^{\mathbb{N}} \in \text{compact de } H^{-1}_{loc}(\Omega) \text{ fort}. \quad (10.4)$$

On voit que la matrice  $A^{eff}$  telle que  $D^\infty = A^{eff} E^\infty$  donnée par la théorie de la compacité par compensation ne peut pas se calculer au moyen des mesures de Young associées à la suite  $A^{\mathbb{N}}$  en dimension  $N \geq 2$ . Les mesures de Young sont un outil mathématique pour traiter de la statistique à un point et elles sont bien adaptées à des problèmes à une dimension d'espace. Elles ont été introduites en 1930 par L. C. Young et ont été utilisées sous le nom de mesures paramétrées— sans référence à L. C. Young— en théorie du contrôle vers 1968-1970. On en rappelle le principe de base dans la

**Proposition 10.1** *Etant donnée une suite  $U^{\mathbb{N}}$  de fonctions mesurables sur  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ , à valeurs dans un ensemble borné  $K \subset \mathbb{R}^p$ , il existe une sous-suite extraite, encore notée  $\mathbb{N}$ , et une famille (faiblement) mesurable  $x \in \Omega \mapsto \nu_x$  de mesures de probabilité sur  $\mathbb{R}^p$ , à support  $\subset \bar{K}$ , telles que pour toute fonction  $F$  continue  $\bar{K} \rightarrow \mathbb{R}$ , on ait  $F(U^{\mathbb{N}}) \rightharpoonup \ell_F$  dans  $L^\infty(\Omega)$  faible \* où  $\ell_F(x) = \langle \nu_x, F \rangle$  p.p. en  $x \in \Omega$ .*

**Définition 10.2** *Avec les notations de la Proposition 10.1, la famille de mesures paramétrées  $\nu_x$ ,  $x \in \Omega$  est appelée famille de mesures de Young associées à la suite extraite  $U^{\mathbb{N}}$ .*

**Remarque 10.3** *Si  $K$  n'est pas borné, on se ramène au cadre théorique par une compactification de  $K$ , mais le procédé fait perdre de l'information à l'infini à cause d'effets de concentration. Or, le théorème quadratique de compacité par compensation permet à la fois de contrôler les oscillations et les effets de concentration. La théorie des H-mesures généralise ce théorème.*

### 10.2 Deuxième idée: équations aux dérivées partielles non linéaires

La méthode de compacité et la méthode de monotonie cf[19] sont deux techniques très utiles lorsqu'on veut passer de la dimension finie à la dimension infinie dans des problèmes d'approximation de problèmes non linéaires (en particulier pour les méthodes numériques). Dans le cas des équations aux dérivées partielles, une autre

variante de la méthode de monotonie, à côté de la méthode de compacité, est la méthode de convexité: c'est un outil essentiel de la méthode de minimisation et elle est à la base des méthodes de relaxation en contrôle optimal.

La théorie des H-mesures s'applique à toute suite  $(U^{(n)})$  définie sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^N$  qui converge vers 0 dans  $L^2(\Omega)^p$  faible. Après extraction d'une sous-suite, encore notée  $(U^{(n)})$ , on définit pour toute paire d'indices  $(i, j)$ , une mesure de Radon complexe  $\mu^{ij}$  sur  $\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}$  par la formule

$$\langle \mu^{ij}, \phi_1 \bar{\phi}_2 \otimes \psi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}(\phi_1 U_i^{(n)}) \overline{\mathcal{F}(\phi_2 U_j^{(n)})} \psi \left( \frac{\xi}{|\xi|} \right) d\xi$$

où  $\mathcal{F}$  est la transformée de Fourier complexe définie par

$$\mathcal{F}U(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} U(x) e^{-2i\pi x \cdot \xi} dx.$$

La fonction test  $\psi$  sert à localiser dans la direction de la variable duale  $\xi$  et est prise dans  $\mathcal{C}(\mathbb{S}^{N-1})$ . Les deux fonctions tests  $\phi_1, \phi_2$  servent à localiser en la variable d'espace  $x$  et peuvent appartenir à  $\mathcal{C}_c(\Omega)$ , l'espace des fonctions continues à support compact dans  $\Omega$  si on s'autorise à ne pas voir des effets de concentration éventuels sur la frontière  $\partial\Omega$ . Le problème est en partie résolu si, après prolongement de  $U^{(n)}$  par 0 hors de  $\Omega$ , on remplace  $\Omega$  par  $\mathbb{R}^N$  et si on choisit  $\phi_1, \phi_2$  dans  $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N)$ , l'espace des fonctions continues sur  $\mathbb{R}^N$  qui tendent vers 0 à l'infini. Le théorème de base [31] s'énonce:

**Théorème 10.4** *Soit  $(U^{(n)})$  une suite convergeant vers 0 dans  $L^2(\mathbb{R}^N)^p$  faible. Alors, après extraction d'une sous-suite (encore notée  $(U^{(n)})$ ), il existe une famille de mesures de Radon complexes sur  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^{N-1}$  telle que:  $\forall (\phi_1, \phi_2) \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N)^2$ ,  $\forall \psi \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^{N-1})$ ,*

$$\langle \mu^{ij}, \phi_1 \bar{\phi}_2 \otimes \psi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}(\phi_1 U_i^{(n)}) \overline{\mathcal{F}(\phi_2 U_j^{(n)})} \psi \left( \frac{\xi}{|\xi|} \right) d\xi.$$

### 10.3 Application à la mécanique des milieux continus

La mécanique des milieux continus distingue:

(i) LES RELATIONS DE CONSTITUTION éventuellement sous la forme de contraintes non linéaires ponctuelles telles que:  $U(x) \in K$  p.p. en  $x \in \Omega$  où  $K$  peut dépendre de  $x$ , voire osciller, ce qui nécessite des techniques d'homogénéisation;

(ii) LES ÉQUATIONS DE CONSERVATION (BALANCE) sous la forme de contraintes linéaires différentielles telles que

$$\sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^N A_{ijk} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} = f_i, \quad i = 1, \dots, q, \quad \Omega.$$

Un exemple classique est celui de l'élasticité où l'on doit résoudre:

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^N \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = f_i, \quad \Omega.$$

Dans ce cas,  $U$  contient les composantes du moment  $\rho \frac{\partial u}{\partial t}$ , le tenseur des déformations  $\nabla u$ , celui des contraintes  $\sigma$ , ainsi que les relations de constitution entre  $\sigma$  et  $\nabla u$  sous la forme  $\sigma = F(\nabla u)$ ; tandis que les équations de balance comprennent l'équation d'équilibre ci-dessus et les relations de compatibilité si on utilise des gradients.

#### 10.4 Lien avec la compacité par compensation

Le fait que le théorème de compacité par compensation ne s'applique pas au cas de coefficients variables est bien sûr un handicap. Néanmoins, la conclusion du théorème quadratique cf le *Théorème 8.1* peut s'exprimer en termes des mesures de Young. En effet: si  $Q$  est une forme quadratique vérifiant  $Q(\lambda) \geq 0, \forall \lambda \in \Lambda$ , et si  $\nu_x$  est la mesure de Young associée à la suite  $U^{\textcircled{n}}$ , après extraction éventuellement, alors

$$Q(U^{\textcircled{n}}) \rightharpoonup \langle \nu_x, Q \rangle, \quad (10.5)$$

$$U^{\textcircled{n}} \rightharpoonup \langle \nu_x, id \rangle \quad (10.6)$$

et on a

$$\langle \nu_x, Q \rangle \geq Q(\langle \nu_x, id \rangle), \quad \text{p.p. en } x \in \Omega.$$

Cette dernière condition peut être vue comme une entropie au sens de Lax (c'est-à-dire une condition supplémentaire découlant de celles qui existent déjà pour des solutions régulières.) On décrit ainsi pratiquement l'idée de base dans l'élaboration de la théorie de la compacité par compensation, à savoir: on cherche des "entropies" que l'on déduit des équations différentielles et éventuellement des relations de constitution non linéaires, et on applique le théorème quadratique de compacité par compensation au système ainsi étendu. Une difficulté de taille surgit si le système obtenu est très grand, et on doit alors choisir parmi les "entropies" admissibles celles que l'on doit retenir.

**Remarque 10.5** *On cherche dès lors à améliorer les mesures de Young en ajoutant une autre variable de direction  $\xi$  dans le but d'établir des résultats de propagation des défauts de compacité — de même que Lars Hörmander avait établi des résultats de "propagation des singularités" — faisant intervenir des rayons bicaractéristiques.*

Le principal inconvénient des mesures de Young réside en ce qu'elles ne peuvent pas utiliser la structure différentielle de  $\Omega$  et leur cadre naturel n'est pas celui des variétés différentiables, mais plutôt celui des espaces localement compacts munis d'une mesure positive sans atomes. Toutefois, bien que les mesures de Young ne puissent pas directement exploiter les équations aux dérivées partielles issues des équations de balance de la mécanique des milieux continus, elles sont utiles pour donner une description mathématique de ce qui est habituellement appelé statistique à un point.

## 10.5 Lien avec l'optique géométrique non linéaire

Les H-mesures utilisent une variable duale  $\xi$  jouant le rôle de direction de propagation des quantités intéressantes: alors que la théorie de L. Hörmander concerne la propagation des singularités, les H-mesures étudient la propagation des oscillations plus aptes à décrire les phénomènes physiques. Pour rendre compte de la régularité micro-locale, L. Hörmander a introduit la notion de front d'onde. Plus précisément: si  $T$  est une distribution sur un espace  $X$ , régulière au voisinage d'un point  $x_0 \in X$ , si  $\varphi$  est une fonction telle que  $\varphi(x_0) = 1$ , alors  $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \mathcal{F}(\varphi T) = 0$ . Soit  $\xi_0$  une

“bonne direction” au sens de L. Hörmander,  $\psi$  une fonction telle que  $\psi(\frac{\xi_0}{|\xi_0|}) = 1$ . Alors:  $\psi \mathcal{F}(\varphi T) \rightarrow 0$  rapidement à l'infini: on dit que  $T$  est régulière au sens de la régularité micro-locale en  $(x_0, \xi_0)$ .

Soit  $T$  une distribution solution de

$$\sum_j a_{ij}(x) \frac{\partial T}{\partial x_j} = 0.$$

Si  $(x_0, \xi_0)$  est un point régulier au sens précédent, alors la régularité se propage le long des bicaractéristiques associées à l'équation qui sont aussi les courbes intégrales du système

$$\frac{dx_j}{dt} (= a_{ij}(x)) = \frac{\partial P}{\partial \xi_j}(x, \xi), \quad (10.7)$$

$$\frac{d\xi_j}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_j}(x, \xi), \quad (10.8)$$

où  $P(x, \xi) = \sum_j a_{ij}(x) \xi_j$ . Le support singulier est  $\subset \{ (x, \xi); P(x, \xi) = 0 \}$ .

Les singularités micro-locales se propagent le long des bicaractéristiques et le support singulier ne voit pas le front d'onde.

Soit  $u = u(x, t)$  solution de l'équation des ondes:

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

dans laquelle on fait la convention:  $t = x_0$ . Les bicaractéristiques sont les droites  $\xi = Cste$ . Avec la convention précédente, la variable duale est notée  $\xi = (\xi_0, \xi')$ . Ici:  $P(x, \xi) = |\xi_0|^2 - |\xi'|^2$ , donc  $P(x, \xi) = 0 \iff |\xi_0| = |\xi'|$ . Les bicaractéristiques sont les “rayons lumineux”:

$$\frac{dx_0}{dt} = 2\xi_0; \quad (10.9)$$

$$\frac{dx_j}{dt} = -2\xi_j, \quad j = 1 \dots, N. \quad (10.10)$$

On ne peut pas faire de physique sur l'équation des ondes.



Les H-mesures sont un outil adapté à la propagation des oscillations que ne voient pas les mesures de Young, et ces dernières sont les seules opérantes en non linéaire.

La théorie générale des H-mesures permet de retrouver l'optique non linéaire sous sa forme géométrique. On rappelle que l'optique géométrique étudie des suites solutions de l'équation des ondes pour des fréquences très grandes, soit  $A_\varepsilon(x, t) e^{i\varphi_\varepsilon(x, t)}$  où  $A_\varepsilon(x, t)$  est l'amplitude,  $\varphi_\varepsilon(x, t)$  est la phase,  $\frac{1}{\varepsilon}$  est la fréquence et le paramètre  $\varepsilon > 0$  est destiné à tendre vers 0. A la limite ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ), la théorie asymptotique formelle donne une solution  $A(x, t) e^{i\varphi(x, t)}$  où la phase  $\varphi(x, t)$  est solution d'une équation eikonale:

$$|\varphi_t| = |\text{grad}_x(\varphi)|$$

de type Hamilton-jacobi avec des problèmes sur les caustiques. L'amplitude  $A$  vérifie une équation de transport où le gradient de la phase intervient sous la forme  $\frac{\text{grad}(\varphi)}{|\text{grad}(\varphi)|}$ . Dans la théorie classique de l'optique géométrique, on montre qu'il existe des suites de solutions de l'équation des ondes pour lesquelles l'énergie se propage le long des caractéristiques. A la limite des fréquences infinies, la théorie des H-mesures retrouve ces résultats sous une forme différente: il n'y a pas de phase en général, car il n'y a pas de longueur caractéristique. Toutes les solutions oscillantes de l'équation des ondes propagent leur énergie le long des bicaractéristiques. Autrement dit, pour toute suite de solutions de l'équation des ondes, l'énergie est bornée au sens de la théorie  $L^2$  associé à la H-mesure  $\mu$ . Comme  $\mu = \mu((x, t), (\xi, \tau))$  fait intervenir la variable  $\xi$  au lieu de  $\frac{\text{grad}(\varphi)}{|\text{grad}(\varphi)|}$ , il n'y a pas de problèmes liés aux caustiques. Dès lors, on se ramène à comprendre ce que doit être une topologie adaptée à la description de l'énergie aux très hautes fréquences. Les oscillations se manifestent par la propriété que:  $u_n \rightharpoonup u_0$  et  $u_n$  ne converge pas fortement vers  $u_0$ .

## 10.6 Le modèle de la turbulence

On peut espérer modéliser la turbulence à partir de l'équation de Navier-Stokes non linéaire

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{rot}(u) \times u - \nu \Delta u + \nabla(p + \frac{|u|^2}{2}) = f; \quad (10.11)$$

$$\text{div}(u) = 0, \quad \Omega; \quad (10.12)$$

pour des petites valeurs de la viscosité  $\nu > 0$ , c'est-à-dire quand  $\nu \rightarrow 0^+$ .

Par analogie avec les équations de l'électromagnétisme où le terme de force  $u \times b$  induit une rotation des particules, et compte tenu de ce que la turbulence est classiquement associée aux rotations, L. Tartar et M. Fortin ont considéré un modèle simplifié stationnaire dans lequel le terme  $\text{rot}(u)$  était remplacé par une force oscillante, soit:

$$-\nu \Delta u^\varepsilon + u^\varepsilon \times \frac{1}{\varepsilon} b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \nabla p^\varepsilon = f, \quad (10.13)$$

$$\operatorname{div}(u^\varepsilon) = 0, \quad \Omega; \quad (10.14)$$

$$u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^3) \quad (10.15)$$

où  $b$  est un champ de vecteurs périodique. La première remarque concerne l'alternative: soit  $b$  est de moyenne nulle, soit  $b$  est de moyenne non nulle et alors on est ramené à un problème différent. Dans ce dernier cas, on peut écrire l'équation satisfaite par le premier terme d'un développement asymptotique formel de la solution  $u^\varepsilon$ , justifiée ensuite par la méthode des fonctions tests oscillantes de L. Tartar en homogénéisation. On obtient ainsi le résultat remarquable: que le terme de force perpendiculaire à la vitesse  $u^\varepsilon$ , donc de travail nul, induit néanmoins des oscillations dans  $\operatorname{grad}(u^\varepsilon)$  de sorte qu'un supplément d'énergie est ainsi dissipé par viscosité (dans l'unité de temps, puisque le problème considéré est stationnaire.) De plus, le terme de dissipation supplémentaire n'est pas quadratique en  $\operatorname{grad}(u)$ , mais quadratique en  $u$ , ce qui est inattendu en présence de viscosité turbulente. Le fait de s'affranchir de la périodicité et de considérer des termes de la forme  $u^\varepsilon \times \operatorname{rot}(v^\varepsilon)$  avec  $v^\varepsilon$  convergeant faiblement modifie très peu le résultat. Le résultat change si on part du problème

$$-\nu \Delta u^{(\mathbf{n})} + u^{(\mathbf{n})} \times \operatorname{rot}(v^\infty + \gamma w^{(\mathbf{n})}) + \nabla p^{(\mathbf{n})} = f, \quad (10.16)$$

$$\operatorname{div}(u^{(\mathbf{n})}) = 0, \quad \Omega \quad (10.17)$$

avec  $v^\infty \in L^3(\Omega; \mathbb{R}^3)$  et  $w^{(\mathbf{n})} \rightharpoonup 0$  dans  $L^3(\Omega; \mathbb{R}^3)$  faible. On n'impose pas de condition aux limites mais on suppose que:  $u^{(\mathbf{n})} \rightharpoonup u^\infty$  dans  $H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$  faible. Alors, L. Tartar[29] a montré par la méthode des fonctions tests oscillantes qu'il existe une matrice  $M$  symétrique  $\geq 0$ , dépendant uniquement de la suite extraite de  $v^{(\mathbf{n})}$ , encore notée  $(\mathbf{n})$ , qui converge, telle que  $u^\infty$  soit solution de

$$-\nu \Delta u^\infty + u^\infty \times \operatorname{rot}(v^\infty) + \gamma^2 M u^\infty + \nabla p^\infty = f, \quad (10.18)$$

$$\operatorname{div}(u^\infty) = 0, \quad \Omega, \quad (10.19)$$

et on a le résultat de convergence:

$$u^{(\mathbf{n})} \times \operatorname{rot}(v^{(\mathbf{n})}) \rightharpoonup \gamma M u^\infty, \quad H_{loc}^{-1}(\Omega; \mathbb{R}^3) \text{ faible}, \quad (10.20)$$

$$\nu |\operatorname{grad}(u^{(\mathbf{n})})|^2 \rightharpoonup \nu |\operatorname{grad}(u^\infty)|^2 + \gamma^2 (M u^\infty \cdot u^\infty) \quad (10.21)$$

$$\text{au sens des mesures.} \quad (10.22)$$

La matrice  $M$  est définie par le procédé usuel d'homogénéisation (au sens de L. Tartar.) Par contre, la dépendance en  $\gamma^2$  ainsi que la formule particulière obtenue quand  $\operatorname{div}(w^{(\mathbf{n})}) = 0$  sont liées à la possibilité de définir des H-mesures. Tartar[31] vérifie que  $M$  peut s'expliciter au moyen des H-mesures associées à la suite  $v^{(\mathbf{n})}$  sous la forme:

$$\int_{\mathbb{R}^3} M_{ij}(x) \phi(x) dx = \quad (10.23)$$

$$= \frac{1}{\nu} \left( \sum_{k=1}^3 \langle \mu^{kk}, \phi \otimes \xi_i \xi_j \rangle - \sum_{\ell, m=1}^3 \langle \mu^{\ell m}, \phi \otimes \xi_\ell \xi_m \xi_i \xi_j \rangle \right), \quad (10.24)$$

$$\forall (i, j), \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3) \quad (10.25)$$

où  $\mu$  est la H-mesure associée à une sous-suite de  $v^{(\mathbb{n})} - v^\infty$ .

Finalement, le résultat s'énonce ainsi:

**Théorème 10.6** *Soit le problème (10.16)-(10.17). On suppose que (pour  $T < +\infty$ ):*

$$u^{(\mathbb{n})} \rightharpoonup u^\infty, \quad L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}^3)^3) \text{ faible et } L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^3)^3) \text{ faible} \quad (10.2)$$

$$f = f^{(\mathbb{n})} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial g_j^{(\mathbb{n})}}{\partial x_j}, \quad g_j^{(\mathbb{n})} \rightarrow g_j, \quad L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^3)) \text{ fort}, \quad (10.2)$$

$$v^\infty \in L^2(0, T; L^\infty(\mathbb{R}^3)^3) + L^\infty(0, T; L^3(\mathbb{R}^3)^3), \quad (10.2)$$

$$w^{(\mathbb{n})} = w_1^{(\mathbb{n})} + w_2^{(\mathbb{n})}, \quad (10.2)$$

$$w_1^{(\mathbb{n})} \rightharpoonup 0, \quad L^q(0, T; L^\infty(\mathbb{R}^3)^3) \text{ faible } *, \quad q > 2, \quad (10.3)$$

$$w_2^{(\mathbb{n})} \rightharpoonup 0, \quad L^\infty(0, T; L^r(\mathbb{R}^3)^3) \text{ faible } *, \quad r > 3, \quad (10.3)$$

$$w^{(\mathbb{n})} \in \text{borné de } L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^3)^3). \quad (10.3)$$

Alors, il existe une sous-suite extraite encore notée  $(\mathbb{n})$  et une matrice  $M$  (dépendant uniquement de la suite extraite) telles que

$$M \in L^2(0, T; H^{-1}(\mathbb{R}^3)^9), \quad (10.33)$$

$$(M k \cdot k) \geq 0, \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \times (0, T)), \quad \forall k \in \mathbb{R}^3, \quad (10.34)$$

avec en outre: si  $p^{(\mathbb{n})}$  est borné dans  $L^2(0, T; L^p(\mathbb{R}^3))$ , la limite de  $u^{(\mathbb{n})}$ , soit  $u^\infty$ , est solution de

$$\frac{\partial u^\infty}{\partial t} - \nu \Delta u^\infty + u^\infty \wedge \text{rot}(u^\infty) + \gamma^2 M u^\infty + \text{grad}(p^\infty) = f, \quad (10.35)$$

$$\text{div}(u^\infty) = 0, \quad (10.36)$$

$$\nu |\text{grad}(u^{(\mathbb{n})})|^2 \rightharpoonup \nu |\text{grad}(u^\infty)|^2 + \gamma^2 (M u^\infty \cdot u^\infty), \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \times (0, T)) \quad (10.37)$$

L'utilisation du paramètre  $\gamma$  est caractéristique de l'homogénéisation des petites amplitudes dont on rappelle le principe pour un cas modèle dans le paragraphe suivant.

## 10.7 Homogénéisation et faibles amplitudes

Le problème de l'homogénéisation des petites amplitudes consiste à étudier des problèmes de la forme:

$$-\text{div}(A^{(\mathbb{n})} \text{grad}(u^{(\mathbb{n})})) = f, \quad (10.38)$$

$$A^{(\mathbb{n})} = A^\infty + \gamma B^{(\mathbb{n})}, \quad B^{(\mathbb{n})} \rightharpoonup 0, \quad L^\infty(\Omega) \text{ faible } *. \quad (10.39)$$

On vérifie alors que la matrice effective est analytique en  $\gamma$  (comme noté pour la première fois par S. Spagnolo dans le cas de matrices  $A^{(\mathbb{N})}$  symétriques), de la forme  $A^{eff} = A^\infty + \gamma^2 C + \mathcal{O}(\gamma^3)$  où le coefficient  $C$  est calculé dans [31] au moyen de la H-mesure  $\mu = (\mu^{ik,lj})$  associée à une sous-suite de  $B^{(\mathbb{N})}$  :

$$\int_{\Omega} C_{ij} \phi \, dx = - \sum_{k,l=1}^N \langle \mu^{ik,lj}, \phi(x) \frac{\xi_k \xi_l}{(A_\infty(x) \xi \cdot \xi)} \rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega).$$

## 10.8 Le cas scalaire

Dans le cas scalaire, soit  $u^{(\mathbb{N})} \rightharpoonup 0$ , dans  $L_{loc}^2(\Omega)$  faible et soit  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ . Alors  $\mathcal{F}(\varphi u^{(\mathbb{N})}) \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N)$  car:  $Supp(\varphi u^{(\mathbb{N})}) \subset Supp(\varphi) =: K$ . De plus:  $|\mathcal{F}(\varphi u^{(\mathbb{N})})| \leq M$  dans  $\mathbb{R}^N$  et  $\mathcal{F}(\varphi u^{(\mathbb{N})}) \rightarrow 0$  dans  $\mathbb{R}^N$ , donc

$$\mathcal{F}(\varphi u^{(\mathbb{N})})(\xi) := \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) u^{(\mathbb{N})}(x) e^{-2i\pi(x \cdot \xi)} \, dx \rightarrow 0$$

dans  $L_{loc}^2(\mathbb{R}^N)$  par le théorème de convergence dominée de Lebesgue et on a

$$\|\mathcal{F}(\varphi u^{(\mathbb{N})})\|_{L^2} = \|\varphi u^{(\mathbb{N})}\|_{L^2}$$

par la formule de Plancherel. On a besoin d'étudier comment l'information contenue dans  $|\mathcal{F}(\varphi u^{(\mathbb{N})})|^2$  se comporte quand  $n \rightarrow \infty$ . Pour cela,  $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^{N-1})$  étant donnée, on regarde la limite

$$L(\varphi, \psi) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) |\mathcal{F}(\varphi u^{(\mathbb{N})})|^2(\xi) \, d\xi. \quad (10.40)$$

Par un argument "à la Kato" utilisant la séparabilité de l'espace des fonctions continues, on peut extraire une suite diagonale, encore notée  $(\mathbb{N})$ , telle que: la limite (10.40) existe  $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ ,  $\forall \psi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{S}^{N-1})$ . Alors, pour  $\varphi \in \mathcal{C}_c(\Omega)$  fixée, il existe une mesure de Radon  $\geq 0$ , soit  $\mu_\varphi$ , telle que:

$$\langle \mu_\varphi, \psi \rangle = L(\varphi, \psi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c(\Omega), \quad \forall \psi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{S}^{N-1}).$$

On se propose d'améliorer le résultat et de montrer que la limite (10.40) est en fait donnée par une mesure de Radon  $\geq 0$  sur  $\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}$  telle que

$$L(\varphi, \psi) = \langle \mu, |\varphi|^2 \otimes \psi \rangle \quad (10.41)$$

$$\simeq \int_{\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}} |\varphi|^2(x) \psi(\xi) \, d\mu(x, \xi) \quad (10.42)$$

le signe  $\simeq$  signifiant que l'égalité (10.41)-(10.42) est formelle.

**Théorème 10.7** Soit  $u_n \rightharpoonup 0$  dans  $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ . Il existe une sous-suite encore notée  $u_n$  et une mesure  $\mu \geq 0$  de Radon sur  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^{N-1}$  telles que:

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N), \quad \forall \psi \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^{N-1}), \quad (10.43)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) |\mathcal{F}(\varphi u_n)|^2 d\xi = \langle \mu, |\varphi|^2 \otimes \psi \rangle. \quad (10.44)$$

Si en outre:  $u_n \rightharpoonup 0$  dans  $L^2(\mathbb{R}^N)$  faible, alors

$$\langle \mu \varphi, \cdot \rangle = \langle \mu, |\varphi|^2 \otimes \cdot \rangle$$

est une mesure de probabilité,  $\forall \varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N)$ .

**Remarque 10.8** On peut étendre le résultat à la classe de fonctions

$$\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap VMO.$$

**Preuve.** Soit  $U \stackrel{\text{①}}{\rightharpoonup} 0$  dans  $L^2(\mathbb{R}^N)$  faible. Pour deux indices  $j, k$  fixés, on se donne deux fonctions-tests  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$  et on considère la limite

$$L_{jk}(\varphi_1 \varphi_2, \psi) := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}(\varphi_1 U_j \stackrel{\text{①}}{U})(\xi) \overline{\mathcal{F}(\varphi_2 U_k \stackrel{\text{①}}{U})(\xi)} \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi. \quad (10.45)$$

On veut montrer qu'il existe une mesure de Radon  $\mu_{jk}$  sur  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^{N-1}$  telle que

$$L_{jk}(\varphi_1 \varphi_2, \psi) = \langle \mu_{jk}, \varphi_1 \bar{\varphi}_2 \otimes \psi \rangle, \quad (10.46)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^{N-1}} \varphi_1(x) \bar{\varphi}_2(x) \psi(\xi) d\mu_{jk}(x, \xi) \quad (10.47)$$

$$\forall \psi \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^{N-1}). \quad (10.48)$$

On remarque que  $L_{jk}$  définie par (10.45) est linéaire en  $\varphi_1$ , antilinéaire en  $\varphi_2$ , et linéaire en  $\psi$ . De plus, on a l'estimation:

$$|L_{jk}(\varphi_1, \varphi_2, \psi)| \leq C \|\varphi_1\|_\infty \|\varphi_2\|_\infty \|\psi\|_\infty.$$

On en déduit qu'il existe une mesure de Radon  $\mu_{jk}$  sur  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^{N-1}$  telle que

$$\langle \mu_{jk}, \varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes \psi \rangle = L_{jk}(\varphi_1, \varphi_2, \psi) = \quad (10.49)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^{N-1}} \varphi_1(x) \overline{\varphi_2(y)} \psi(\xi) d\mu_{jk}(x, y, \xi) \quad (10.50)$$

et on veut montrer que  $Supp(\mu_{jk}) \subset \{ (x, y, \xi), \quad x = y \}$ . Or, le lemme du noyau de Schwartz dit que: si  $T$  est une application linéaire continue:  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega_1) \mapsto T \varphi \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$ , il existe un noyau  $K \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$  tel que

$$\langle T \varphi, w \rangle = \langle K, \varphi \otimes w \rangle; \quad (10.51)$$

$$\forall w \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega_2), \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}^0(\Omega_1). \quad (10.52)$$

En outre, si  $T \varphi \geq 0$ , c'est-à-dire si

$$\langle T \varphi, w \rangle \geq 0, \quad \forall w \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega), \quad w \geq 0,$$

alors  $T\varphi$  est une mesure de Radon  $\geq 0$ , ce qui se traduit dans notre problème par: si  $\varphi_1 = \varphi_2$  et si  $\psi \geq 0$ , alors  $L_{jk}(\varphi_1, \varphi_2, \psi) \geq 0$ . Finalement, il reste à montrer que  $L_{jk}(\varphi_1, \varphi_2, \psi)$  ne dépend que de  $\varphi_1 \bar{\varphi}_2$  et  $\psi$ , ce qui s'obtient à l'aide d'un lemme de commutation et d'un peu de calcul pseudo-différentiel. A tout  $b \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ , on associe l'opérateur  $M_b$  de multiplication par  $b$ , soit:

$$M_b : \quad L^2(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^N) \quad (10.53)$$

$$v \mapsto M_b v \quad (10.54)$$

où  $M_b v(x) = b(x)v(x)$  p.p. en  $x \in \mathbb{R}^N$ .  $M_b$  ainsi défini est continu:  $L^2(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$ , avec  $\|M_b\|_{\mathcal{L}(L^2, L^2)} = \|b\|_{L^\infty}$ . A tout  $a \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ , on associe l'opérateur  $P_a$  de projection, soit:

$$P_a : \quad L^2(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^N) \quad (10.55)$$

$$v \mapsto P_a v := \mathcal{F}^{-1}(M_a \mathcal{F}v) \quad (10.56)$$

défini par  $\mathcal{F}P_a = M_a \mathcal{F}$ , c'est-à-dire  $\mathcal{F}P_a v(\xi) = a(\xi) \mathcal{F}v(\xi)$  p.p. en  $\xi \in \mathbb{R}^N$  ( $P_a$  a pour symbole  $a(\xi)$ ).  $P_a$  ainsi défini est continu:  $L^2(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$ , avec  $\|P_a\|_{\mathcal{L}(L^2, L^2)} = \|a\|_{L^\infty}$ . Dans le problème considéré, on utilise des fonctions  $\psi$  définies sur  $\mathbb{S}^{N-1}$  étendues par 0 dans  $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$  en des fonctions homogènes de degré 0 et on veut calculer la limite quand  $n \rightarrow +\infty$  de

$$\int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}(P_\psi M_{\varphi_1} U_j^{\textcircled{n}}) \overline{\mathcal{F}(M_{\varphi_2} U_k^{\textcircled{n}})} d\xi. \quad (10.57)$$

Or, par la formule de Plancherel, l'intégrale (10.57) est encore égale à

$$\int_{\mathbb{R}^N} P_\psi M_{\varphi_1} U_j^{\textcircled{n}} M_{\varphi_2} U_k^{\textcircled{n}} d\xi. \quad (10.58)$$

Comme on se propose de montrer que (10.58) ne dépend que de  $\varphi_1 \bar{\varphi}_2$  et de  $\psi$ , il reste à vérifier que

$$P_\psi M_{\varphi_1} U_j^{\textcircled{n}} - M_{\varphi_1} P_\psi U_j^{\textcircled{n}}$$

converge vers 0 dans  $L^2(\mathbb{R}^N)$  fort, et comme  $U_j^{\textcircled{n}} \rightharpoonup 0$  dans  $L^2(\mathbb{R}^N)$  faible, cela serait une conséquence de la compacité du commutateur:

$$P_\psi M_{\varphi_1} - M_{\varphi_1} P_\psi = [P_\psi, M_{\varphi_1}]$$

vu comme opérateur  $L^2(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$ . Il n'est pas trop difficile [31] de montrer que pour  $a \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^{N-1})$  et pour  $b \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N)$ , le commutateur  $[P_a, M_b]$  est de fait un opérateur compact  $L^2(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$  en utilisant la compacité des opérateurs de Hilbert-Schmidt (c'est-à-dire à noyau dans  $L^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ ) et de toute limite uniforme d'opérateurs compacts. Grâce à un lemme de commutation dû à Coifman, Rohberg, Weiss, ceci reste vrai lorsque  $b$  est seulement un élément de  $VMO$ , ce qui permet d'étendre la théorie ci-dessus à tout  $b \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap VMO(\mathbb{R}^N)$  par des méthodes empruntées à [5, 6, 12]. ■

Par convention, les opérateurs “pseudo-différentiels” d’ordre 0 utilisés dans ce Cours ont des symboles de la forme:

$$s(x, \xi) = \sum_{k \geq 0} a_k(\xi) b_k(x) \quad (10.59)$$

$$\text{avec } a_k \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^{N-1}), \quad b_k \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N), \quad \forall k \quad (10.60)$$

$$\text{et } \sum_{k \geq 0} \|a_k\|_\infty \|b_k\|_\infty < \infty \quad (10.61)$$

où les normes  $\|\cdot\|_\infty$  coïncident avec la norme de la convergence uniforme. On définit l’opérateur standard  $S$  de symbole  $s$  par:  $S = \sum_{k \geq 0} P_{a_k} M_{b_k}$  caractérisé par

$$\mathcal{F}Sv(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} s(x, \frac{\xi}{|\xi|}) v(x) e^{-2i\pi(x \cdot \xi)} d\xi, \quad (10.62)$$

$$\text{p.p. en } \xi \in \mathbb{R}^N, \quad (10.63)$$

$$\forall v \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N) \quad (10.64)$$

et on dit que l’opérateur linéaire continu  $L: L^2(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$  a pour symbole  $S$  si  $L - S$  est compact.

**Remarque 10.9** *On évitera ici d’utiliser la théorie classique des opérateurs pseudo-différentiels introduits par J. Kohn et L. Nirenberg ou la théorie des opérateurs de Fourier intégraux [13, 17], parce que ces théories fonctionnent sous des hypothèses de régularité sur les coefficients incompatibles avec les conditions d’application de la mécanique des milieux continus ou de la physique.*

## 10.9 Principe de localisation

Il est important de comprendre comment les H-mesures peuvent décrire les propriétés liées au transport des oscillations et effets de concentration qui sont les termes habituellement employés pour rendre compte de la différence entre convergence forte et convergence faible.

Ainsi, dans le cas particulier de l’opérateur du premier ordre:

$$\sum_{j=1}^N b_j(x) \frac{\partial u_n}{\partial x_j} = f_n, \quad \mathbb{R}^N,$$

où  $u_n \rightharpoonup 0$  dans  $L^2(\mathbb{R}^N)$  faible, et  $f_n \rightarrow 0$  dans  $H_{loc}^{-1}(\mathbb{R}^N)$  fort et où  $b_j \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^N)$ ,  $j = 1, \dots, N$ , si la suite  $u_n$  est associée à la H-mesure  $\mu \geq 0$ , alors le principe de localisation dit que:  $P(x, \xi) \mu = 0$  où  $P(x, \xi) = \sum_{j=1}^N b_j(x) \xi_j$ , c’est-à-dire:  $\mu$  vit sur les zéros de  $P(x, \xi)$ .

Dans le cas vectoriel, la H-mesure  $\mu$  associée à la suite  $U \stackrel{\textcircled{n}}{}$  (éventuellement après extraction) est une matrice  $p \times p$  dont les coefficients sont des mesures de

Radon (complexes) sur  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^{N-1}$  et  $\mu$  est hermitienne  $\geq 0$ . Si on prend  $\psi \equiv 1$ , on voit que: si  $U_j \overset{\text{①}}{U} \overset{\text{①}}{U}_k \rightarrow \Pi_{jk}$  au sens des mesures, alors

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N), \quad \langle \Pi_{jk}, \varphi \rangle = \langle \mu_{jk}, \varphi \otimes 1 \rangle.$$

A l'aide de ce calcul modulo les opérateurs compacts, on peut améliorer le théorème de compacité par compensation grâce au principe de localisation: si  $a_{jk} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$  et si

$$\sum_{j,k} \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{jk} U_k \overset{\text{①}}{U}) \rightarrow 0 \quad \text{dans } H_{loc}^{-1}(\mathbb{R}^N) \quad \text{fort}, \quad (10.65)$$

alors

$$\sum_{j,k} \xi_j a_{jk} \mu_{kl} = 0, \quad \ell = 1, \dots, N. \quad (10.66)$$

La réciproque est vraie: si (10.66) est vérifié, alors on a (10.65).

**Remarque 10.10** *Le principe de localisation peut s'interpréter comme suit. En effet, si*

$$\sum_{j,k} \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{jk} U_k \overset{\text{①}}{U}) \rightarrow 0, \quad H^{-1}(\Omega) \quad \text{fort},$$

et si  $R_j$  est l'opérateur de Riesz, de symbole  $i \frac{\xi_j}{|\xi|}$ , le principe de localisation dit que

$$\sum_{j,k} R_j a_{jk} U_k \overset{\text{①}}{U} \rightarrow 0 \quad L_{loc}^2(\mathbb{R}^N) \quad \text{fort}$$

c'est-à-dire que

$$\sum_{j,k} \frac{\xi_j}{1+|\xi|} \mathcal{F}(a_{jk} U_k \overset{\text{①}}{U}) \rightarrow 0 \quad L_{loc}^2(\mathbb{R}^N) \quad \text{fort}$$

compte tenu de l'approximation  $\frac{\xi_j}{1+|\xi|} \sim \frac{\xi_j}{|\xi|}$  quand  $|\xi| \rightarrow +\infty$ .

**Remarque 10.11** *Soit*

$$U \overset{\text{①}}{U} \rightharpoonup U^\infty \quad L_{loc}^2(\mathbb{R}^N) \quad \text{faible} \quad (10.67)$$

$$\sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^N A_{jk} \frac{\partial U_j \overset{\text{①}}{U}}{\partial x_k} \in \quad \text{compact de } H_{loc}^{-1}(\mathbb{R}^N) \quad \text{fort} \quad , i = 1, \dots, q. \quad (10.68)$$

Quitte à remplacer  $U \overset{\text{①}}{U}$  par  $U \overset{\text{①}}{U} - U^\infty$ , on peut toujours supposer que  $U^\infty = 0$ . Soit  $\mu$  la  $H$ -mesure associée à une suite extraite, encore notée  $\overset{\text{①}}{U}$ . On a, d'après le principe de localisation

$$\sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^N A_{ijk} \xi_k \mu^{j\ell} = 0, \quad i, \ell = 1, \dots, q. \quad (10.69)$$



Comme  $\mu$  est une matrice (complexe) hermitienne  $\geq 0$ , sa trace  $\mu^* = \sum_{j=1}^N \mu^{jj}$  est une mesure de Radon  $\geq 0$ . D'après le théorème de représentation de Radon-Nikodym, il existe des fonctions  $f_{ij}$   $\mu^*$ -intégrables telles que  $\mu^{ij} = f_{ij} \mu^*$ ,  $\mu^*$  p.p. Alors, la matrice  $(f_{ij})$  est hermitienne  $\geq 0$   $\mu^*$  p.p. et (10.69) entraîne

$$\sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^N A_{ijk} \xi_k f_{j\ell} = 0, \quad i, \ell = 1, \dots, q. \quad (10.70)$$

**Proposition 10.12** Avec les notations habituelles, si  $\psi \equiv 1$ , on a

$$\int_{\xi} \mu^{j\ell}(d\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_j^{(\mathbb{N})} \overline{U^{(\mathbb{N})}}_{\ell}.$$

**Preuve.** En effet: si

$$U_j^{(\mathbb{N})} \overline{U_{\ell}^{(\mathbb{N})}} \rightharpoonup \nu^{j\ell} \quad \text{au sens des mesures vagues,}$$

alors:

$$\langle \nu^{j\ell}, \varphi_1 \bar{\varphi}_2 \rangle = \langle \mu^{j\ell}, \varphi_1 \bar{\varphi}_2 \otimes 1 \rangle \quad (10.71)$$

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N), \quad (10.72)$$

■

**Corollaire 10.13** Si  $Q$  est une forme quadratique, soit

$$Q(U^{(\mathbb{N})}) = \sum_{i,j} q_{ij} U_i^{(\mathbb{N})} \overline{U_j^{(\mathbb{N})}} \rightharpoonup \sum_{i,j} q_{ij} \nu^{ij} \quad \text{au sens des mesures vagues.}$$

Alors, avec les notations utilisées plus haut, on a

$$\sum_{i,j} q_{ij} \nu^{ij} = \int_{\xi} q_{ij} f^{ij} \mu^*(d\xi).$$

## 11 APPLICATIONS DES H-MESURES

### 11.1 Exemple dans $\mathbb{R}^2$

Soit

$$u_1^{(\mathbb{n})} \rightharpoonup 0, \quad L^2(\mathbb{R}^2) \text{ faible}, \quad (11.1)$$

$$u_2^{(\mathbb{n})} \rightharpoonup 0, \quad L^2(\mathbb{R}^2) \text{ faible}, \quad (11.2)$$

$$\frac{\partial u_1^{(\mathbb{n})}}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2^{(\mathbb{n})}}{\partial x_2} \rightarrow 0 \quad H_{loc}^{-1}(\mathbb{R}^2) \text{ fort.} \quad (11.3)$$

D'après le théorème quadratique de compacité par compensation:

$$u_1^{(\mathbb{n})} u_2^{(\mathbb{n})} \rightharpoonup 0 \quad \text{au sens des mesures vagues.}$$

Soit  $\mu$  la H-mesure associée à la suite  $u^{(\mathbb{n})}$  après extraction. Alors  $\int_{\xi} \mu^{12}(d\xi) = 0$ , c'est-à-dire:

$$\forall \phi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2) : \quad \langle \mu^{12}, \phi \otimes 1 \rangle = 0.$$

La théorie des H-mesures dit même que  $\mu^{12} = 0$ . En effet: soit  $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$ ,  $\xi \neq 0$ . De (11.3), on déduit en particulier que  $\frac{\partial u_1^{(\mathbb{n})}}{\partial x_1}$  (resp.  $\frac{\partial u_2^{(\mathbb{n})}}{\partial x_2}$ )  $\in$  compact de  $H_{loc}^{-1}(\mathbb{R}^2)$  fort, ce qui entraîne que  $\xi_1 \mu^{11} = \xi_1 \mu^{12} = 0$  (resp.  $\xi_2 \mu^{21} = \xi_2 \mu^{22} = 0$ ). Comme  $\mu^{12} = \bar{\mu}^{21}$ , il vient:  $\xi_1 \mu^{12} = 0 = \bar{\xi}_2 \mu^{12}$ . Si  $\mu^{12} \neq 0$ , alors  $\xi_1 = \xi_2 = 0$ , ce qui est faux. Donc:  $\mu^{12} = \mu^{21} = 0$ .

### 11.2 Premier lemme de commutation

**Lemme 11.1** *Soit  $a \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^{N-1})$ ,  $b \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N)$ . Alors,  $P_a$  et  $M_b : L^2(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$  sont des opérateurs linéaires continus de normes resp.  $\|P_a\| = \|a\|_{\infty}$ ,  $\|M_b\| = \|b\|_{\infty}$ , où  $\|\cdot\|_{\infty}$  est la norme du sup. De plus, l'opérateur  $K = [M_b, P_a] := M_b P_a - P_a M_b$  est compact.*

**Preuve.** Soit  $a_n \in \mathcal{C}^1(\mathbb{S}^{N-1})$  telle que  $a_n \rightarrow a$  uniformément dans  $\mathbb{S}^{N-1}$  et soit  $b \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$  (espace de Schwartz) telle que  $b_n \rightarrow b$  uniformément dans  $\mathbb{R}^N$ . Si  $K_n = [M_{b_n}, P_{a_n}]$ , alors on vérifie aisément que  $K_n \rightarrow K$  uniformément en norme d'opérateurs. Si on vérifie que chaque  $K_n$  est compact alors le résultat s'en déduit car la compacité est conservée par la convergence uniforme des opérateurs. Chaque  $\mathcal{F}b_n$  est approché uniformément dans  $L^1(\mathbb{R}^N)$  par une suite  $g_{mn}$ ,  $g_{mn} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ , et alors  $\bar{\mathcal{F}}g_{mn}$  converge uniformément vers  $b_n$  dans  $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N)$ . En extrayant une sous-suite diagonale, on se ramène au cas où la suite  $b_n \rightarrow b$  uniformément dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$  et où  $\mathcal{F}b_n$  est à support compact  $\subset \{|\xi| \leq R_n\}$ ,  $R_n \rightarrow +\infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . On

a

$$\mathcal{F}(K_n u)(\xi) = \mathcal{F}(b_n P_{a_n} u)(\xi) - a_n\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) \mathcal{F}(b_n u)(\xi) = \quad (11.4)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}b_n(\xi - \eta) a_n\left(\frac{\eta}{|\eta|}\right) \mathcal{F}u(\eta) d\eta + \quad (11.5)$$

$$- \int_{\mathbb{R}^N} a_n\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) \mathcal{F}b_n(\xi - \eta) \mathcal{F}u(\eta) d\eta \quad (11.6)$$

$$= \int_{|\xi - \eta| \leq R_n} \mathcal{F}b_n(\xi - \eta) \left(a_n\left(\frac{\eta}{|\eta|}\right) - a_n\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)\right) \mathcal{F}u(\eta) d\eta \quad (11.7)$$

On en déduit comme dans [31] que les  $K_n$  sont compacts. En effet: dans l'égalité (11.7) on remarque que  $a_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et que

$$\left|\frac{\xi}{|\xi|} - \frac{\eta}{|\eta|}\right| \leq 2 \frac{|\xi - \eta|}{|\eta|}, \quad \xi, \eta \neq 0,$$

donc

$$\int_{\{|\eta| \geq \rho\}} \leq \frac{2}{\rho} \int_{\mathbb{R}^N} |\xi - \eta| \|\mathcal{F}b_n(\xi - \eta)\| \|\mathcal{F}u(\eta)\| d\eta \quad (11.8)$$

$$\leq \frac{2}{\rho} R_n \|\mathcal{F}b_n\|_{L^1} \|\mathcal{F}u\|_{L^1} \quad (11.9)$$

$$\leq \varepsilon \|\mathcal{F}b_n\|_{L^1} \|\mathcal{F}u\|_{L^1} \quad (11.10)$$

dès que  $\rho \rightarrow +\infty$  est suffisamment grand. Il en résulte que

$$\mathcal{F}(K_n u)(\xi) = \int_{|\xi - \eta| \leq R_n, |\eta| \geq \rho} + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

où l'opérateur (à support compact  $\subset \{|\xi| \leq R_n + \rho\}$  puisqu'on intègre sur  $|\eta| \leq \rho$ ) qui apparaît au membre de droite est à noyau dans  $L^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ , donc de Hilbert-Schmidt, donc compact. On en déduit que  $K_n$  est la limite uniforme, en norme d'opérateurs, d'une suite d'opérateurs de Hilbert-Schmidt, donc compacts, c'est-à-dire que chaque  $K_n$  est compact. ■

### 11.3 Second lemme de commutation

Pour les problèmes de propagation, on a besoin du

**Lemme 11.2** *Soit  $a = a\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)$  et  $b = b(x)$  des symboles "assez réguliers" vérifiant au moins l'une des hypothèses suivantes:*

1.  $a \in \mathcal{C}^1(\mathbb{S}^{N-1})$  et  $b, b' \in \mathcal{FL}^1(\mathbb{R}^N)$ ;
2.  $a, a' \in \mathcal{FL}_{loc}^1(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ ,  $b \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^N)$ .

Alors:  $[M_a, P_b] : L^2(\mathbb{R}^N) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^N)$  est un opérateur continu et, après extension éventuelle en un opérateur homogène de degré 0,  $\frac{\partial}{\partial x_k}[M_a, P_b]$  a pour symbole

$$\xi_k \sum_j \frac{\partial a}{\partial \xi_j} \frac{\partial b}{\partial x_j} \quad (11.11)$$

**Remarque 11.3** Dans l'hypothèse 1.,  $b, b' \in \mathcal{FL}^1(\mathbb{R}^N)$  signifie que  $b$  appartient à l'espace: (Voir[31])

$$X^1(\mathbb{R}^N) = \{w \in \mathcal{FL}^1(\mathbb{R}^N); w' \in \mathcal{FL}^1(\mathbb{R}^N)\}$$

muni de la norme

$$\|w\|_1 = \int_{\mathbb{R}^N} (1 + 2\pi |\xi|) |\mathcal{F}w(\xi)| d\xi.$$

Dans l'hypothèse 2.,  $a, a' \in \mathcal{FL}_{loc}^1(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$  signifie que  $a$  appartient à l'espace: (Voir[31])

$$X_{loc}^1(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}) = \{v; \phi v \in X^1(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}), \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})\} \quad (11.12)$$

Ces définitions sont justifiées car [31]: les éléments de  $X^1(\mathbb{R}^N)$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  et leurs dérivées premières sont bornées uniformément et convergent vers 0 à l'infini. De plus,  $H^s(\mathbb{R}^N) \subset X^1(\mathbb{R}^N)$ ,  $\forall s > 1 + N/2$ . Comme  $L^1(\mathbb{R}^N)$  est une algèbre de convolution,  $\mathcal{FL}^1(\mathbb{R}^N)$  est une algèbre pour le produit de fonctions usuel et la formule de Leibnitz montre que  $X^1(\mathbb{R}^N)$  est aussi une algèbre, ce qui donne un sens à la définition (11.12) de  $X_{loc}^1(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$  où  $\phi$  peut être dans  $X^1(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$  à support compact.

**Preuve de (11.11).** Soit  $K = [M_a, P_b] = M_a P_b - P_b M_a$ . On a

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial K u}{\partial x_k}\right)(\xi) = 2i\pi \xi_k \int_{\mathbb{R}^N} \left(a\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) - a\left(\frac{\eta}{|\eta|}\right)\right) \mathcal{F}b(\xi - \eta) \mathcal{F}u(\eta) d\eta,$$

d'où:

$$|\mathcal{F}\left(\frac{\partial K u}{\partial x_k}\right)(\xi)| \leq C |\xi_k| \int_{\mathbb{R}^N} \left|a\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) - a\left(\frac{\eta}{|\eta|}\right)\right| |\mathcal{F}b(\xi - \eta)| |\mathcal{F}u(\eta)| d\eta.$$

De l'estimation classique:

$$\left|\frac{\xi}{|\xi|} - \frac{\eta}{|\eta|}\right| \leq 2 \frac{|\xi - \eta|}{|\xi|}, \quad \forall \xi, \eta \neq 0.$$

on déduit que:

$$|\mathcal{F}\left(\frac{\partial(K u)}{\partial x_k}\right)(\xi)| \leq C \|a\|_1 \int_{\mathbb{R}^N} |\xi - \eta| |\mathcal{F}b(\xi - \eta)| |\mathcal{F}u(\eta)| d\eta \quad (11.13)$$

$$\leq C \|a\|_1 \|b\|_1 \|u\|_{L^2} \quad (11.14)$$

où  $\|a\|_1$  est la constante de Lipschitz de  $a$  sur  $\mathbb{S}^{N-1}$ . Il en résulte que:

$$\left\|\frac{\partial(K u)}{\partial x_k}\right\|_{L^2} \leq C \|a\|_1 \|b\|_1 \|u\|_{L^2}$$

et donc que  $K$  est un opérateur continu:  $L^2(\mathbb{R}^N) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^N)$  de norme  $\leq C \sup_{\xi} \left| \frac{\partial a}{\partial \xi} \right| \|b\|_{L^1}$ .

Pour calculer le symbole de  $\frac{\partial(Ku)}{\partial x_k}$ , on commence par approcher  $b$  par une suite  $b_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$  au sens suivant:

$$\int_{\mathbb{R}^N} (1 + 2\pi |\xi|) |\mathcal{F}b(\xi) - \mathcal{F}b_n(\xi)| d\xi \rightarrow 0, \quad (11.15)$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} (1 + 2\pi |\xi|) |\mathcal{F}b'(\xi) - \mathcal{F}b'_n(\xi)| d\xi \rightarrow 0, \quad (11.16)$$

avec  $\mathcal{F}b_n$  à support compact  $\subset \{|\xi| \leq R_n\}$ , de sorte que si  $K_n = [M_n, P_n]$ , alors  $\frac{\partial(K_n)}{\partial x_k} \rightarrow \frac{\partial(K)}{\partial x_k}$  quand  $n \rightarrow +\infty$  en norme grâce aux estimations précédentes. Alors il suffit de montrer que chaque  $K_n$  a pour symbole (admissible)

$$\xi_k \sum_j \frac{\partial a}{\partial \xi_j} \frac{\partial b_n}{\partial x_j}.$$

On termine ensuite comme dans [31] en utilisant un développement de Taylor de  $a$ . ■

**Remarque 11.4** *On a vu que le second lemme de commutation cf le lemme 11.2 est vrai si*

$$a \in C^1(\mathbb{S}^{N-1}) \quad \text{et} \quad |\xi| \mathcal{F}b \in L^1(\mathbb{R}^N). \quad (11.17)$$

*Or, la régularité (11.17) est trop exigeante pour les applications où les fonctions  $b$  sont les coefficients d'équations aux dérivées partielles et où  $a$  est choisie pour construire des fonctions-tests. On peut améliorer ce résultat par des arguments plus techniques dus à [12, 5]*

## 11.4 Propagation des oscillations

On se propose d'étudier la propagation des oscillations sur un exemple simple d'équation linéaire scalaire à coefficients variables du type:

$$\sum_{j=1}^N b_j(x) \frac{\partial u_n}{\partial x_j} + c(x) u_n = f_n, \quad \Omega \quad (11.18)$$

$$\text{où } u_n \rightharpoonup 0 \quad L^2(\Omega) \text{ faible} \quad (11.19)$$

$$b_j \in C^1(\Omega), \quad c \in C^0(\Omega). \quad (11.20)$$

Après extraction d'une sous-suite encore notée  $u_n$  associée à une H-mesure  $\mu$ , et si  $f_n \rightarrow 0$  dans  $H_{loc}^{-1}(\Omega)$  fort, alors le théorème de localisation dit que:

$$\left( \sum_{j=1}^N b_j(x) \xi_j \right) \mu = 0. \quad (11.21)$$

Si  $P(x, \xi) = \sum_{j=1}^N b_j(x) \xi_j$  est le polynôme caractéristique associé au problème, alors  $\text{supp}(\mu)$  est contenu dans l'ensemble des zéros de  $P$ . On se demande si  $\mu$  vérifie une équation où la bicaractéristique associée à  $P(x, \xi)$  apparaît. On va voir que la réponse est oui.

**Remarque 11.5** *Compte tenu de (11.21), on remplace (11.18) par l'équation*

$$\sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} (b_j(x) \partial u_n) = f_n, \quad \Omega$$

grâce à une translation sur le coefficient  $c$ . Cette transformation ne change pas la généralité du problème puisque le coefficient  $c$  dans (11.18) ne joue pas de rôle particulier ici et qu'il peut être au besoin absorbé dans  $f_n$ .

On a le "Théorème de propagation":

**Théorème 11.6** *Si  $b_j \in C^1(\Omega)$ ,  $j = 1, \dots, N$ , et si  $b_j \in \mathbb{R}$ , alors  $\mu$  vérifie une équation aux dérivées partielles d'ordre 1 en  $\xi$  et  $x$ , c'est-à-dire de type transport, dont les courbes caractéristiques sont les bicaractéristiques dérivées de  $P$ .*

Pour écrire cette équation, on a besoin du crochet de Poisson  $\{f, g\}$  de deux fonctions  $f, g$  définies sur  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^{N-1}$ , soit

$$\{f(x, \xi), g(x, \xi)\} = \sum_{k=1}^N \frac{\partial f}{\partial \xi_k} \frac{\partial g}{\partial x_k} - \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial g}{\partial \xi_k}.$$

En particulier:

$$\{a(\xi), b(\xi)\} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial a}{\partial \xi_j} \frac{\partial b}{\partial x_j}$$

et

$$\xi_k \frac{\partial a}{\partial \xi_j} \frac{\partial b}{\partial x_j} = \xi_k \{a, b\}.$$

Soit  $s_1(x, \xi)$ ,  $s_2(x, \xi)$  les symboles (réguliers) de deux opérateurs standards  $S_1$ ,  $S_2$ . On montre que  $\frac{\partial}{\partial x_k}([S_1, S_2])$  a pour symbole  $\xi_k \{s_1, s_2\}$ .

Pour écrire l'équation vérifiée par  $\mu$ , on considère le problème simplifié:

$$\sum_{j=1}^N b_j \frac{\partial u_n}{\partial x_j} = f_n, \quad \Omega = \mathbb{R}^N; \quad (11.22)$$

$$\text{où } u_n \rightharpoonup 0 \quad L^2(\mathbb{R}^N) \text{ faible} \quad (11.23)$$

et on suppose que  $f_n \rightharpoonup 0$  dans  $L^2(\mathbb{R}^N)$  faible. On note  $\nu$  la H-mesure associée à la suite  $(u_n, f_n)$  après extraction, de sorte que  $\nu_{11} = \mu$ .

**Proposition 11.7** *Avec les notations de ce paragraphe, pour toute fonction test  $\phi(x, \xi) \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^{N-1})$ , l'équation différentielle du premier ordre (de type transport) vérifiée par  $\mu$  s'écrit, sous forme variationnelle:*

$$\langle \mu, \{P, \phi\} - \operatorname{div}(b) \phi \rangle = 2 \langle \operatorname{Re} \nu_{12}, \phi \rangle.$$

**Preuve.** A titre d'exercice, on détaille le raisonnement, qui est celui de [31]. On considère le problème (11.22)-(11.23) avec  $f_n \rightarrow 0$  dans  $H_{loc}^{-1}(\mathbb{R}^N)$  fort et  $b_j \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^N)$ . Pour toute fonction  $\phi$  assez régulière, on a formellement:

$$\sum_{j=1}^N b_j \frac{\partial(\phi u_n)}{\partial x_j} = g_n = \phi f_n + \sum_{j=1}^N b_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} u_n.$$

On applique l'opérateur  $P_a$  aux deux membres de cette égalité et on obtient, en notant  $v_n = \phi u_n$ :

$$P_a g_n = P_a \left( \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} (b_j v_n) - \operatorname{div}(b) v_n \right). \quad (11.24)$$

c'est-à-dire:

$$P_a g_n = \sum_{j=1}^N \frac{\partial([P_a, b_j] v_n)}{\partial x_j} + \quad (11.25)$$

$$+ \sum_{j=1}^N b_j \frac{\partial(P_a v_n)}{\partial x_j} + [\operatorname{div}(b), P_a] v_n \quad (11.26)$$

où  $[\operatorname{div}(b), P_a]$  est un opérateur d'ordre 0 compact d'après le Lemme 11.1,  $\frac{\partial([P_a, b_j])}{\partial x_j}$  est un opérateur d'ordre 0 de symbole

$$\xi_j \sum_{k=1}^N \frac{\partial a}{\partial \xi_k} \frac{\partial b_j}{\partial x_k} = \{a, P\}.$$

On est ramené à considérer le système:

$$\sum_{j=1}^N b_j \frac{\partial(P_a v_n)}{\partial x_j} + (\{a, P\} + [\operatorname{div}(b), P_a]) v_n = P_a g_n, \quad (11.27)$$

$$\sum_{j=1}^N b_j \frac{\partial v_n}{\partial x_j} = g_n \quad (11.28)$$

Après multiplication de la première équation (11.27) par  $\bar{v}_n$ , on obtient, compte tenu de (11.28), l'équation d'énergie:

$$\sum_{j=1}^N b_j \frac{\partial(P_a v_n \bar{v}_n)}{\partial x_j} + (\{a, P\} + [\operatorname{div}(b), P_a]) |v_n|^2 \quad (11.29)$$

$$= P_a g_n \bar{v}_n + P_a v_n \bar{g}_n. \quad (11.30)$$

Soit  $\nu$  la H-mesure associée à une sous-suite de  $(v_n, g_n)$ . On multiplie les deux membres de (11.29)-(11.30) par une fonction test  $w \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$  et on passe à la limite dans la formulation variationnelle résultante, soit:

$$-\langle P_a v_n \bar{v}_n, \sum_{j=1}^N b_j \frac{\partial(b_j w)}{\partial x_j} \rangle + \quad (11.31)$$

$$+ \langle (\{a, P\} + [\operatorname{div}(b), P_a]) v_n \bar{v}_n, w \rangle = \quad (11.32)$$

$$= \langle P_a g_n \bar{v}_n + P_a v_n \bar{g}_n, w \rangle. \quad (11.33)$$

On en déduit une formulation variationnelle pour la H-mesure  $\nu$  :

$$\langle \nu^{11}, -a \sum_{j=1}^N \frac{\partial(b_j w)}{\partial x_j} + \{a, P\} w \rangle \quad (11.34)$$

$$= \langle 2 \operatorname{Re} \nu^{12}, a w \rangle. \quad (11.35)$$

De la relation:

$$\{a, P\} w - a \sum_{j=1}^N \frac{\partial(b_j w)}{\partial x_j} = w \sum_{j,k=1}^N \xi_j \frac{\partial a}{\partial \xi_k} \frac{\partial b_j}{\partial x_k} \quad (11.36)$$

$$- a \operatorname{div}(b) w - \sum_{j=1}^N a b_j \frac{\partial w}{\partial x_j} = \quad (11.37)$$

$$= \{w a, P\} - a \operatorname{div}(b) w \quad (11.38)$$

on déduit que (11.34)-(11.35) s'écrit aussi:

$$\langle \nu^{11}, \{w a, P\} - a \operatorname{div}(b) w \rangle = \langle 2 \operatorname{Re} \nu^{12}, a w \rangle \quad (11.39)$$

Il reste à exprimer  $\nu$  en fonction de la H-mesure  $\mu$  associée à une sous-suite de  $(u_n, f_n)$ . Pour cela, on remarque que

$$g_n \bar{v}_n = |\phi|^2 f_n \bar{u}_n + \sum_{j=1}^N b_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \bar{\phi} |u_n|^2,$$

d'où il résulte que:

$$\operatorname{Re} \nu^{12} = |\phi|^2 \operatorname{Re} \mu^{12} + \operatorname{Re} \left( \sum_{j=1}^N b_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \bar{\phi} \right) \mu^{11}.$$

D'autre part, on a immédiatement:

$$\nu^{11} = |\phi|^2 \mu^{11}.$$

On reporte ces résultats dans (11.39) et on obtient ainsi:

$$\langle |\phi|^2 \mu^{11}, \{w a, P\} - \operatorname{div}(b) w a \rangle = \quad (11.40)$$



$$= \langle |\phi|^2 \operatorname{Re} \mu^{12} + 2 \sum_{j=1}^N \operatorname{Re}(b_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \bar{\phi}) \mu^{11}, w a \rangle \quad (11.41)$$

D'autre part:

$$|\phi|^2 \{w a, P\} - 2 \sum_{j=1}^N \operatorname{Re}(b_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \bar{\phi}) w a = \quad (11.42)$$

$$= |\phi|^2 \sum_{j,k=1}^N \left( \frac{\partial a}{\partial \xi_k} w \xi_j \frac{\partial b_j}{\partial x_k} - a \frac{\partial w}{\partial x_k} b_k \right) - \sum_{j=1}^N b_j \frac{\partial(|\phi|^2)}{\partial x_j} w a = \quad (11.43)$$

$$= \{|\phi|^2 a w, P\} \quad (11.44)$$

entraîne la formulation variationnelle:

$$\langle \mu^{11}, \{|\phi|^2 a w, P\} - \operatorname{div}(b) |\phi|^2 w a \rangle = \langle 2 \operatorname{Re} \mu^{12}, |\phi|^2 w a \rangle.$$

Alors, en posant:  $\Phi = |\phi|^2 w a$ , on obtient la formulation variationnelle:

$$\langle \mu^{11}, \{\Phi, P\} - \operatorname{div}(b) \Phi \rangle = \langle 2 \operatorname{Re} \mu^{12}, \Phi \rangle.$$

On conclut en remarquant que les applications  $\Phi = |\phi|^2 w a$ ,  $w \in \mathcal{C}_c^\infty$ ,  $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty$ , sont denses dans l'espace des fonctions  $\Phi(x, \xi)$  de  $\mathcal{C}^1(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1})$  à support compact en  $x$ .  $\blacksquare$

**Remarque 11.8** Cette équation se rencontre dans des problèmes d'ondes de type Maxwell ou en élasticité, suivant les conditions aux limites que l'on impose.

**Remarque 11.9** L'équation satisfaite par  $\mu$  entraîne que les oscillations et les effets de concentration se propagent le long des rayons bicaractéristiques définis par les équations

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial P}{\partial \xi_j}, \quad \frac{d\xi_j}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_j},$$

La deuxième étant homogène de degré 1 en  $\xi$ , elle induit une équation sur  $\mathbb{S}^{N-1}$ .

## 12 OSCILLATIONS ET EFFETS DE CONCENTRATION: EXEMPLES

### 12.1 Introduction

Soit  $u_n \rightharpoonup 0$  dans  $L^2(\mathbb{R}^N)$  faible. Alors  $u_n$  ne converge pas fortement dès que  $u_n^2 \rightharpoonup \nu \geq 0$  au sens des mesures vagues. On observe: soit des oscillations si  $\nu$  est régulière, à densité, de la forme  $\nu = f dx$ , soit des effets de concentration si  $\nu$  est singulière.

### 12.2 Effets de concentration

Un exemple type en est le suivant, dû à [31] (exemple 2.2, p 204-205.)

**Proposition 12.1** *Soit*

$$w_n(x) = \frac{1}{\varepsilon_n^{N/2}} w\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right), \quad w \in L^r(\mathbb{R}^N), \quad \varepsilon_n \rightarrow 0^+.$$

Alors  $\|w_n\|_{L^2} = \|w\|_{L^2}$ ,  $w_n \rightharpoonup 0$  dans  $L^2(\mathbb{R}^N)$  faible,  $w_n^2 \rightharpoonup C \delta_0$  au sens des mesures vagues, où  $C = \int_{\mathbb{R}^N} |w|^2 dx$ .

**Preuve.** ([31]) D'après la définition de la H-mesure  $\mu$  associée à une sous-suite de  $(w_n)$ , on a:

$$\forall \phi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |w_n|^2 \phi dx = \langle \mu, \phi \otimes 1 \rangle. \quad (12.1)$$

On est donc ramené au calcul de  $\mu$ . Soit  $\phi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ ,  $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^{N-1})$ . On a

$$\langle \mu, |\phi|^2 \otimes \psi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) |\mathcal{F}(\phi w_n)|^2 dx.$$

On remarque que

$$\phi w_n - \phi(0) w_n \rightarrow 0, \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}^N), \quad \text{fort} \quad .$$

En effet: c'est une conséquence immédiate de la relation

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\phi w_n - \phi(0) w_n|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\phi(\varepsilon_n y) - \phi(0)|^2 |w_n|^2 dy$$

et de la continuité de  $\phi$ . Donc:

$$\mathcal{F}(\phi w_n) - \phi(0) \mathcal{F}(w_n) \rightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}^N) \quad \text{fort} \quad .$$

D'autre part, par définition de  $\mu$ :

$$\langle \mu, |\phi|^2 \otimes \psi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) |\phi(0)|^2 |\mathcal{F}w_n|^2 d\xi = \quad (12.2)$$

$$= |\phi(0)|^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) |\mathcal{F}w_n|^2 d\xi. \quad (12.3)$$

Mais, un changement de variable montre que

$$\mathcal{F}w_n(\xi) = \varepsilon_n^{N/2} \mathcal{F}w(\varepsilon_n \xi)$$

donc:

$$\langle \mu, |\phi|^2 \otimes \psi \rangle = |\phi(0)|^2 \int_{\mathbb{R}^N} \psi\left(\frac{\eta}{|\eta|}\right) |\mathcal{F}w(\eta)|^2 d\eta.$$

On conclut en passant en coordonnées polaires, soit  $\eta = t\xi$ ,  $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$ ,  $t > 0$ . On obtient:

$$\langle \mu, |\phi|^2 \otimes \psi \rangle = |\phi(0)|^2 \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \int_0^{+\infty} \psi(\xi) |\mathcal{F}w(t\xi)|^2 t^{N-1} dt d\xi = \quad (12.4)$$

$$= \langle \delta_0 \otimes \nu(\xi), \psi \rangle_{\mathbb{S}^{N-1}} \quad (12.5)$$

où  $\nu(\xi)$  désigne une mesure à densité de surface:

$$\nu(\xi) = \int_0^{+\infty} |\mathcal{F}w(t\xi)|^2 t^{N-1} dt,$$

soit encore

$$\langle \mu, \phi(x, \xi) \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \phi\left(0, \frac{\xi}{|\xi|}\right) |\mathcal{F}w(\xi)|^2 d\xi, \quad \forall \phi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^{N-1}).$$

Revenant au problème de la convergence (12.1), on conclut que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |w_n|^2 \phi dx = \langle \delta_0 \otimes \nu, \phi \rangle_{\mathbb{S}^{N-1}} = \quad (12.6)$$

$$= \phi(0) \int_{\mathbb{R}^N} |\mathcal{F}w|^2 d\xi = \phi(0) \int_{\mathbb{R}^N} |w|^2 dx. \quad (12.7)$$

■

### 12.3 Oscillations modulées

Soit la suite de fonctions scalaires

$$u_n(x) = v\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right), \quad \varepsilon_n \rightarrow 0^+$$

où  $v(x, y)$  est périodique en la variable  $y$ . Pour simplifier, on suppose que la période est le cube unité de  $\mathbb{R}^N$ , soit  $Q = (0, 1)^N$ , de sorte que  $v(x, y)$  peut se décomposer en sa série de Fourier

$$v(x, y) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^N} c_m(x) e^{2i\pi(m \cdot y)}$$

où  $c_0(x) = 0$  par hypothèse pour avoir:  $u_n \rightharpoonup 0 = c_0$  dans  $L_{loc}^2(\mathbb{R}^N)$  faible. Dans cet exemple, la H-mesure associée à la suite  $u_n$  (sans extraction) est définie par

$$\forall \phi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^{N-1}), \quad \langle \mu, \phi(x, \xi) \rangle = \sum_{m \in \mathbb{Z}^N \setminus \{0\}} \int_{\mathbb{R}^N} |c_m|^2 \phi\left(x, \frac{m}{|m|}\right) dx.$$

Elle est donc atomique en  $\xi$  et de la forme

$$\mu = \sum_{m \in \mathbb{Z}^N \setminus \{0\}} |c_m|^2 \otimes \delta_{\frac{m}{|m|}}.$$

Pour ce résultat et le détail de la démonstration, on renvoie à [31] (exemple 1.2, p. 203-204.)

Plus généralement, les H-mesures utilisent des décompositions en les directions  $\frac{\xi}{|\xi|}$ , pas en les fréquences (sinon, la limite fréquence est infinie.)

Une conséquence de l'effet de concentration est que l'on peut faire apparaître n'importe quelle mesure  $\geq 0$ . En effet:

**Corollaire 12.2** *Soit  $\mu \geq 0$  une mesure de Radon  $\geq 0$  sur  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^{N-1}$  de masse totale  $A^2$ . Alors,  $\forall B > A$ , il existe une suite  $u_n \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$  de norme  $\|u_n\|_{L^2} \leq B$ , telle que  $u_n \rightharpoonup 0$  dans  $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$  faible de H-mesure associée  $\mu$ .*

**Remarque 12.3** *La confrontation des résultats montre que les calculs sur les H-mesures sont essentiellement les mêmes que dans le cas périodique en substituant à  $\frac{m}{|m|}$ ,  $m \in \mathbb{Z}^N \setminus \{0\}$ , la direction  $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$ .*

## 12.4 Homogénéisation et faible amplitude

Avec les notations déjà utilisées, si  $A \stackrel{\textcircled{n}}{=} A^\infty + \gamma B \stackrel{\textcircled{n}}{=}$  où  $B \stackrel{\textcircled{n}}{\rightarrow} 0$  et où  $\gamma$  est un petit paramètre, alors,  $A^{eff}$  est une fonction analytique de  $\gamma$  et on a

$$A^{eff} = A^\infty + \gamma^2 C + \mathcal{O}(\gamma^3).$$

La H-mesure associée à la suite  $B \stackrel{\textcircled{n}}{=}$  permet de calculer  $C$ . Pour simplifier l'exposé, on effectue les calculs dans le cas périodique. On a alors:

$$A \stackrel{\textcircled{n}}{=} A^\infty + \gamma B \stackrel{\textcircled{n}}{=}, \quad B \stackrel{\textcircled{n}}{=} B\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right),$$

où  $B(y)$  est périodique de période le cube unité de  $\mathbb{R}^N$ , soit  $Y = (0, 1)^N$ , et où  $\varepsilon_n \rightarrow 0^+$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{R}^N$  fixé et soit  $w_\lambda$  solution de

$$-\operatorname{div}(A^\infty + \gamma B(y)) \operatorname{grad}(w_\lambda) = 0, \quad Y \tag{12.8}$$

$$\operatorname{grad}(w_\lambda) \quad \text{périodique de période } Y, \tag{12.9}$$

$$\frac{1}{|Y|} \int_Y \operatorname{grad}(w_\lambda) = \lambda. \tag{12.10}$$

On suppose que  $\operatorname{grad}(w_\lambda)$  est analytique en  $\gamma$  et se développe comme

$$\operatorname{grad}(w_\lambda) = \lambda + \gamma z_1 + \gamma^2 z_2 + \dots$$

avec

$$\frac{1}{|Y|} \int_Y z_1 = \frac{1}{|Y|} \int_Y z_2 = \dots = 0$$

et  $z_1, z_2, \dots$  de la forme  $z_1 = \text{grad}(\varphi_1^{\textcircled{n}})$ ,  $z_2 = \text{grad}(\varphi_2^{\textcircled{n}})$ ,  $\dots$ . On trouve successivement, par identification suivant les puissances de  $\gamma$ :

$$-\text{div}(A^\infty \lambda) = 0, \quad Y; \quad (12.11)$$

$$-\text{div}(A^\infty z_1 + B(y) \lambda) = 0; \quad (12.12)$$

$$-\text{div}(A^\infty z_2 + B(y) z_1) = 0. \quad (12.13)$$

L'équation (12.13) issue de l'identification des termes en  $\gamma^2$  couple  $z_1$  et  $z_2$  où  $z_1$  est préalablement déterminé en résolvant (12.12) issue de l'identification des termes en  $\gamma^1$ .

On revient au problème indexé en  $\textcircled{n}$ , soit

$$-\text{div}(A^\infty + \gamma B^{\textcircled{n}}) \text{grad}(w_n^\gamma(x)) = f_n, \quad (12.14)$$

$$\text{où } \text{grad}(w_n^\gamma(x)) \rightharpoonup \lambda \quad L^2 \text{ faible}, \quad (12.15)$$

$$B^{\textcircled{n}} \rightharpoonup 0 \quad L^\infty \text{ faible} \quad *. \quad (12.16)$$

Par identification suivant les puissances de  $\gamma$  (on gèle  $n$ ), on trouve:

$$-\text{div}(A^\infty \lambda) = f_0^{\textcircled{n}}, \quad Y; \quad (12.17)$$

$$-\text{div}(A^\infty \text{grad}(\varphi_1^{\textcircled{n}}) + B^{\textcircled{n}}(y) \lambda) = f_1^{\textcircled{n}}; \quad (12.18)$$

$$-\text{div}(A^\infty \text{grad}(\varphi_2^{\textcircled{n}}) + B^{\textcircled{n}}(y) \text{grad}(\varphi_1^{\textcircled{n}})) = f_2^{\textcircled{n}}; \quad (12.19)$$

**Remarque 12.4** Sur  $\mathbb{R}^N$ , l'application  $B^{\textcircled{n}} \mapsto \text{grad}(\varphi_1^{\textcircled{n}})$  est un opérateur "pseudo-différentiel" et la limite de  $B^{\textcircled{n}} \cdot \text{grad}(\varphi_1^{\textcircled{n}})$  peut être calculée en utilisant la H-mesure associée à  $B^{\textcircled{n}}$ .

L'analogie du cas périodique où l'on explicite  $\text{grad}(\varphi_1^{\textcircled{n}})$  en fonction de  $B^{\textcircled{n}}$  consiste à décrire l'opérateur pseudo-différentiel  $B^{\textcircled{n}} \mapsto \text{grad}(\varphi_1^{\textcircled{n}})$  au moyen de la H-mesure  $\mu$  associée à la suite  $B^{\textcircled{n}}$ . Les calculs donnent (cf[31]):

$$A^{eff} = A^\infty - \gamma^2 M_2 + \mathcal{O}(\gamma^3), \quad (12.20)$$

$$\int_\Omega (M_2)_{ij} \phi \, dx = \sum_{k,\ell=1}^N \langle \mu^{ik,\ell j}, \frac{\phi(x) \xi_k \xi_\ell}{(A^\infty(x) \xi \cdot \xi)} \rangle, \quad (12.21)$$

$$\forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega), \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (12.22)$$

c'est-à-dire

$$(M_2)_{ij} = \sum_{k,\ell=1}^N \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \frac{\xi_k \xi_\ell}{(A^\infty(x) \xi \cdot \xi)} d\mu^{ik,\ell j}.$$

**Remarque 12.5** La H-mesure associée à la suite de matrices  $B^{\mathbb{N}}$  de taille  $N \times N$  est elle-même une matrice du type  $\mu = (\mu^{ik, \ell j})$ ,  $i, k, j, \ell = 1, \dots, N$ .

Dans le cas particulier d'un mélange isotrope caractérisé par

$$A^{\mathbb{N}} = a^\infty I + \gamma B^{\mathbb{N}}, \quad B^{\mathbb{N}} = b^{\mathbb{N}} I, \quad b^{\mathbb{N}} \rightharpoonup 0 \quad L^\infty(\Omega) \text{ faible } *,$$

on trouve:

$$A^{eff} = a^\infty I - \gamma^2 M_2 + \mathcal{O}(\gamma^3),$$

avec

$$\int_{\Omega} (M_2)_{ij} \phi \, dx = \langle \mu, \frac{\phi}{a^*} \xi_i \otimes \xi_j \rangle, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega),$$

c'est-à-dire

$$(M_2)_{ij} = \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \frac{\xi_i \xi_j}{\langle A^\infty \xi \cdot \xi \rangle} d\mu = \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \frac{\xi_i \xi_j}{a^*} d\mu. \quad (12.23)$$

**Remarque 12.6** La formule (12.23) est à comparer avec la formule

$$(M_2)_{ij} = - \sum_{m \in \mathbb{Z}^N - \{0\}} \frac{m_i \cdot m_j}{\langle A^\infty m \cdot m \rangle} |m|^2$$

vraie dans le cas isotrope périodique, c'est-à-dire pour  $B^{\mathbb{N}} = b^{\mathbb{N}} I$ ,  $b^{\mathbb{N}}(x) = b(\frac{x}{\varepsilon_n})$ , où  $b = b(y)$  est périodique de période le cube unité de  $\mathbb{R}^N$ , soit  $Y = (0, 1)^N$  et où  $\varepsilon_n \rightarrow 0^+$ .

## 12.5 Le problème des conditions initiales

On se limite au cas type de l'équation des ondes:

$$\sum_{j=1}^N b_j(x) \frac{\partial u_n}{\partial x_j} = f_n, \quad \Omega = \{x_N > 0\}, \quad (12.24)$$

$$u_n \Big|_{x_N=0} = v_n \quad (12.25)$$

où  $u_n \rightharpoonup 0$  dans  $L^2(\Omega)$  faible et  $v_n \rightharpoonup 0$  dans  $L^2(\partial\Omega)$  faible. On suppose que la donnée initiale  $v_n$  est associée à une H-mesure  $\pi$  sur  $\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{S}^{N-2}$ . Pour s'assurer que la condition initiale a un sens, on suppose en outre que  $b_N \neq 0$  sur  $\{x_N = 0\}$ . On a vu que si les  $b_j$  sont réels et de classe  $\mathcal{C}^1$ , alors la H-mesure  $\mu$  associée à  $u_n$  satisfait l'équation:

$$\langle \mu, \{\phi(x, \xi), P\} - \phi \operatorname{div}(b) \rangle = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1})$$

où  $P = P(x, \xi)$  est le polynôme caractéristique:  $P(x, \xi) = \sum_{j=1}^N b_j(x) \xi_j$ .

On veut pouvoir étendre cette équation au cas de  $\phi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1})$  non nécessairement nulle sur  $\partial\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}$  afin de tenir compte de la condition initiale sur  $\mu$ . On a le

**Théorème 12.7** *Sous les hypothèses de ce paragraphe, la H-mesure  $\mu$  associée à la suite  $u_n$  (après extraction), est solution de (cf. la formule 3.27 de [31] )*

$$\langle \mu, \{\phi(x, \xi), P\} - \phi \operatorname{div}(b) \rangle = \langle b_N(x', 0) \pi, r_N \phi \rangle \quad (12.26)$$

$$\forall \phi = \phi(x, \xi) \in \mathcal{C}^1(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}) \quad \text{à support borné} \quad (12.27)$$

$$(\text{non nécessairement } \equiv 0 \quad (12.28)$$

$$\text{sur } \{x_N = 0\}). \quad (12.29)$$

Avec la notation  $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{N-1})$ , l'opérateur de restriction  $r_N$  de  $\mathbb{S}^{N-1}$  à  $\mathbb{S}^{N-2}$  est défini par

$$r_N \phi(x', \xi') = \phi(x', s_N(x', \xi'))$$

où le symbole tangentiel  $s_N(x', \xi')$  est de la forme:

$$s_N(x', \xi') = (\xi_1, \dots, \xi_{N-1}, \eta_N(x', \xi'))$$

et où  $P(x', s_N(x', \xi')) = 0$ .

**Remarque 12.8** *D'après le théorème de localisation, la H-mesure  $\mu$  vit sur*

$$\{(x, \xi) : P(x, \xi) = 0\} = \{(x, \xi) : b_N \xi_N = -\sum_{j=1}^{n-1} b_j(x) \xi_j\}.$$

Comme  $b_N \neq 0$  sur  $\{x_N = 0\}$ , tout point  $(x', \xi') \in \{P(x, \xi) = 0\} \cap \{x_N = 0\}$  se relève en  $(x, \xi) \in \mathbb{S}^{N-1}$ . Autrement dit: la H-mesure  $\pi$  voit l'énergie due aux oscillations et aux effets de concentration préparés par la donnée initiale  $v_n$  en  $\{x_N = 0\}$ ; elle voit l'énergie transportée dans la direction de  $\xi'$ , mais elle ne connaît pas la vitesse initiale associée. Or, cette information est contenue dans le polynôme caractéristique  $P(x, \xi)$  et la contrainte  $\{P(x, \xi) = 0\}$  sur le support de  $\mu$ . Cela se traduit par l'introduction de l'opérateur de restriction  $r_N$  et de l'opérateur pseudo-différentiel  $s_N$ .

On applique ce résultat à l'équation des ondes:

$$u_{tt}^{(\mathfrak{n})} - \Delta u^{(\mathfrak{n})} = 0, \quad (12.30)$$

$$u^{(\mathfrak{n})}(x, 0) = v_n(x) \in H^1(\mathbb{R}^N), \quad (12.31)$$

$$u_t^{(\mathfrak{n})}(x, 0) = w_n(x) \in L^2(\mathbb{R}^N). \quad (12.32)$$

Soit  $\mu$  la H-mesure associée à  $\operatorname{grad}(u^{(\mathfrak{n})}) = E^{(\mathfrak{n})}$ . On utilise l'information différentielle sur  $E^{(\mathfrak{n})}$ , soit:

$$\frac{\partial E_j^{(\mathfrak{n})}}{\partial x_k} - \frac{\partial E_k^{(\mathfrak{n})}}{\partial x_j} = 0, \quad j, k = 1, \dots, N.$$

Le principe de localisation s'applique pour donner:

$$\xi_k \mu^{j\ell} - \xi_j \mu^{k\ell} = 0, \quad j, \ell = 1, \dots, N.$$

On en déduit qu'il existe une mesure (de Radon)  $\geq 0$ , soit  $\nu$ , telle que  $\mu^{ij} = \xi_i \xi_j \nu$ . On conclut pour le problème (12.30)-(12.32): si  $Q(x, t; \xi, \tau) = \tau^2 - \xi^2$  est le polynôme caractéristique, la mesure  $\nu$  est solution du problème variationnel:

$$\langle \nu, \{\Phi, Q\} \rangle = \langle \pi^{12} + \pi^{13}, r_0 \phi \rangle$$

où  $\pi$  désigne la H-mesure associée à une sous-suite de  $(v_n, \text{grad } v_n, w_n)$  et où  $r_0 : \mathbb{S}^{N-1} \rightarrow \mathbb{S}^{N-2}$  est l'opérateur de restriction défini par

$$r_0 \phi(x, 0; \xi, \tau) = \phi(x, 0; s_0(x, \xi))$$

où  $s_0(x, \xi)$  est défini par

$$s_0(x, \xi) = (\xi, \eta_0(x, \xi)) \quad \text{et} \quad Q(x, t; s_0(x, \xi)) = 0.$$

## 12.6 Changement de variable

Soit  $u_n \rightharpoonup 0$  dans  $L^2(\mathbb{R}^N)$  faible et soit  $\mu_0$  la H-mesure associée à  $u_n$  après extraction (à  $t = 0$ ). Soit  $v_n$  définie par  $v_n(x) = u_n(\phi(x))$  où  $\phi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  est un changement de variable, associée à une H-mesure  $\mu_1$  (à  $t = 1$ ). On veut connaître la relation entre  $\mu_0$  et  $\mu_1$ . Pour le voir, on introduit une variable supplémentaire de temps  $t$  et on résout l'équation suivante avec condition initiale en  $t = 0$ :

$$\frac{\partial U^{\textcircled{n}}}{\partial t} + \sum_{j=1}^N a_j(x, t) \frac{\partial U^{\textcircled{n}}}{\partial x_j} = 0, \quad (12.33)$$

$$U^{\textcircled{n}}(x, 0) = u_n(x) \quad (12.34)$$

où les coefficients  $a_j$ , de classe  $\mathcal{C}^1$ , sont choisis tels que:  $U^{\textcircled{n}}(x, 0) = u_n(x)$  ait un sens au voisinage de  $x_0$ , ce qui entraîne que  $U^{\textcircled{n}}(x, 1) = v_n(x)$  au voisinage de  $\phi(x_0)$ . L'étude de l'évolution de la solution  $U^{\textcircled{n}}$  de  $u_n(x)$  à  $t = 0$  à  $v_n(x)$  à  $t = 1$  fait intervenir les courbes caractéristiques

$$\frac{dx_j}{dt} = a_j(x(t), t), \quad j = 1, \dots, N$$

du système qui font passer  $x(t)$  de  $x(0)$  voisin de  $x_0$  à  $x(1)$  voisin de  $\phi(x_0)$ .

On peut alors énoncer le:

**Théorème 12.9** *Si  $\phi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  est un difféomorphisme local, alors les mesures  $\mu_0$  et  $\mu_1$  sont reliées par la formule (3.35) de [31]: ( $y = \phi^{-1}(x)$ )*

$$\langle \mu_1, \Psi(x, \xi) \rangle = \langle \mu_0, \det(\phi'(\phi^{-1}(x))) \Psi(\phi^{-1}(x), \phi'(\phi^{-1}(x))^T \xi) \rangle \quad (12.35)$$

$$= \langle \mu_0, \det(\phi'(y)) \Psi(y, \phi'(y)^T \xi) \rangle, \quad (12.36)$$

$\forall \Psi \in \mathcal{C}^1$ , homogène de degré 0 en  $\xi$  à support en  $x$  assez petit pour que  $\phi$  y soit globalement inversible.



## 12.7 H-mesures et régularité

On rappelle un résultat de régularité dû à L. Hörmander cf[31].

**Proposition 12.10** *Soit  $L_1, \dots, L_n$  des opérateurs du premier ordre à coefficients réguliers et soit*

$$V = \{ u \in L^2(\Omega), \quad L_j u \in L^2(\Omega), \quad j = 1, \dots, n \}. \quad (12.37)$$

*On suppose que  $m$  commutateurs du type  $[L_j, L_k]$  suffisent à engendrer les dérivées partielles  $\frac{\partial}{\partial x_k}$ ,  $k = 1, \dots, N$ . Alors  $V \subset H_{loc}^s(\Omega)$  avec  $s = \frac{1}{m+1}$ .*

(i) PREMIER EXEMPLE Soit l'équation de Fokker-Plank (hypoelliptique):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - \Delta_v f = 0.$$

Avec les notations de ce paragraphe, l'espace  $V$  défini par (12.37) devient:

$$V = \{ f \in L^2(\Omega), \quad \frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \in L^2(\Omega), \quad \frac{\partial f}{\partial v_j} \in L^2(\Omega), \quad j = 1, \dots, N \}.$$

Comme

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial v_j} \right] = -\frac{\partial}{\partial x_j}$$

on en déduit que  $V \subset H_{loc}^{1/2}(\Omega)$ .

(ii) DEUXIÈME EXEMPLE Soit

$$V = \{ f \in L^2(\Omega), \quad \frac{\partial f}{\partial x} \in L^2(\Omega), \quad x^m \frac{\partial f}{\partial y} \in L^2(\Omega) \}.$$

On a

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x}, x^m \frac{\partial}{\partial y} \right] = m x^{m-1} \frac{\partial}{\partial y} \quad (12.38)$$

donc:  $V \subset H_{loc}^{1/(m+1)}(\Omega)$ .

(iii) TROISIÈME EXEMPLE Soit

$$V = \{ f \in L^2(\Omega), \quad \frac{\partial f}{\partial x} \in L^2(\Omega), \quad \varphi(x, y) \frac{\partial f}{\partial y} \in L^2(\Omega) \}.$$

Si  $\varphi$  n'a pas de zéro, alors:  $V \subset H_{loc}^1(\Omega)$ . Sinon: on suppose que  $\varphi(x_0) = 0$  et que  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$  n'a pas de zéro. Alors:  $V \subset H_{loc}^{1/2}(\Omega)$ .

(iv) COMPACTITÉ DANS  $L^2(\Omega)$  Soit  $f_n \rightharpoonup 0$  dans  $L^2(\Omega)$ ,  $\frac{\partial f_n}{\partial x}$ ,  $\varphi(x, y) \frac{\partial f_n}{\partial y}$  bornés dans  $L^2(\Omega)$ . La question est: est-ce que  $f_n \rightarrow 0$  dans  $L^2(\Omega)$ ? On suppose qu'après extraction, la suite  $f_n$  est associée à une H-mesure  $\mu$ . La question posée revient à demander si  $\mu = 0$ . Le principe de localisation entraîne que

$$\xi_1 \mu = 0, \quad \varphi(x_1, x_2) \xi_2 \mu = 0$$

d'où l'on déduit que le support de  $\mu$  est contenu dans l'ensemble des zéros de  $\varphi$ . Pour résoudre le problème, on utilise le principe de propagation, c'est-à-dire l'équation de transport dont  $\mu$  est solution pour en déduire une condition suffisante d'inclusion compacte (ou faible régularité) sous la forme: si on sait trouver une partie  $K^*$  de  $\Omega$  contenant le support  $K$  de  $\mu$  tel que  $K^* = \emptyset$ , alors  $\mu \equiv 0$  (et cela entraîne que l'inclusion  $V \subset L^2_{loc}$  est compacte). Plus précisément (Théorème 3.9 de [31]): on se donne  $p$  opérateurs du premier ordre, soit  $P^\alpha = \sum_{j=1}^N b_j^\alpha \frac{\partial}{\partial x_j}$ ,  $\alpha = 1, \dots, p$ ,  $b_j^\alpha \in C^1(\Omega)$ , et on note  $V$  l'espace des fonctions  $u$  de  $L^2(\Omega)$  telles que  $P^\alpha u \in L^2(\Omega)$ ,  $\forall \alpha = 1, \dots, p$ . Soit  $K^*$  le plus grand fermé contenu dans l'intersection des zéros de tous les polynômes caractéristiques  $P^\alpha(x, \xi)$  ayant la propriété supplémentaire: pour toute application  $\Phi$  de classe  $C^1$  nulle sur  $K^*$ , le commutateur  $\{\Phi, P^\alpha\}$  est aussi nul sur  $K^*$ . La condition suffisante cherchée dit que si  $K^* = \emptyset$  alors l'inclusion  $V \subset L^2_{loc}$  est compacte.

Revenant à l'exemple traité ci-dessus (dû à [31]), on peut affirmer en particulier que si  $\varphi$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ ,  $\dots$ ,  $\frac{\partial^m \varphi}{\partial x^m}$  ne s'annulent pas simultanément, alors  $V \subset H^s_{loc}(\Omega)$  avec  $s = \frac{1}{m+1}$ . Si en outre  $\varphi$  est de classe  $C^\infty$ , on note  $K_0$  l'ensemble des points où  $\varphi$  ainsi que toutes ses dérivées par rapport à  $x$  s'annulent. Si  $K_0 = \emptyset$ , alors  $V \subset L^2_{loc}$ .

## 12.8 Bornes en homogénéisation

On revient au problème des bornes sur les coefficients effectifs des matériaux en utilisant la théorie des H-mesures. Reprenant la démarche adoptée dans le cadre de la H-convergence, on cherche à estimer une quantité  $F(E^{\textcircled{n}}, D^{\textcircled{n}}, A^{\textcircled{n}})$  où  $F(E, D, A)$  est une fonction polynôme de degré  $\leq 2$  et où  $E^{\textcircled{n}} = \text{grad}(u^{\textcircled{n}})$ ,  $D^{\textcircled{n}} = A^{\textcircled{n}} E^{\textcircled{n}}$ . Plus précisément, on compare les bornes inférieure et supérieure de la limite faible\* de  $F(E^{\textcircled{n}}, D^{\textcircled{n}}, A^{\textcircled{n}})$  pour obtenir des bornes effectives sur la matrice  $A^{eff}$  en fonction de la H-mesure et de la mesure de Young associées à une suite extraite de  $A^{\textcircled{n}}$ . Il n'existe pas de relation simple permettant de passer de l'une à l'autre et elles jouent de fait des rôles complémentaires. Dans un premier temps, on estime la quantité  $F(E^{\textcircled{n}}, D^{\textcircled{n}}, A^{\textcircled{n}})$  en fonction de la mesure de Young de la suite  $A^{\textcircled{n}}$  grâce à la contrainte

$$E^{\textcircled{n}} \rightharpoonup E^\infty \quad \text{et} \quad A^{\textcircled{n}} E^{\textcircled{n}} \rightharpoonup A^{eff} E^\infty.$$

Par exemple,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(E^{\textcircled{n}}, D^{\textcircled{n}}, A^{\textcircled{n}}) \geq \sup_{e, e'} \left( (E^\infty \cdot e) + (A^{eff} E^\infty \cdot e') - \langle \nu, G^*(e + A^T e', A) \rangle \right)$$

où  $G^*(E^*, A)$  est la fonction conjuguée convexe de  $G(E, A) = F(E, A E, A)$  définie par

$$G^*(E^*, A) = \sup_E \{ (E \cdot E^*) - G(E, A) \}$$

et où  $\nu$  est la mesure de Young de la suite  $A^{\textcircled{n}}$ .

Dans un deuxième temps, on utilise la théorie de la H-mesure pour calculer la limite faible de  $F(E^{\textcircled{n}}, D^{\textcircled{n}}, A^{\textcircled{n}})$  en utilisant

$$E^{\textcircled{n}} \rightharpoonup E^\infty, \quad D^{\textcircled{n}} \rightharpoonup D^\infty, \quad A^{\textcircled{n}} \rightharpoonup A^\infty$$

en fonction de la H- mesure de

$$(E^{\textcircled{n}} - E^\infty, D^{\textcircled{n}} - D^\infty, A^{\textcircled{n}} - A^\infty).$$

Le résultat obtenu fournit une borne en fonction de la H-mesure associée à  $A^{\textcircled{n}} - A^\infty$ . Par exemple: si  $M$  est une matrice symétrique telle que  $A^{\textcircled{n}} \geq M > 0$  et si toutes les matrices considérées sont symétriques, on trouve que

$$(A^{eff} - M)^{-1} \leq (A^\infty - M)^{-1} + (A^\infty - M)^{-1} R(M) (A^\infty - M)^{-1}$$

où  $R(M)$  est définie à partir de la H-mesure associée à une sous-suite de  $A^{\textcircled{n}} - A^\infty$  par (Corollaire 5.4 de [31]) :

$$\int_{\Omega} R_{ij}(M) \phi \, dx = \sum_{k,l=1}^N \langle \mu^{ik,jl}, \frac{\xi_k \xi_l}{(M \xi, \xi)} \phi \rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega).$$

## 12.9 Retour sur l'homogénéisation des faibles amplitudes.

Le problème des bornes étudié précédemment incite naturellement à établir une relation entre H-mesures et mesures de Young. En particulier, L. Tartar et F. Murat ont utilisé des paires constituées d'une mesure de Young et d'une H-mesure associées à une suite  $U^{\textcircled{n}}$  vérifiant des contraintes du type  $U^{\textcircled{n}} \in K$ . Le problème de l'homogénéisation de faible amplitude pour des matériaux en tranches est significatif de ce genre de problème. Plus précisément, le résultat de base s'énonce:

**Lemme 12.11** *Le mélange constitué de deux matériaux de matrices resp.  $A$ ,  $B$  en proportions  $\theta$  et  $1 - \theta$  resp. disposés en tranches perpendiculaires à un vecteur  $e$  donné, admet pour matrice effective:*

$$A^{eff} = \theta A + (1 - \theta) B + \tag{12.39}$$

$$- \theta (1 - \theta) (B - A) \frac{e \otimes e}{(1 - \theta) (A e \cdot e) + \theta (B e \cdot e)} (B - A). \tag{12.40}$$

**Preuve.** Dans l'approximation de l'homogénéisation de faible amplitude, on se donne l' Ansatz:

$$A = A^\infty + \gamma M_A + \gamma^2 N_A + \mathcal{O}(\gamma^3); \quad (12.41)$$

$$B = A^\infty + \gamma M_B + \gamma^2 N_B + \mathcal{O}(\gamma^3); \quad (12.42)$$

Alors le mélange de ces deux matériaux en proportion  $\theta$  et  $1-\theta$  admet pour matrice effective:

$$A^{eff} = A^\infty + \gamma(\theta M_A + (1-\theta) M_B) + \quad (12.43)$$

$$+ \gamma^2(\theta N_A + (1-\theta) N_B) + \quad (12.44)$$

$$- \theta(1-\theta)(M_B - M_A) \frac{e \otimes e}{(A^\infty e \cdot e)} (M_B - M_A) \quad (12.45)$$

$$+ \mathcal{O}(\gamma^3). \quad (12.46)$$

La correction en  $\gamma^2$ , c'est-à-dire le terme supplémentaire

$$-\gamma^2 \theta(1-\theta)(M_B - M_A) \frac{e \otimes e}{(A^\infty e \cdot e)} (M_B - M_A)$$

est analogue au terme correcteur donné par la théorie de la H-mesure sous la forme intégrale:

$$\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^{N-1}} \frac{\xi \otimes \xi}{(A^\infty \xi \cdot \xi)} d\mu(x, \xi)$$

où  $\mu$  est la H-mesure associée à la suite  $\chi^{(\mathbb{n})} - \theta$  pour des fonctions caractéristiques  $\chi^{(\mathbb{n})} \in \{0, 1\}$ ,  $\chi^{(\mathbb{n})} \rightharpoonup \theta$  dans  $L^\infty(\Omega)$  faible \*. On peut alors identifier en partie la H-mesure  $\mu$ . En effet: le terme  $\theta(1-\theta)$  est la masse totale de  $\mu$  sur la sphère unité  $\mathbb{S}^{N-1}$  et on a

$$\int_\xi d\mu(x, \xi) = \lim (\chi^{(\mathbb{n})} - \theta)^2 = \theta(1-\theta)$$

Il n'y a pas d'autre contrainte: si  $0 \leq \theta \leq 1$  p.p. et si  $\mu(x, \xi) \geq 0$ , avec  $\int_\xi d\mu(x, \xi) = \theta(1-\theta)$ , alors il existe une suite  $\chi^{(\mathbb{n})}$  de fonctions caractéristiques telles que:  $\chi^{(\mathbb{n})} \rightharpoonup \theta$  et la suite  $\chi^{(\mathbb{n})}$  admette  $\mu$  pour H-mesure. ■

**Remarque 12.12** La H-mesure  $\mu$  étant invariante par la transformation  $\xi \mapsto -\xi$ , on ne peut identifier que sa partie symétrique. On évite ce problème en définissant  $\mu$  comme une mesure hermitienne  $\geq 0$ .

**Remarque 12.13** On ne sait pas mélanger trois matériaux. En effet: cela revient à considérer des suites  $\chi^{(\mathbb{n})}$ ,  $\psi^{(\mathbb{n})}$ ,  $1 - \chi^{(\mathbb{n})} - \psi^{(\mathbb{n})}$  de fonctions caractéristiques vérifiant la contrainte supplémentaire  $\chi^{(\mathbb{n})} \psi^{(\mathbb{n})} = 0$  et on ne sait pas caractériser l'ensemble des H-mesures correspondantes.

## 13 VARIANTES DES H-MESURES.

### 13.1 Les mesures de Wigner

Une amélioration immédiate de la mesure de Young consiste à la décomposer pour lui ajouter la variable duale  $\xi$  utile dans les problèmes de propagation. Ce point de vue a été abandonné par L. Tartar au profit de la H-mesure.

Toutefois, G. Papanicolaou a proposé la transformation de Wigner dont l'intérêt est de voir à la fois  $u$  et sa transformée de Fourier. En effet: pour tout  $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ , la transformée de Wigner de  $u$  est définie par

$$\forall u \in L^2(\mathbb{R}^N), \quad (13.1)$$

$$W_u(x, \xi) = \int_{\mathbb{R}^N} u\left(x + \frac{y}{2}\right) \overline{u\left(x - \frac{y}{2}\right)} e^{-2i\pi(y \cdot \xi)} dy \quad (13.2)$$

$$\in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N). \quad (13.3)$$

Sous des hypothèses supplémentaires de régularité sur  $u$ , on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} W_u(x, \xi) d\xi = |\mathcal{F}u(\xi)|^2, \quad (13.4)$$

$$\text{si } u \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N); \quad (13.5)$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} W_u(x, \xi) d\xi = |u(\xi)|^2, \quad (13.6)$$

$$\text{si } u \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{F}L^1(\mathbb{R}^N); \quad (13.7)$$

Ce point de vue a permis à G. Papanicolaou, J. Keller, L. Ryzhik d'obtenir des résultats de propagation d'ondes dans des milieux aléatoires.

### 13.2 Les mesures micro-locales

Une variante de la H-mesure a été étudiée par P-L. Lions et T. Paul qui ont montré que la suite

$$W^{(\mathbb{N})}(x, \xi) = \int_{\mathbb{R}^N} u^{(\mathbb{N})}\left(x + \frac{\varepsilon_n y}{2}\right) \overline{u^{(\mathbb{N})}\left(x - \frac{\varepsilon_n y}{2}\right)} e^{-2i\pi(y \cdot \xi)} dy$$

converge au sens des mesures vagues vers la mesure semi-classique introduite par P. Gérard. Paradoxalement, cette mesure n'utilise qu'une seule échelle caractéristique (le paramètre  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ ) alors que l'expérience tend à montrer que l'on devrait chercher un outil permettant d'identifier les longueurs d'échelles caractéristiques d'un problème donné, d'étudier leurs corrélations et d'établir une hiérarchie des oscillations qui interagissent.

Enfin, la théorie générale de l'homogénéisation (au sens de S. Spagnolo) n'utilise pas de longueur caractéristique. Par exemple, elle considère des problèmes multi-échelles où les coefficients sont de la forme  $a(x, \frac{x}{\varepsilon})$ , (resp.  $a(x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\delta})$ )  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  (resp.

$\varepsilon \rightarrow 0^+$ ,  $\delta = \varepsilon^m \rightarrow 0^+$ ) avec  $a(x, y)$  périodique en  $y$  (resp.  $a(x, y, z)$  périodique en  $y, z$ ). Dans ces problèmes, on utilise une (resp. deux) échelle(s) caractéristique(s). Or, les problèmes réels font intervenir non pas une ou deux longueurs caractéristiques, mais une infinité: c'est un aspect de la turbulence.

**Remarque 13.1** *La méthode d'homogénéisation traitée dans ce Cours est beaucoup plus générale que ce qu'ont développé J-L. Lions et O. Oleinik qui ne s'intéressaient qu'à l'homogénéisation périodique. Par la suite, O. Oleinik a étudié le cas général, indépendamment de ce qui est vu ici.*

### 13.3 Propagation et interactions d'oscillations

On s'intéresse particulièrement aux systèmes hyperboliques semi-linéaires à une dimension d'espace, pour fixer les idées, soit:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = a(u, v), \quad (13.8)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} = b(u, v), \quad (13.9)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad (13.10)$$

où  $a$  et  $b$  sont localement lipschitziennes.

On se restreint au cas  $N = 1$  d'une seule variable d'espace. On se propose de décrire les oscillations d'une suite  $(u^{(\mathbb{N})}, v^{(\mathbb{N})})$  de solutions à partir des oscillations d'une suite de données initiales. Autrement dit, on veut décrire les mesures de Young des solutions  $(u^{(\mathbb{N})}, v^{(\mathbb{N})})$  connaissant les mesures de Young des données initiales. Un exemple type (celui qui a d'abord été étudié par L. Tartar) est celui des équations de Carleman où:

$$a(u, v) = v^2 - u^2, \quad b(u, v) = u^2 - v^2.$$

La théorie montre que pour des données initiales  $(u_0, v_0)$  positives, vérifiant des estimations  $L^\infty$  du type:  $0 \leq u_0, v_0 \leq M$ , on a encore  $0 \leq u, v \leq M$ ,  $0 \leq t < +\infty$ .

Supposons qu'il existe une suite uniformément bornée de solutions  $(u^{(\mathbb{N})}, v^{(\mathbb{N})})$  telles que:

$$\frac{\partial u^{(\mathbb{N})}}{\partial t} + \frac{\partial u^{(\mathbb{N})}}{\partial x} = (v^{(\mathbb{N})})^2 - (u^{(\mathbb{N})})^2, \quad (13.11)$$

$$\frac{\partial v^{(\mathbb{N})}}{\partial t} - \frac{\partial v^{(\mathbb{N})}}{\partial x} = (u^{(\mathbb{N})})^2 - (v^{(\mathbb{N})})^2, \quad \mathbb{R} \times (0, T), \quad (13.12)$$

$$u^{(\mathbb{N})}(x, 0) = u_0^{(\mathbb{N})}(x), \quad v^{(\mathbb{N})}(x, 0) = v_0^{(\mathbb{N})}(x), \quad \mathbb{R}. \quad (13.13)$$

Le problème devient: trouver le plus possible d'informations sur l'évolution des mesures de Young associées à la suite  $(u^{(\mathbb{N})}, v^{(\mathbb{N})})$  après extraction sur  $\mathbb{R} \times (0, T)$  connaissant les mesures de Young d'une suite  $(u_0^{(\mathbb{N})}, v_0^{(\mathbb{N})})$  de données initiales sur  $\mathbb{R}$ .

La remarque essentielle est que:

$$\frac{\partial(u^{\circledast})^k}{\partial t} + \frac{\partial(u^{\circledast})^k}{\partial x} = k(u^{\circledast})^{k-1}((v^{\circledast})^2 - (u^{\circledast})^2), \quad (13.14)$$

$$\frac{\partial(v^{\circledast})^k}{\partial t} - \frac{\partial(v^{\circledast})^k}{\partial x} = k(v^{\circledast})^{k-1}((u^{\circledast})^2 - (v^{\circledast})^2), \quad \mathbb{R} \times (0, T), \quad (13.15)$$

de sorte que, après extraction d'une sous-suite encore notée  $\circledast$  vérifiant  $0 \leq u^{\circledast}, v^{\circledast} \leq M, 0 \leq t < +\infty$ , on ait:

$$(u^{\circledast})^k \rightharpoonup U_k \quad L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T)) \quad \text{faible} \quad *, \quad (13.16)$$

$$(v^{\circledast})^k \rightharpoonup V_k \quad L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T)) \quad \text{faible} \quad *, \quad (13.17)$$

$$(u_0^{\circledast})^k \rightharpoonup U_k^0 \quad L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T)) \quad \text{faible} \quad *, \quad (13.18)$$

$$(v_0^{\circledast})^k \rightharpoonup V_k^0 \quad L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T)) \quad \text{faible} \quad *. \quad (13.19)$$

Le Lemme Divergence-Rotationnel entraîne que:

$$(u^{\circledast})^k (v^{\circledast})^\ell \rightharpoonup U_k V_\ell \quad L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T)) \quad \text{faible} \quad *. \quad (13.20)$$

Evidemment, le fait de travailler avec une seule variable d'espace est essentiel ici. Si  $(u^{\circledast}, v^{\circledast})$  est associée à une mesure de Young  $\nu$ , (13.20) signifie que pour presque tout  $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T)$ , la mesure de probabilité  $\nu_{x,t}$  est le produit tensoriel de ses projections suivant les axes des coordonnées. Après passage à la limite dans le système (13.14)-(13.15), on trouve

$$\frac{\partial U_k}{\partial t} + \frac{\partial U_k}{\partial x} = \int_{\mathbb{R} \times (0, T)} k(u^{\circledast})^{k-1}((v^{\circledast})^2 - (u^{\circledast})^2) d\nu_{x,t}(u, v), \quad (13.21)$$

$$\frac{\partial V_k}{\partial t} - \frac{\partial V_k}{\partial x} = \int_{\mathbb{R} \times (0, T)} k(v^{\circledast})^{k-1}((u^{\circledast})^2 - (v^{\circledast})^2) d\nu_{x,t}(u, v), \quad \mathbb{R} \times (0, T), \quad (13.22)$$

$$U_k(x, 0) = U_k^0(x), \quad V_k(x, 0) = V_k^0(x), \quad \mathbb{R}, \quad k \geq 1. \quad (13.23)$$

La mesure de Young  $\nu_{x,t}$  est ici un produit tensoriel (ce n'est plus vrai dans le cas de systèmes à  $p$  équations,  $p > 2$ ): soit  $\nu_{x,t} = \nu_{x,t}^1 \otimes \nu_{x,t}^2$ , p.p. en  $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T)$  où  $\nu_{x,t}^1$  (resp.  $\nu_{x,t}^2$ ) est une mesure de probabilité en  $u$  (resp. en  $v$ ). De plus,  $\nu_{x,t}^1$  et  $\nu_{x,t}^2$  sont caractérisées par leurs moments:

$$U_k(x, t) = \int u^k d\nu_{x,t}^1(u), \quad \text{p.p. en } (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T), \quad (13.24)$$

$$V_k(x, t) = \int v^k d\nu_{x,t}^1(v), \quad \text{p.p. en } (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T), \quad (13.25)$$

de sorte que (13.21)-(13.23), qui s'écrit encore:

$$\frac{\partial U_k}{\partial t} + \frac{\partial U_k}{\partial x} + k U_{k+1} - k U_{k-1} V_2 = 0 \quad (13.26)$$

$$\frac{\partial V_k}{\partial t} - \frac{\partial V_k}{\partial x} - \ell U_2 V_{\ell-1} + \ell U_{\ell+1} = 0 \quad (13.27)$$

est aussi une équation d'évolution implicite pour les mesures de Young  $\nu_{x,t}$ .

On considère le cas particulier de conditions initiales à modulation périodique, c'est-à-dire que l'on choisit:

$$u^{\textcircled{n}}(x, 0) = u_0^{\textcircled{n}}(x) = \alpha\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right), \quad (13.28)$$

$$v^{\textcircled{n}}(x, 0) = v_0^{\textcircled{n}}(x) = \beta\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right), \quad (13.29)$$

avec  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ ,  $\alpha(x, y)$ ,  $\beta(x, y)$  bornées et suffisamment régulières, périodiques de période 1 en la variable  $y$ , de sorte que

$$u_0^{\textcircled{n}} \rightharpoonup \int_0^1 \alpha(x, y) dy, \quad (13.30)$$

$$v_0^{\textcircled{n}} \rightharpoonup \int_0^1 \beta(x, y) dy, \quad L^\infty(\mathbb{R}) \text{ faible } * \quad (13.31)$$

On a le résultat suivant pour la suite  $(u^{\textcircled{n}}, v^{\textcircled{n}})$  des solutions:

**Proposition 13.2** *Soit le choix (13.28)-(13.31) des données initiales. On suppose que la suite  $(u^{\textcircled{n}}, v^{\textcircled{n}})$  des solutions est uniformément bornée dans  $\mathbb{R} \times (0, T)$ . Alors, il existe des fonctions  $A(x, t, y)$ ,  $B(x, t, y)$ , périodiques de période 1 en la variable  $y$  telles que*

$$u^{\textcircled{n}} - A\left(x, t, \frac{x-t}{\varepsilon_n}\right) \rightarrow 0 \quad L^r_{loc}(\mathbb{R} \times (0, T)) \text{ fort}, \quad (13.32)$$

$$v^{\textcircled{n}} - B\left(x, t, \frac{x-t}{\varepsilon_n}\right) \rightarrow 0 \quad L^r_{loc}(\mathbb{R} \times (0, T)) \text{ fort}, \quad \forall r < +\infty. \quad (13.33)$$

De plus, les fonctions  $A$  et  $B$  sont solutions du système suivant sur  $\mathbb{R} \times (0, T) \times (0, 1)$ :

$$\frac{\partial A}{\partial t}(x, t, y) + \frac{\partial A}{\partial x}(x, t, y) + A^2(x, t, y) - \int_0^1 B(x, t, z) dz = 0, \quad (13.34)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t}(x, t, y) - \frac{\partial B}{\partial x}(x, t, y) - \int_0^1 A^2(x, t, z) dz + B(x, t, y) = 0, \quad (13.35)$$

$$B(x, 0, y) = \beta(x, y) \quad \text{dans } \mathbb{R} \times (0, 1). \quad (13.36)$$

**Remarque 13.3** *On obtient ainsi une caractérisation de la mesure de Young associée à la suite de solutions  $(u^{\textcircled{n}}, v^{\textcircled{n}})$ . Plus précisément: pour toute fonction  $F$  continue  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,*

$$F(u^{\textcircled{n}}, v^{\textcircled{n}}) \rightharpoonup l_F \quad \text{au sens des mesures vagues}$$

avec

$$l_F(x, t) = \int_0^1 \int_0^1 F(A(x, t, y+z), B(x, t, y-z)) dy dz.$$



Ainsi, dans le cas du système de Carlemann, on peut décrire les mesures de Young associées à une suite  $(u^{(\mathbb{N})}, v^{(\mathbb{N})})$  de solutions connaissant les mesures de Young d'une suite  $(u_0^{(\mathbb{N})}, v_0^{(\mathbb{N})})$  de données initiales. Dans le cas du système de Broadwell, les résultats sont seulement partiels. Plus précisément, soit  $(u^{(\mathbb{N})}, v^{(\mathbb{N})}, w^{(\mathbb{N})})$  une suite de solutions du système de Broadwell:

$$\frac{\partial u^{(\mathbb{N})}}{\partial t} + \frac{\partial u^{(\mathbb{N})}}{\partial x} + u^{(\mathbb{N})} v^{(\mathbb{N})} - (w^{(\mathbb{N})})^2 = 0, \quad (13.37)$$

$$\frac{\partial v^{(\mathbb{N})}}{\partial t} - \frac{\partial v^{(\mathbb{N})}}{\partial x} + u^{(\mathbb{N})} v^{(\mathbb{N})} - (w^{(\mathbb{N})})^2 = 0, \quad (13.38)$$

$$\frac{\partial w^{(\mathbb{N})}}{\partial t} - u^{(\mathbb{N})} v^{(\mathbb{N})} + (w^{(\mathbb{N})})^2 = 0, \quad (13.39)$$

$$u^{(\mathbb{N})}(x, 0) = u_0^{(\mathbb{N})}(x), \quad v^{(\mathbb{N})}(x, 0) = v_0^{(\mathbb{N})}(x), \quad w^{(\mathbb{N})}(x, 0) = w_0^{(\mathbb{N})}(x), \quad (13.40)$$

On a encore:

$$\frac{\partial (u^{(\mathbb{N})})^k}{\partial t} + \frac{\partial (u^{(\mathbb{N})})^k}{\partial x} + k (u^{(\mathbb{N})})^{k-1} (u^{(\mathbb{N})} v^{(\mathbb{N})} - (w^{(\mathbb{N})})^2) = 0, \quad (13.41)$$

$$\frac{\partial (v^{(\mathbb{N})})^k}{\partial t} - \frac{\partial (v^{(\mathbb{N})})^k}{\partial x} + k (v^{(\mathbb{N})})^{k-1} (u^{(\mathbb{N})} v^{(\mathbb{N})} - (w^{(\mathbb{N})})^2) = 0, \quad (13.42)$$

$$\frac{\partial w^{(\mathbb{N})}}{\partial t} - k (w^{(\mathbb{N})})^{k-1} (u^{(\mathbb{N})} v^{(\mathbb{N})} - (w^{(\mathbb{N})})^2) = 0, \quad (13.43)$$

$$u^{(\mathbb{N})}(x, 0) = u_0^{(\mathbb{N})}(x), \quad v^{(\mathbb{N})}(x, 0) = v_0^{(\mathbb{N})}(x), \quad w^{(\mathbb{N})}(x, 0) = w_0^{(\mathbb{N})}(x), \quad (13.44)$$

de sorte que le Lemme Divergence-Rotationnel s'applique pour donner: si

$$(u^{(\mathbb{N})})^k \rightharpoonup U_k \quad L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T)) \quad \text{faible } *, \quad (13.45)$$

$$(v^{(\mathbb{N})})^k \rightharpoonup V_k \quad L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T)) \quad \text{faible } *, \quad (13.46)$$

$$(w^{(\mathbb{N})})^k \rightharpoonup W_k \quad L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T)) \quad \text{faible } *, \quad (13.47)$$

alors

$$(u^{(\mathbb{N})})^k (v^{(\mathbb{N})})^\ell \rightharpoonup U_k V_\ell \quad L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T)) \quad \text{faible } *, \quad (13.48)$$

$$(v^{(\mathbb{N})})^k (w^{(\mathbb{N})})^\ell \rightharpoonup V_k W_\ell \quad L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T)) \quad \text{faible } *, \quad (13.49)$$

$$(w^{(\mathbb{N})})^k (u^{(\mathbb{N})})^\ell \rightharpoonup W_k U_\ell \quad L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T)) \quad \text{faible } *. \quad (13.50)$$

Par contre, la limite faible de  $u^{(\mathbb{N})} v^{(\mathbb{N})} w^{(\mathbb{N})}$  n'est pas connue. Cela signifie que la mesure de Young  $\nu_{x,t}$  associée à  $(u^{(\mathbb{N})}, v^{(\mathbb{N})}, w^{(\mathbb{N})})$  après extraction n'est plus un produit tensoriel et que l'on doit tenir compte de corrélations à longue distance.

Le cas particulier de données initiales à modulations périodiques est significatif. En effet: si

$$u^{(\mathbb{N})}(x, 0) = a(x, \frac{x}{\varepsilon_n}), \quad (13.51)$$

$$v^{(\mathbb{N})}(x, 0) = b(x, \frac{x}{\varepsilon_n}), \quad (13.52)$$

$$w^{(\mathbb{N})}(x, 0) = c(x, \frac{x}{\varepsilon_n}), \quad (13.53)$$

$$\varepsilon_n \rightarrow 0, \quad (13.54)$$

avec  $a(x, t, y)$ ,  $b(x, t, y)$ ,  $c(x, t, y)$  régulières, périodiques en  $y$  de période 1, on a la

**Proposition 13.4** *Soit  $(u^{(\mathbb{N})}, v^{(\mathbb{N})}, w^{(\mathbb{N})})$  une suite de solutions uniformément bornées dans  $\mathbb{R} \times (0, T)$  du système de Broadwell associées aux données initiales (13.51)-(13.54). Alors, il existe des fonctions  $A(x, t, y)$ ,  $B(x, t, y)$ ,  $C(x, t, y)$  périodiques en la variable  $y$ , de période 1, telles que:*

$$u^{(\mathbb{N})} - A(x, t, \frac{x}{\varepsilon_n}) \rightarrow 0 \quad L_{loc}^r(\mathbb{R} \times (0, T)) \text{ fort} \quad , \quad (13.55)$$

$$v^{(\mathbb{N})} - B(x, t, \frac{x}{\varepsilon_n}) \rightarrow 0 \quad L_{loc}^r(\mathbb{R} \times (0, T)) \text{ fort} \quad , \quad (13.56)$$

$$w^{(\mathbb{N})} - C(x, t, \frac{x}{\varepsilon_n}) \rightarrow 0 \quad L_{loc}^r(\mathbb{R} \times (0, T)) \text{ fort} \quad , \forall r < +\infty. \quad (13.57)$$

De plus, les fonctions  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sont solutions de

$$\frac{\partial A}{\partial t}(x, t, y) + \frac{\partial A}{\partial x}(x, t, y) + \quad (13.58)$$

$$+A(x, t, y) \int_0^1 B(x, t, z) dz - \int_0^1 C^2(x, t, z) dz = 0, \quad (13.59)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t}(x, t, y) - \frac{\partial B}{\partial x}(x, t, y) + \quad (13.60)$$

$$+B(x, t, y) \int_0^1 A(x, t, z) dz - \int_0^1 C^2(x, t, z) dz = 0, \quad (13.61)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t}(x, t, y) - \int_0^1 A(x, t, y-z) B(x, t, y+z) dz + \quad (13.62)$$

$$+C^2(x, t, y) = 0, \quad (13.63)$$

$$A(x, 0, y) = a(x, y), \quad B(x, 0, y) = b(x, y), \quad C(x, 0, y) = c(x, y), \quad (13.64)$$

**Remarque 13.5** *La mesure de Young associée à la suite  $(u^{(\mathbb{N})}, v^{(\mathbb{N})}, w^{(\mathbb{N})})$  de solutions du système de Broadwell après extraction est donnée par:*

$$F(u^{(\mathbb{N})}, v^{(\mathbb{N})}, w^{(\mathbb{N})}) \rightharpoonup l_F \quad \text{au sens des mesures vagues}, \quad (13.65)$$

$$\text{où: } l_F(x, t) = \int_0^1 \int_0^1 F(A(x, t, y+z), B(x, t, y-z), C(x, t, y)) dy dz \quad (13.66)$$

$$\forall F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue.} \quad (13.67)$$

On ne peut pas déduire les mesures de Young associées à la suite de solutions  $(u^{(n)}, v^{(n)}, w^{(n)})$  de la seule connaissance des mesures de Young associées à la suite des données initiales  $(u_0^{(n)}, v_0^{(n)}, w_0^{(n)})$  puisque les mesures de Young des données initiales ne sont pas modifiées par une transformation de  $A, B, C$  portant sur la variable  $y$  alors qu'une telle transformation modifie nécessairement la valeur de l'intégrale  $\int_0^1 A(x, t, y - z) B(x, t, y + z) dz$ . Autrement dit: des oscillations dues à des phénomènes de résonances et (ou) d'interactions rendent le problème très sensible aux variations subies très loin en arrière. Les mesures de Young ne sont pas un outil adapté à l'homogénéisation en général, sauf dans le cas particulier de milieux en tranches, car elles ne voient pas les effets non locaux.

### 13.4 Les mesures semi-classiques

Plusieurs auteurs (Eskin, Schnirelman, Colin de la Verdière) utilisent des mesures  $\mu(x, \xi)$  sur  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^{N-1}$ , où la variable duale  $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$  permet la localisation, dites "semi-classiques". Une idée du problème posé est donnée par l'étude des fonctions propres du Laplacien, soit:

$$-\Delta u_n = \lambda_n u_n, \quad \Omega, \quad (13.68)$$

$$u_n|_{\partial\Omega} = 0, \quad (13.69)$$

dans le cas particulier où  $\Omega$  est le rectangle  $\Omega = (0, L_1) \times (0, L_2)$ . Les solutions trouvées sont classiquement:  $u_{m,n} = \sin\left(\frac{\pi n x}{L_1}\right) \sin\left(\frac{\pi m y}{L_2}\right)$  lorsque  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m, n \rightarrow +\infty$ , et lorsque le rapport  $\frac{m}{n}$  tend vers une certaine limite dans  $\mathbb{R}$ . Quitte à réindexer, on peut toujours choisir la suite  $u_n$  de sorte que

$$\int_0^{L_1} \int_0^{L_2} u_n^2 dx dy = 1, \quad u_n \rightharpoonup 0 \quad \text{dans } L^2 \text{ faible.}$$

Pour un tel choix, la suite  $u_n$  ne converge pas fortement vers 0, à cause des oscillations. On peut avoir  $\lambda_n = \frac{1}{\varepsilon_n^2}$  avec  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ , et alors  $\varepsilon_n$  joue le rôle d'une longueur caractéristique pour le problème.

De telles longueurs caractéristiques interviennent directement dans la définition des mesures semi-classiques introduites par P. Gérard. Ces mesures sont donc inadaptées dans des problèmes tels que l'homogénéisation des faibles amplitudes où il n'y a pas de longueur caractéristique.

Les problèmes de propagation issus de l'équation des ondes ou de l'optique géométrique ne font pas intervenir de variable de fréquence, celle-ci étant infinie quand elle est évoquée, donc pas de phase non plus. Les deux variables temporelle  $t$  et spatiale  $x$  jouent donc le même rôle. Mais il existe d'autres problèmes où les variables  $t$  et  $x$  jouent des rôles distincts, comme par exemple l'équation de diffusion de la chaleur:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \Delta u = 0$$

dans laquelle  $k$  est un paramètre fixe. Si, pour toute direction  $x$ , on a la comparaison  $\frac{\partial}{\partial t} \sim \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ , alors l'équation est parabolique et il n'y a pas de propagation d'oscillations. Il en résulte un effet régularisant qui tue les oscillations engendrées par les conditions initiales. Cela est encore vrai pour l'équation avec second membre oscillant, soit:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \Delta u = f^{\textcircled{n}}(x, t).$$

Par contre, si le paramètre  $k$  est remplacé par  $\varepsilon_n \rightarrow 0^+$ , soit:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon_n \Delta u = 0, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0,$$

alors  $\varepsilon_n$  joue le rôle d'une longueur caractéristique et les mesures semi-classiques permettent d'étudier les oscillations. Un autre exemple type est celui de l'équation de Schrödinger:

$$i \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon_n \Delta u = 0, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0,$$

à laquelle on associe un groupe des solutions dans  $L^2$ . On montre alors que si la suite  $u_0^{\textcircled{n}}$  des condition initiales vérifie  $u_0^{\textcircled{n}} \rightarrow 0$  dans  $L^2$  faible, alors la suite des solutions  $u_n$  converge faiblement vers 0 en un sens plus faible que  $L^2$ , ce qui révèle encore la présence d'oscillations.

Soit maintenant le système

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a}{\varepsilon^2} (u - v) = 0, \quad (13.70)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{a}{\varepsilon^2} (u - v) = 0, \quad (13.71)$$

où  $a \geq 0$  est une fonction intervenant dans les problèmes d'absorption ou de scattering. Du principe de l'énergie:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u^2 - v^2}{2} \right) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2 - v^2}{2} \right) + \frac{a}{\varepsilon^2} |u - v|^2 = 0, \quad (13.72)$$

on déduit une estimation de la quantité  $\frac{u - v}{\varepsilon}$  dès que  $a \geq \alpha > 0$ . En général, la suite de solutions  $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$  ne converge pas au sens classique à cause des oscillations. Par exemple, si la suite des conditions initiales est fixe, soit  $(u(x, 0), v(x, 0))$ , alors on vérifie qu'à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , on a  $\frac{u^\varepsilon - v^\varepsilon}{\varepsilon} \rightarrow q$  et  $u^\varepsilon, v^\varepsilon$  convergent faiblement vers une limite commune  $u_*$  telle que

$$\frac{\partial(2u_*)}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \quad (13.73)$$

En outre:

$$\varepsilon \frac{\partial(u^\varepsilon - v^\varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(u^\varepsilon + v^\varepsilon)}{\partial x} + \frac{2a}{\varepsilon} (u^\varepsilon - v^\varepsilon) = 0. \quad (13.74)$$

entraîne que

$$\frac{\partial u_*}{\partial x} + a q = 0$$

d'où l'équation effective:

$$\frac{\partial u_*}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{a} \frac{\partial u_*}{\partial x} \right) = 0.$$

**Remarque 13.6** *La même remarque vaut pour l'équation de la lumière*

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} \omega \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{a}{\varepsilon^2} (f - \bar{f}) = 0$$

où  $f = f(x, t, \omega)$  est la densité de photons et où  $\bar{f}$  est la moyenne de  $f$ .

## 14 QUELQUES EXEMPLES DE TRAITEMENT DES OSCILLATIONS EN PHYSIQUE

### 14.1 Introduction

Les H-mesures fournissent au moins une explication rationnelle et mathématique à la question fondamentale des physiciens sur la dichotomie particules/ondes et en particulier pourquoi certaines particules ont un comportement ondulatoire. Du point de vue des H-mesures, il n'y a que des ondes décrites par des équations aux dérivées partielles dont les solutions oscillantes sont caractérisées par des H-mesures adéquates. Ces solutions oscillantes se propagent de sorte qu'à la limite des fréquences infinies, les H-mesures sont solutions d'équations différentielles ordinaires auxquelles on associe un hamiltonien qui peut s'interpréter en termes de particules. Mais il n'existe pas de théorie des équations semi-linéaires avec oscillations.

En optique géométrique classique, l'indice de réfraction est supposé indépendant de la fréquence. Aux hautes fréquences, la conjecture de J. Keller sur la théorie géométrique de la diffraction est un problème encore largement ouvert, (mal posé au voisinage des caustiques), bien que les mesures semi-classiques (G. Gérard, Leichtnam) aient permis d'obtenir des résultats partiels. La démarche de J. Keller consiste à calculer l'intégrale de  $|k|^{1/3}$  le long de géodésiques, la valeur particulière de l'exposant du nombre d'onde  $k$  étant liée aux propriétés de la fonction d'Airy. On peut s'attendre (L. Tartar) à ce qu'une mesure micro-locale permette de justifier la théorie de J. Keller, à condition d'introduire au moins une longueur caractéristique.

### 14.2 Le problème des corrélations

Plus généralement, le problème de l'existence d'une ou plusieurs longueurs caractéristiques est lié à la définition de fonctions de corrélations. Or, au-delà de deux corrélations, on ne sait pas construire de telles applications. En effet: si après extraction, on a  $u \stackrel{\text{①}}{\rightharpoonup} 0$  dans  $L^3_{loc}(\Omega)$  faible, alors il existe une suite extraite notée  $u_n$  telle que

$$u_n(x + \varepsilon_n y_1) u_n(x + \varepsilon_n y_2) u_n(x + \varepsilon_n y_3) \rightharpoonup \Gamma(x; y_1, y_2, y_3)$$

au sens des mesures vagues sur  $\Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$  avec  $\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \Gamma}{\partial y_j} = 0$ , c'est-à-dire que  $\Gamma(x; y_1 + h, y_2 + h, y_3 + h)$  ne dépend pas de  $h$ . Si en outre,  $u_n$  est solution de

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} - \varepsilon_n^2 \Delta u_n = 0, \quad \Omega \times (0, T)$$

alors, à la limite quand  $\varepsilon_n \rightarrow 0$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} - \sum_{i \neq j} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial y_i \partial y_j} = 0, \quad \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N.$$

Mais on ne sait pas construire l'analogie pour une mesure semi-classique.

### 14.3 Le problème des échelles caractéristiques

Du point de vue de l'approximation par les H-mesures ou une de leurs variantes, on voit que le choix d'une longueur caractéristique entraîne un peu plus de précision sur une partie de l'information transportée par les oscillations et les effets de concentration, et que dans le cas où il y a une seule échelle caractéristique, une mesure utilisant cette échelle semble bien adaptée. Mais dans les problèmes concrets, on a le choix entre plusieurs échelles caractéristiques, voire une infinité d'entre elles. De ce point de vue, l'exemple suivant construit par L. Tartar et P. Gérard est instructif.

Soit  $u_n(x) = \sqrt{n}$  si  $kn \leq n^2 x < kn + 1$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ ,  $u_n(x) = 0$  sinon. On vérifie immédiatement que:

$$\|u_n\|_{L^2(0,1)} \leq C, \quad (14.1)$$

$$u_n \rightharpoonup 0, \quad L^2(0,1) \text{ faible}, \quad (14.2)$$

$$|u_n|^2 \rightharpoonup 1 \quad \text{au sens des mesures vagues}, \quad (14.3)$$

et  $|u_n|^2$  ne converge pas dans  $L^2(0,1)$  faible. On remarque que cette suite admet deux échelles caractéristiques  $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$  et  $\varepsilon_n = \frac{1}{n^2}$ . D'où la question: décrire les mesures semi-classiques en fonction de l'échelle caractéristique retenue. Intuitivement, on s'attend à ce que les 5 cas suivants soient possibles.

1.  $\varepsilon_n \gg \frac{1}{n}$ : toute l'information part à l'infini;
2.  $\varepsilon_n \sim \frac{1}{n}$ : il existe une mesure semi-classique non nulle mais un peu d'information est perdue à l'infini;
3.  $\frac{1}{n^2} \ll \varepsilon_n \ll \frac{1}{n}$ : de l'information est perdue à l'origine et à l'infini;
4.  $\varepsilon_n \sim \frac{1}{n^2}$ : il existe une mesure semi-classique non nulle mais de l'information est perdue à l'origine;
5.  $\varepsilon_n \ll \frac{1}{n^2}$ : toute l'information est perdue à l'origine;

Or le calcul effectif des diverses mesures semi-classiques ne fait apparaître que trois cas:

1.  $\varepsilon_n \gg \frac{1}{n^2}$ , soit les trois premiers cas ci-dessus: toute l'information est perdue à l'origine;
2.  $\varepsilon_n \sim \frac{1}{n^2}$ , soit le quatrième cas: on trouve une mesure semi-classique sans perdre d'information à l'origine ou à l'infini;
3.  $\varepsilon_n \ll \frac{1}{n^2}$ , soit le cinquième cas: toute l'information est perdue à l'origine;

On en déduit que l'information correspondant à la plus grande échelle caractéristique semble avoir disparu, ce qui est étrange puisque  $u_n$  est périodique de période  $\frac{1}{n}$  sur  $(0, 1)$ . Comme on le voit sur cet exemple, l'intuition était bonne qui prédisait une échelle de longueur mise en évidence par la transformation de Fourier, mais au lieu d'apparaître à la distance  $n$  de l'origine comme attendue, elle est apparue à la distance  $n^2$  de l'origine, en même temps que l'information associée dans un premier

temps (par erreur) à l'échelle  $\frac{1}{n^2}$ . Bien sûr, on aurait pu s'y attendre puisqu'on reconnaît ici le phénomène des battements dus essentiellement à la formule

$$2 \sin(ax) \sin(bx) = \cos((a+b)x) + \cos((a-b)x).$$

Du point de vue des mathématiques, cela incite à chercher quelles échelles caractéristiques sont associées à un problème donné et comment elles interagissent, avant de construire une hiérarchie des oscillations interagissant à leur tour. D'ailleurs, on rejoint ici une quête des physiciens.

#### 14.4 Retour sur la théorie de la diffraction et commentaires

Les variantes des H-mesures utilisent une ou plusieurs longueurs caractéristiques. Une théorie géométrique de la diffraction initiée par J. Keller est un problème encore largement ouvert, même si P. Gérard, dans un article avec Leichtnam, a obtenu quelques résultats partiels grâce à sa théorie des mesures semi-classiques. Quant au travail de G. Lebeau, il a peu à voir avec celui de J. Keller (même si certains ont prétendu qu'il avait expliqué ce dernier.) En effet, G. Lebeau utilise la régularité micro-locale et les espaces de Gevrey  $G^3$ , ces derniers étant en particulier liés aux propriétés de la fonction d'Airy. Or, les H-mesures évitent le recours à la régularité micro-locale.

Les idées à retenir sont au nombre de trois.

(i) PREMIÈRE IDÉE Certains problèmes font naturellement apparaître une longueur caractéristique. C'est le cas en particulier des équations de diffusion avec un petit coefficient de diffusion et une donnée initiale du type  $e^{-\varepsilon(Dx \cdot x)}$ . L'idée consiste alors à introduire une H-mesure avec une variable supplémentaire. Plus précisément, si deux fonctions  $f, g$  sont périodiques de périodes 1 et  $\sqrt{2}$  resp., alors, à la limite quand  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ :

$$u_n := f\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right) g\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right) \rightharpoonup \int f dx \int g dx \quad L^2_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \quad \text{faible} \quad (14.4)$$

Si  $\int f = 0$ : alors la limite faible (14.4) est  $= 0$ , donc quitte à extraire, il existe une H-mesure  $\mu$  associée à la suite  $u_n$  vivant dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ . Mais, revenant à la définition, on voit que loin de  $\{x = 0\}$ , cette mesure est inutile. On introduit plutôt une variable supplémentaire  $y$  et on pose:

$$u_n(x, y) = f\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right) \sin\left(\frac{y}{\varepsilon_n}\right), \quad (14.5)$$

$$v_n(x, y) = g\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right) \sin\left(\frac{y}{\varepsilon_n}\right), \quad (14.6)$$

et on considère la H-mesure du couple  $(u_n, v_n)$ , soit

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu^{11} & \mu^{12} \\ \mu^{21} & \mu^{22} \end{pmatrix}$$



qui vit sur le cercle unité  $\mathbb{S}^1$ . Par définition: le support de  $\mu^{11}$  (resp. de  $\mu^{12}$ ) est  $\subset \mathbb{S}^1$  dans les directions des coordonnées  $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$  (resp.  $(m, \frac{n}{\sqrt{2}})$ ,  $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ ). Mais  $\mu$  est hermitienne  $\geq 0$  par définition des H-mesures, donc sa trace  $\mu_* = \mu^{11} + \mu^{22}$  est une mesure de Radon  $\geq 0$  qui vérifie les hypothèses du théorème de représentation de Radon-Nikodym: il existe des fonctions  $\mu_*$ -mesurables  $f^{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ , telles que  $\mu^{ij} = f^{ij} \mu_*$  et la matrice  $f = (f^{ij})$  est hermitienne,  $\geq 0$   $\mu_*$  p.p. On a  $\det f = f^{11} f^{22} - |f^{12}|^2 \geq 0$   $\mu_*$  p.p., c'est-à-dire:  $|f^{12}|^2 \leq f^{11} f^{22}$   $\mu_*$  p.p. Or: si  $f^{22} = 0$   $\mu_*$  p.p., alors cela entraîne que  $f^{12} = f^{21} = 0$   $\mu_*$  p.p., c'est-à-dire  $\mu^{12} = \mu^{21} = 0$   $\mu_*$  p.p. et

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu^{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) DEUXIÈME IDÉE Soit  $u_n$  solution de

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} + \sum_{k=1}^N b_k \frac{\partial u_n}{\partial x_k} + c u_n \quad (14.7)$$

$$- \varepsilon_n^2 \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} (A_{ij} \frac{\partial u_n}{\partial x_j}) = 0, \quad \Omega \times (0, T). \quad (14.8)$$

où  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ . On suppose que:  $u_n \rightharpoonup u_\infty$  dans  $L_{loc}^2(\Omega \times \mathbb{R})$ . On considère une mesure semi-classique pour la longueur caractéristique  $\varepsilon_n$ , après extraction de  $u_n$ , définie par:

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega), \quad \forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N), \quad (14.9)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\mathcal{F}(\varphi u_n)(\xi)|^2 \psi(\varepsilon_n \xi) d\xi = \quad (14.10)$$

$$= \int \int_{\Omega \times \mathbb{R}^N} |\varphi(x)|^2 \psi(\xi) d\mu(x, \xi) = \quad (14.11)$$

$$= \langle \mu, |\varphi|^2 \otimes \psi \rangle. \quad (14.12)$$

Cette définition a deux défauts que l'on peut mettre en évidence si  $u_n$  est de la forme:

$$u_n(x) = f\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right) + g\left(\frac{x}{\delta_n}\right) + h\left(\frac{x}{\gamma_n}\right), \quad (14.13)$$

$$1 \gg \gamma_n \gg \varepsilon_n \gg \delta_n. \quad (14.14)$$

Comme  $\psi$  est continue en  $\xi = 0$ , les informations correspondant aux longueurs d'ondes  $\gamma_n$  telles que  $\varepsilon_n \ll \gamma_n \ll 1$ ,  $\gamma_n \rightarrow 0$ , sont mélangées dans toutes les directions, et comme  $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \psi = 0$ , les informations correspondant aux longueurs

d'ondes  $\delta_n$  telles que  $\delta_n \ll \varepsilon_n$  sont perdues. A cause du principe de localisation, les H-mesures n'utilisent pas de longueur caractéristique, au contraire des mesures semi-classiques. On a vu sur l'exemple précédent qu'il existe des situations où l'information

est perdue soit en l'origine soit à l'infini, de sorte que les H-mesures ne peuvent pas être déduites de la connaissance de toutes les mesures semi-classiques calculées pour toutes les longueurs caractéristiques  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ . Le même raisonnement vaut pour la suite  $u_n$  des solutions de

$$\varepsilon_n^2 \Delta u_n = u_n.$$

La mesure semi-classique  $\mu$  est naturellement associée à la longueur caractéristique  $\varepsilon_n$ , sinon on perd de l'information en 0 et à l'infini. Elle diffère des H-mesures associées à la suite  $u_n$  puisqu'elles ne privilégient aucune longueur caractéristique.

Pour se persuader tout à fait de la différence entre mesures semi-classiques et H-mesures, on peut encore faire l'observation suivante. Soit  $a = a(\xi)$ ,  $b = b(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ , uniformément continues. On considère l'opérateur  $P_a^{\textcircled{n}}$  :  $a \mapsto \mathcal{F}^{-1}(a(\varepsilon_n \xi) \mathcal{F})$ , ainsi que l'opérateur  $M_b$  de multiplication par  $b$  déjà introduit. Pour définir la mesure semi-classique associée à la longueur  $\varepsilon_n$ , on a besoin de la propriété

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|[P_a^{\textcircled{n}}, M_b]\| = 0$$

alors que la compacité de  $[P_a^{\textcircled{n}}, M_b]$  suffit à définir la H-mesure correspondante.

(iii) TROISIÈME IDÉE Soit  $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$  solution de l'équation de Schrödinger:  $i u_t - \Delta u = 0$ . La transformée de Wigner est définie par

$$W_u \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N), \quad (14.15)$$

$$W_u(x, \xi) = \int_{\Omega} u\left(x + \frac{y}{2}\right) \overline{u\left(x - \frac{y}{2}\right)} e^{-2i\pi(y \cdot \xi)} dy \quad (14.16)$$

Alors  $W_u$  est solution de l'équation de transport

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \xi \frac{\partial W}{\partial x} = 0.$$

Dès lors, il suffit d'avoir  $W \geq 0$  pour interpréter cette quantité comme une densité de particules de vitesse  $\xi$ . Mais on a seulement:  $W_u * e^{-|\xi|^2} \geq 0$  (généralement attribué à Wigner). A partir de cette observation, P-L. Lions et T. Paul ont considéré la suite

$$W_n = \int_{\mathbb{R}^N} u_n\left(x + \frac{\varepsilon_n y}{2}\right) \overline{u_n\left(x - \frac{\varepsilon_n y}{2}\right)} e^{-2i\pi(y \cdot \xi)} dy$$

pour laquelle ils ont montré que:  $W_n \rightharpoonup \mu \geq 0$  au sens des mesures vagues et que l'on retrouve ainsi la mesure semi-classique introduite par P. Gérard.

## 14.5 Synthèse

La synthèse de ces idées a été présentée par P. Gérard et L. Tartar: elle consiste à dire que dès lors qu'on utilise une longueur caractéristique  $\varepsilon_n$ , il est naturel de

construire des corrélations, et pour des corrélations à deux points, il est naturel, après extraction, de considérer  $u_n$  telle que:

$$u_n(x + \varepsilon_n y) \overline{u_n(x + \varepsilon_n z)} \rightharpoonup C_2(x, y, z)$$

au sens des mesures vagues sur  $\Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$  et de remarquer que si  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ , alors  $C_2$  est de la forme  $C_2 = \Gamma_2(x; y - z)$  sur  $\Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ . On montre que

$$\forall y^{(1)}, \dots, y^{(N)} \in \mathbb{R}^N, \quad \forall \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(N)} \in \mathbb{C} : \quad (14.17)$$

$$\sum_{j,k=1}^N \Gamma_2(x; y^{(j)} - z^{(k)}) \lambda^{(j)} \bar{\lambda}^{(k)} = \quad (14.18)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \sum_{j=1}^N \lambda^{(j)} u_n(x + \varepsilon_n y^{(j)}) \right|^2 \geq 0 \quad (14.19)$$

de sorte que d'après le théorème de Bochner (étendu aux distributions tempérées de L. Schwartz), il existe une mesure de Radon  $\mu(x, \cdot) \geq 0$  telle que  $\Gamma_2(x; \cdot) = \mathcal{F}\mu(x; \cdot)$  et cette mesure  $\mu$  est précisément la mesure semi-classique introduite par P. Gérard. Il est possible de retrouver la fonction de corrélation comme limite d'une suite de fonctions sans utiliser la transformée de Fourier d'une mesure de Radon (quitte à retrouver ce dernier résultat après coup). En effet: soit  $u_n$  solution de

$$i \frac{\partial u_n}{\partial t} - \varepsilon_n \Delta u_n = 0$$

et soit  $\mu$  la mesure semi-classique associée à la suite  $u_n$  après extraction. On vérifie le résultat suivant de convergence vers la fonction de corrélation:

$$u_n(x + \varepsilon_n y, t) \overline{u_n(x, t)} \rightharpoonup \Gamma_2(x; y, t)$$

au sens des mesures vagues sur  $\Omega \times \mathbb{R}^N \times (0, T)$  et alors:  $\mu = \mathcal{F}_z \Gamma_2(x, t)$  vérifie, après calculs:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \xi \frac{\partial \mu}{\partial x} = 0.$$

## REFERENCES

- [1] Y. AMIRAT, K. HAMDACHE, A. ZIANI. Homogénéisation d'équations hyperboliques du premier ordre et applications aux écoulements miscibles en milieu poreux. *Ann. Inst. Henri Poincaré Analyse non linéaire* **6** (5) (1989) 397–417.
- [2] N. ANTONIC. Memory effects in homogenisation: linear second-order equations. *Arch. Rational Mech. Anal.* **125** (1) (1993) 1–24.
- [3] M. AVELLANEDA, G. MILTON. Bounds on the effective elasticity tensor of composites based on two points correlations. In D. HUI, T. KOZIC, editors, *Proceedings of the ASME Energy Technology Conference and Exposition*. ASME Press, New York 1989.
- [4] A. BENSOUSSAN, J. L. LIONS, G. PAPANICOLAOU. *Asymptotic Methods in Periodic Structures*. North-Holland, Amsterdam 1978.
- [5] A. CALDERON. Commutators of singular integral operators. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **53** (1965) 1092–1099.
- [6] R. COIFMAN, Y. MEYER. Au delà des opérateurs pseudo-différentiels. *Astérisque* **57** (1978) 1–185.
- [7] B. COLEMAN, V. MIZEL. Norms and semi-groups in the theory of fading memory. *Arch. Rational Mech. Anal.* **23** (1967) 87–123.
- [8] B. COLEMAN, V. MIZEL. On the general theory of fading memory. *Arch. Rational Mech. Anal.* **29** (1968) 18–31.
- [9] B. COLEMAN, W. NOLL. An approximation theorem for functionals with applications in continuum mechanics. *Arch. Rational Mech. Anal.* **6** (1960) 355–370.
- [10] B. COLEMAN, W. NOLL. Foundations of linear viscoelasticity. *Reviews Mod. Phys.* **33** (1961) 239–249.
- [11] B. COLEMAN, W. NOLL. Foundations of linear viscoelasticity: Erratum. *Reviews Mod. Phys.* **36** (1964) 1103–1103.
- [12] G. DAVID, J. JOURNÉ. Une caractérisation des opérateurs intégraux singuliers bornés *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I* **296** (1983) 761–764.
- [13] G. FRANCFORT, F. MURAT. Homogenization and optimal bounds in linear elasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.* **94** (1986) 307–334.
- [14] Z. HASHIN. Analysis of composite materials, a survey. *J. Appl. Mech., Trans. ASME* **105** (1983) 481–505.
- [15] Z. HASHIN, S. SHTRIKMAN. A variational approach to the theory of effective magnetic permeability of multiphase materials. *J. Applied Phys.* **33** (1962) 3125–3131.
- [16] Z. HASHIN, S. SHTRIKMAN. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *J. Mech. Phys. Solids* **11** (1963) 127–140.
- [17] L. HORMANDER. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I-IV*. Springer. Springer, Berlin 1983–85.

- [18] A. KORANYI. Note on the theory of monotone operator functions. *Acta Sci. math.* **16** (1955) 241–245.
- [19] J.-L. LIONS. *Quelques methodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod, Gauthier Villars, Paris 1969.
- [20] M. L. MASCARENHAS. A linear homogenization problem with time dependent coefficient. *Trans. Amer. math. Soc.* **281** (1984) 179–195.
- [21] N. G. MEYERS. An  $l^p$  -estimate for the gradient of solutions of second order elliptic divergence equations. *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa* **17** (1963) 189–206.
- [22] G. MILTON. On characterizing the set of possible effective tensors of composites: the variational method and the translation method. *Comm. Pure Appl. math.* **43** (1990) 63–125.
- [23] G. MILTON, R. KOHN. variational bounds on the effective moduli of anisotropic composites. *J. Mech. Phys. Solids* **36** (1988) 597–629.
- [24] F. MURAT, L. TARTAR. Calcul des variations et homogénéisation. In D. BERGMAN, J. LIONS, G. PAPANICOLAOU, F. MURAT, L. TARTAR, E. SANCHEZ-PALENCIA, editors, *Les Méthodes d’Homogénéisation: Théorie et Applications en Physique*, volume 57, pages 323–369. Eyrolles, Paris 1985.
- [25] J. SANCHEZ-HUBERT, E. SANCHEZ-PALENCIA. Sur certains problèmes physiques d’homogénéisation donnant lieu à des phénomènes de relaxation. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A* **286** (1978) 903–906.
- [26] E. SANCHEZ-PALENCIA. Solutions périodiques par rapport aux variables d’espace et applications. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A* **271** (1970) 1129–1132.
- [27] E. SANCHEZ-PALENCIA. Equations aux dérivées partielles dans un type de milieux hétérogènes. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A* **271** (1972) 395–398.
- [28] E. SANCHEZ-PALENCIA. Méthodes d’homogénéisation pour l’étude matériaux hétérogènes: phénomène de mémoire. *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino* **36** (1978) 15–25.
- [29] L. TARTAR. Remarks on homogenization. In J. L. ERICKSEN, D. KINDERLEHRER, R. V. KOHN, J. L. LIONS, editors, *Homogenization and Effective Moduli of Materials and Media.*, volume 1 of *IMA Volumes in Mathematics and its Applications*, pages 228–246. Springer-Verlag, Berlin 1986.
- [30] L. TARTAR. Non local effects induced by homogenization. In *Partial Differential Equations and the Calculus of Variations, Essays in Honor of Ennio de Giorgi, II.*, volume 2 of *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.*, pages 925–938. Birkhaauser Boston, Boston 1989.
- [31] L. TARTAR. H-measures, a new approach for studying homogenization, oscillations and concentration effects in partial differential equations. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh A* **115 (3-4)** (1990) 193–230.
- [32] L. TARTAR. An introduction to the Homogenization Method in Optimal Design. In A. CELLINA, A. ORNELAS, editors, *Optimal Shape Design. Lectures given at the joint C.I.M./C.I.M.E. Summer School held in Troina, Portugal*, volume 1740 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 47–156. Springer, Berlin 1998.