Licence de Mécanique
Méthodes Mathématiques pour la Mécanique (MMM1)
Septembre 2005

Exercices

Exercice 1

1. Ecrire l'algorithme de décomposition LU de la matrice A définie par

$$a_{ii} = a_i, \quad a_{i,i-1} = b_i, \quad a_{i,i+1} = c_i, \quad a_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad |i - j| > 1.$$

   Compter le nombre d'opérations nécessaires.

2. Calculer le nombre d'opérations nécessaires à la résolution de l'équation $Ax = b$ lorsque la décomposition LU de la question précédente est utilisée.

Exercice 2

Soit à résoudre: trouver $u = u(x)$ solution de

$$-u'' = f, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

1. Ecrire un schéma aux différences finies centré utilisant un minimum de points pour que l'erreur sur u" soit améliorée par rapport au schéma centré à trois points.

2. Estimer le coût de la factorisation LU.

Licence de Mécanique
Méthodes Mathématiques pour la Mécanique (MMM1)
Octobre 2005

Exercices

Exercice 1

Etudier les extrema de la fonction:

$$f \ (x,y) \mapsto f(x,y) = \sin x + \sin y + \sin(x+y), \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

Exercice 2

Montrer que si $z(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x+y}$, alors

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Exercice 3

Déterminer les points critiques de la fonction f définie sur $\mathbf{R}^2$ par

$$f(x,y) = y^2(a^2+x^2) - x^2(a^2-x^2)$$

où a est un paramètre quelconque donné. Montrer que la courbe d'équation $f(x,y) = 0$ admet plusieurs tangentes en ce(s) point(s).

Exercice 4

Déterminer, parmi les triangles ayant même périmètre $2p$ celui dont la surface est la plus grande.

Licence de Mécanique
Méthodes Mathématiques pour la Mécanique (MMM1)
Octobre 2005

Exercices

Exercice 1

Montrer que les applications $\mathbf{M}_n(\mathbf{C}) \to \mathbf{R}^+$ définies par:

$$\|A\|_1 = \max_j \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right), \quad \|A\|_2 = (\rho(AA^*))^{1/2}$$

sont des normes matricielles subordonnées respectivement aux normes vectorielles $\|x\|_1 = \sum_i |x_i|, \quad \|x\|_2 = \left(\sum_i |x_i|^2\right)^{1/2}$.

Exercice 2

Montrer que l'application $\mathbf{M}_n(\mathbf{C}) \to \mathbf{R}^+$ définie par $\|A\|_S = \left(\sum_i |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$ est une norme matricielle compatible avec la norme vectorielle $\|x\|_2$ mais subordonnée à aucune norme vectorielle. *Indication*: Que vaut $\|I\|_S$?

Exercice 3

Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{C})$. On considère $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbf{C}^n$ et on note de la même façon la norme matricielle subordonnée.

1. En considérant une valeur propre λ de A, montrer que $\rho(A) \le \|A^p\|^{1/p}$.
2. Soit $\varepsilon > 0$. On pose:
$$B_\varepsilon = \frac{1}{\rho(A) + \varepsilon} A.$$
Montrer que $\lim_{p\to+\infty} \|B_\varepsilon^p\| = 0$. En déduire que $\lim_{p\to+\infty} \|A^p\|^{1/p} \le \rho(A)$.
3. Montrer que
$$\rho(A) = \lim_{p\to+\infty} \|A^p\|^{1/p}.$$
4. En déduire que si A est symétrique alors $\rho(A) = \|A\|_2$.

Exercice 4

Soit $\|\cdot\|$ une norme vectorielle sur $\mathbf{R}^m$. Pour $b \in \mathbf{R}^m$ et $A \in \mathbf{M}_m(\mathbf{R})$ donnés, on veut résoudre

$$Ax = b.$$

1. Soit x' solution de
$$Ax' = b + \Delta b.$$
On pose $\Delta x \equiv x' - x$. Montrer qu'il existe $C(A) > 0$ telle que:
$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq C(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}.$$

2. Soit x'' solution de
$$(A + \Delta A)x'' = b.$$
On pose $\Delta x = x'' - x$. Montrer que:
$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x + \Delta x\|} \leq C(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.$$
et
$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{C(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}{1 - C(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \quad \text{si} \quad \|A^{-1}\|\|\Delta A\| < 1.$$

3. Soit le schéma itératif:
$$r_k = b - Ax_k, \quad A\Delta x_k = r_k, \quad x_{k+1} = x_k + \Delta x_k.$$
Montrer que cet algorithme est convergent.

Licence de Mécanique
Méthodes Mathématiques pour la Mécanique (MMM1)
Novembre 2005

Exercices

Exercice 1

Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$ symétrique, définie positive et soit $b \in \mathbf{R}^n$. On note λ_i, $i = 1, \cdots, n$ les valeurs propres de A rangées en ordre croissant: $0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$. On pose $J(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$ où $(\cdot, \cdot)$ désigne le produit scalaire euclidien sur $\mathbf{R}^n$.

Pour la résolution du système linéaire $Ax = b$, on considère la méthode itérative suivante: étant donné $x_0 \in \mathbf{R}^n$, on pose $r_0 = b - Ax_0$ et, tant que $r_k \neq 0$, on pose:

$$\alpha_k = \frac{(r_k, r_k)}{(Ar_k, r_k)}, \quad x_{k+1} = x_k + \alpha_k r_k, \quad \text{et} \quad r_{k+1} = b - Ax_{k+1}.$$

On note que si $r_k = 0$, alors x_k est la solution du système $Ax = b$.
Dans tout l'exercice, on suppose que k est un entier tel que $r_k \neq 0$.

1. Montrer que J est différentiable et déterminer sa différentielle.
2. Montrer que α_k est l'unique réel qui minimise sur $\mathbf{R}$ la fonction $\alpha \mapsto J(x_k + \alpha r_k)$.
3. Evaluer $J(x_{k+1}) - J(x_k)$.
4. Montrer que
$$(A^{-1}r_{k+1}, r_{k+1}) = (A^{-1}r_k, r_k) - \frac{(r_k, r_k)^2}{(Ar_k, r_k)}$$
5. (a) Montrer que $(Ax, x)(A^{-1}x, x) \geq \|x\|^4$, pour tout $x \in \mathbf{R}^n$.
   (b) Soit $P = (A - \lambda_1 I)(A - \lambda_n I)A^{-1}$. Etudier le signe de (Px, x) pour $x \in \mathbf{R}^n$. En déduire que pour tout $x \in \mathbf{R}^n$:
   $$(Ax, x) + \lambda_1\lambda_n(A^{-1}x, x) \leq (\lambda_1 + \lambda_n)\|x\|^2.$$

(c) Etablir l'inégalité de Kantorovich: pour tout $x \in \mathbf{R}^n$,

$$\|x\|^4 \leq (Ax, x)(A^{-1}x, x) \leq \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}\|x\|^4.$$

(d) A l'aide de l'inégalité de Kantorovich, déduire de ce qui précède que

$$\frac{(A^{-1}r_{k+1}, r_{k+1})}{(A^{-1}r_k, r_k)} \leq \frac{(\lambda_n - \lambda_1)^2}{(\lambda_n + \lambda_1)^2}.$$

6. Soit $K_2(A)$ le conditionnement de la matrice A relatif à la norme euclidienne sur $\mathbf{R}^n$: $K_2(A) \equiv \|A^{-1}\|_2\|A\|_2$. Montrer que $K_2(A) = \dfrac{\lambda_n}{\lambda_1}$.

7. Soit x_* la solution du système $Ax = b$. On note $\|\cdot\|_A$ la norme associée au produit scalaire $(\cdot, \cdot)_A$ de $\mathbf{R}^n$ défini par $(x, y)_A \equiv (x, Ay)$, $x, y \in \mathbf{R}^n$. Montrer que

$$\|x - x_*\|_A \leq \|x_0 - x_*\|_A \left(\frac{K_2(A) - 1}{K_2(A) + 1}\right)^k.$$

Licence de Mécanique
Méthodes Mathématiques pour la Mécanique (MMM1)
Novembre 2005

Feuille d'exercices 5

Exercice 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ définie par:

$$a_{pq} = \begin{cases} n+1-p+q & \text{si} \quad q < p \\ 1-p+q & \text{si} \quad q \geq p. \end{cases}$$

1. On pose $r_k = e^{2i\pi k/n}$, $k = 0, \dots, n-1$ ($i^2 = -1$). Montrer que:

$$(\sum_{j=1}^{n} j r_k^{j-1})(r_k - 1) = n.$$

2. Vérifier que pour $k = 0, \dots, n-1$, le vecteur v_k de composantes $1, r_k, r_k^2, \cdots, r_k^{n-1}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_k définie par:

$$\lambda_0 = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \lambda_k = \frac{n}{r_k - 1} \quad \text{si} \quad k \neq 0.$$

   Indication: On rappelle la formule:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

3. Soit $b \in \mathbf{R}^n$. On veut résoudre le système

$$(A + \alpha I)x = b, \quad x \in \mathbf{R}^n$$

   par la méthode de Jacobi.

(a) Montrer que l'on est amené à construire une suite $x^{(k)}$ de vecteurs vérifiant la relation de récurrence:

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$$

avec

$$B = \frac{1}{(1+\alpha)}(I - A), \quad c = \frac{1}{(1+\alpha)}b.$$

(b) Vérifier que les valeurs propres de B sont définies par:

$$\lambda_k(B) = \frac{1}{(1+\alpha)}(1 - \lambda_k), \quad k = 0, \cdots n-1.$$

(c) Vérifier que:

$$\forall k \neq 0, \quad |1 - \lambda_k| = |\sum_{j=2}^{n} j r_k^{j-1}|.$$

(d) En déduire que

$$\forall k \neq 0, \quad |1 - \lambda_k| < \frac{n(n+1)}{2} - 1 = \lambda_0 - 1.$$

(e) On note $\rho(B)$ le rayon spectral de B. Montrer que:

$$\rho(B) = \lambda_0 - 1 = \frac{n^2 + n - 2}{2}.$$

4. Montrer que la méthode converge si et seulement si

$$\left| \frac{1 - \lambda_i}{1 + \alpha} \right| < 1, \quad i = 0, \cdots n-1.$$

5. Vérfier que la condition de convergence trouvée précédemment est équivalente à

$$|1 + \alpha| > \frac{n^2 + n + 1}{2}.$$

Exercice 2

Soit à résoudre numériquement le système $Ax = d$ lorsque la matrice A est donnée par

$$a_{i,i-1} = a, \quad a_{ii} = b, \quad a_{i,i+1} = c, \quad a_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad |i-j| > 1$$

où les réels a, b, c sont non nuls.

1. On cherche à factoriser A sous la forme $A = LU$ avec

   $$l_{i,i-1} = v_i, \quad l_{ii} = l_i, \quad l_{ij} = 0 \quad \text{ailleurs}$$

   $$u_{i,i+1} = u_i, \quad u_{ii} = 1 \quad u_{ij} = 0 \quad \text{ailleurs.}$$

   Montrer que l'algorithme de factorisation de A se ramène à:

   $$v_i = a, \quad i = 2, \cdots, n, \quad l_1 = b, \quad u_1 = c/b$$

   $$\left.\begin{array}{lcl} l_i & = & b - au_{i-1} \\ u_i & = & c/(b - au_{i-1}) \end{array}\right\} \quad i = 2, \cdots n$$

2. Calculer le nombre d'opérations nécessaires:

   (a) pour factoriser A;

   (b) pour résoudre $LUx = d$.

   Indication On rappelle que

   $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$