Compacité par compensation et homogénéisation: notes du Cours de DEA de F. Murat rédigées par

Isabelle Gruais

CONTENTS

1 POSITION DU PROBLÈME

L'objet de ce Cours est

1. la modélisation des matériaux composites
2. le contrôle des coefficients

1.1 Cas type: la conduction thermique

C'est le cas du Laplacien: l'étude détaillée que l'on en fait ici est générique pour l'élasticité, les mélanges de fluides.

On note q le flux de chaleur, u la température et f la source de chaleur reliés entre eux par une loi de balance complétée par une loi constitutive.

(i) LA LOI DE BALANCE Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un corps dans $\mathbb{R}^N$. Les quantités introduites désignent des fonctions

$$q : \Omega \to \mathbb{R}^N, \quad u : \Omega \to \mathbb{R}, \quad f : \Omega \to \mathbb{R}.$$

La loi de balance s'énonce alors

$$\operatorname{div} q = f, \quad \text{dans} \quad \Omega.$$

(ii) LA LOI CONSTITUTIVE La loi constitutive qui la complète établit une relation entre q et u caractéristique du choix du modèle. Pour fixer les idées et simplifier les calculs, on se limite au cas de la conductivité linéaire. La théorie dit qu'il existe un tenseur de conductivité $A :\to \mathbb{R}^{N\times N}$ tel que

$$q = -A\,Du$$

de sorte que le problème étudié s'écrit: Trouver u solution de

$$-\operatorname{div}(A\,Du) = f, \quad \text{dans} \quad \Omega.$$

On lui associe l'énergie thermique définie par

$$\frac{1}{2}\,q \cdot Du = \frac{1}{2}\,A\,Du \cdot Du$$

et on ferme le système par des conditions aux limites de type Dirichlet par exemple, soit $u = 0$ sur $\partial\Omega$.

Finalement, on obtient le problème: Trouver u solution de

$$-\operatorname{div}(A\,Du) = f, \quad \Omega, \tag{1.1}$$
$$u = 0, \quad \partial\Omega. \tag{1.2}$$

Formellement, cela s'interprète: pour des données Ω, f, A, résoudre (1.1)-(1.2) en l'inconnue u.

Il reste à donner un sens à l'équation (1.1)-(1.2). Pour cela, on fait les hypothèses suivantes sur les données:

1. Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$;
2. $A \in L^\infty(\Omega)^{N\times N}$;
3. $f \in H^{-1}(\Omega)$;
4. A est coercif au sens: $\exists \alpha > 0$ tel que

$$A(x) \geq \alpha\, I \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega$$

soit:

$$A(x)\,\xi\cdot\xi \geq \alpha\,|\xi|^2 \quad \text{p.p.} \quad x\in\Omega, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

L'espace naturellement associé à la formulation variationnelle du problème est celui de l'énergie

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), \quad Du \in L^2(\Omega)^N\}$$

où la dérivée Du est à prendre au sens des distributions. Cet espace $H^1(\Omega)$ est muni de sa norme naturelle

$$\|u\|_{L^2}^2 + \|Du\|_{L^2}^2 .$$

On note $H_0^1(\Omega)$ le complété de $\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ et $H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))'$ dans l'identification usuelle de $L^2(\Omega)$ avec son propre dual. Alors: le problème consistant à chercher u solution de

$$u \in H_0^1(\Omega); \tag{1.3}$$
$$-\operatorname{div}(A\,Du) = f, \quad \text{dans} \quad \mathscr{D}'(\Omega), \tag{1.4}$$

est désormais bien posé au sens du

Théorème 1.1 *Le problème* (1.3) *admet une solution unique* u *et l'application* $f \mapsto u$ *est linéaire continue de* $H^{-1}(\Omega)$ *dans* $H_0^1(\Omega)$.

Preuve. On applique à la formulation variationnelle du problème le lemme de Lax-Milgram. On commence par rappeler ce dernier sous sa forme générale abstraite.

Lemme 1.2 *Soit* V *un espace de Hilbert,* $a(\cdot,\cdot)$ *une forme bilinéaire continue coercive sur* $V\times V$, L *une forme linéaire continue sur* V . *Alors, il existe* u *unique solution de*

$$u \in V; \quad a(u,\,v) = L(v), \quad \forall v \in V.$$

Dans la situation présente:

$$V = H_0^1(\Omega), \tag{1.5}$$
$$a(u,\,v) = \int_\Omega A\,Du\cdot Dv\,dx, \tag{1.6}$$
$$L(v) = {}_{H^{-1}}\langle f,\, v\rangle_{H_0^1} \tag{1.7}$$

L'inégalité de Poincaré et l'hypothèse de coercivité sur A permettent de conclure que la forme bilinéaire $a(\cdot,\,\cdot)$ satisfait aux hypothèses du Lemme 1.2. On peut d'ailleurs préciser ce résultat en rappelant que sur $H_0^1(\Omega)$, la semi-norme $\|Du\|_{L^2}$ est en fait une norme équivalente à la norme induite par celle de H^1 , c'est-à-dire:

$$\|Du\|_{L^2} \sim \|u\|_{H^1} .$$

Dans la suite du Cours, on choisit de munir $H_0^1(\Omega)$ de la nouvelle norme ainsi définie. En conclusion: on a vérifié qu'il existe u unique solution du problème variationnel:

$$u \in H_0^1(\Omega), \quad \text{et} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega): \quad \int_\Omega A\, Du \cdot Dv\, dx = {}_{H^{-1}}\langle f,\, v\rangle_{H_0^1}. \tag{1.8}$$

La réciproque consiste à interpréter le problème variationnel (1.8) en termes de problème aux limites associé. Pour cela, on écrit que (1.8) est vrai pour toute fonction test $v = \varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ et on conclut grâce à la densite de $\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$. ■

1.2 Matériau homogène et matériau hétérogène

Un matériau est dit homogène si ses propriétés ne dépendent pas du point d'observation, ce que l'on traduit mathématiquement en posant que A ne dépend pas de la variable d'espace $x \in \Omega$. Un matériau est dit hétérogène dans le cas contraire, un exemple classique étant fourni par la fibre de verre plongée dans de la résine que l'on peut décrire à l'aide d'un tenseur de la forme

$$A(x) = \begin{cases} A_F & \text{dans la fibre} \quad F \\ A_R & \text{dans la résine} R \end{cases}$$

Soit alors le problème déjà introduit

$$-\operatorname{div} A\, Du = f \quad \text{dans} \quad \mathscr{D}'(\Omega). \tag{1.9}$$

Dans la fibre F: $A(x) = A_F$, de sorte que (1.9) sécrit

$$-\sum_{i,j=1}^{N} \partial_i((A_F)_{ij}\partial_j u) = f \quad \text{dans} \quad F. \tag{1.10}$$

Dans la résine R: $A(x) = A_R$, de sorte que (1.9) sécrit

$$-\sum_{i,j=1}^{N} \partial_i((A_R)_{ij}\partial_j u) = f \quad \text{dans} \quad R. \tag{1.11}$$

Le problème doit être complété par une condition à l'interface Σ sous la forme

$$(A_F\, Du_F)\, n_F = -(A_R\, Du_R)\, n_R \quad \text{sur} \quad \Sigma$$

où u_F et u_R désignent les solutions (uniques) de (1.10) et (1.11) resp. et où n_F et n_R désignent les normales extérieures aux sous-ensembles F et R resp. Plus précisément: si la matrice A est donnée par

$$A(x) = \begin{cases} A_F & \text{dans} \quad F \\ A_R & \text{dans} \quad R \end{cases}$$

où $\Omega = F \cup R \cup \Sigma$ avec F et R séparés par une interface régulière Σ, si u est tel que

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(A\, Du) &= f \in L^2(\Omega), & (1.12) \\ u &\in H^1(\Omega) & (1.13) \end{aligned}$$

et si l'on pose

$$u = \begin{cases} u_F & \text{dans} \quad F \quad u_F \in H^2(F) \\ u_R & \text{dans} \quad R \quad u_R \in H^2(R) \end{cases}$$

alors, u est solution de (1.12)-(1.13) si et seulement si u est solution de (1.14)-(1.17) ci-dessous

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(A_F\, Du_F) &= f \quad \text{dans} \quad F, & (1.14)\\ -\operatorname{div}(A_R\, Du_R) &= f \quad \text{dans} \quad R, & (1.15)\\ u_F &= u_R \quad \text{sur} \quad \Sigma, & (1.16)\\ (A_F\, Du_F)\, n_F &= -(A_R\, Du_R)\, n_R \quad \text{sur} \quad \Sigma. & (1.17) \end{aligned}$$

Dans ce Cours, on s'intéresse plus particulièrement au cas de fibres "très fines" de taille ε en un sens que l'on va préciser. De plus, ces fibres sont "très nombreuses". On est alors ramené à considérer un problème paramétré par ε variante de (1.12)-(1.13), soit

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} A^\varepsilon\, Du^\varepsilon &= f \quad \text{dans} \quad \mathscr{D}'(\Omega), & (1.18)\\ u^\varepsilon &\in H^1_0(\Omega) & (1.19) \end{aligned}$$

Intuitivement, le matériau composite est celui que l'on obtient lorsque l'on écrit que $\varepsilon = 0$ dans (1.18)-(1.19). C'est aussi celui que l'on obtient "à la limite" quand $\varepsilon \to 0$. Le problème devient désormais: que devient l'inconnue u^ε du problème (1.18)-(1.19) quand $\varepsilon \to 0$?

1.3 Le problème mathématique

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $f \in H^{-1}(\Omega)$. On considère une suite de matrices (A^ε), $A^\varepsilon \in L^\infty(\Omega)^{N\times N}$ ayant les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} A^\varepsilon(x) &\geq \alpha\, I, \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad (\alpha > 0) \quad \text{fixé} & (1.20)\\ |A^\varepsilon(x)| &\leq \beta \qquad \text{p.p. en} \quad x \in \Omega \quad (\beta > 0) \quad \text{fixé} & (1.21) \end{aligned}$$

On regarde le problème: soit u^ε la solution (unique) de (1.18)-(1.19). Que devient u^ε quand $\varepsilon \to 0$?

Une première approche consiste à établir des estimations a priori sur u^ε en procédant comme suit. Partant de la formulation variationnelle de (1.18)-(1.19), on fait le choix —loisible— de la fonction-test $v = u^\varepsilon$, ce qui donne

$$\int_\Omega A^\varepsilon\, Du^\varepsilon \cdot Du^\varepsilon\, dx = {}_{H^{-1}}\langle f,\, u^\varepsilon\rangle_{H^1_0}$$

Le membre de droite est majoré par

$$\|f\|_{H^{-1}}\, \|u^\varepsilon\|_{H^1_0} < +\infty$$

tandis que l'uniforme coercivité de la suite (A^ε) permet de minorer le membre de gauche par

$$\alpha \int_\Omega |Du^\varepsilon|^2 = \alpha \, \|u^\varepsilon\|^2_{H^1_0}$$

Il en résulte immédiatement que

$$\|u^\varepsilon\|_{H^1_0} \leq \frac{\|f\|_{H^{-1}}}{\alpha}$$

et on résoud ainsi le problème de l'estimation a priori.

On pose $\sigma^\varepsilon := A^\varepsilon \, Du^\varepsilon$. σ^ε est uniformément borné dans $L^2(\Omega)$ suivant

$$\|\sigma^\varepsilon\|_{L^2} \leq \|A^\varepsilon\|_{L^\infty} \, \|Du^\varepsilon\|_{L^2} \leq \beta \, \frac{\|f\|_{H^{-1}}}{\alpha}$$

de sorte que le terme $A^\varepsilon \, Du^\varepsilon \, Du^\varepsilon$ est uniformément borné dans $L^1(\Omega)$. Il est alors naturel de chercher le lien entre les limites $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \sigma^\varepsilon$ et $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} u^\varepsilon$ —qui existent pour des suites extraites diagonales encore indexées par ε d'après le raisonnement préliminaire— quand $\varepsilon \to 0$.

Plus précisément, u^ε est borné dans $H^1_0(\Omega)$ qui est un espace de Banach réflexif, donc il existe des suites extraites $(u^{\varepsilon'})$, $(\sigma^{\varepsilon'})$ telles que

$$u^{\varepsilon'} \overset{w}{\rightharpoonup} u \quad \text{dans} \quad H^1_0(\Omega) \quad \text{faible} \quad , \tag{1.22}$$

$$\sigma^{\varepsilon'} \overset{w}{\rightharpoonup} \sigma \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega)^N \quad \text{faible} \quad , \tag{1.23}$$

$$A^{\varepsilon'} \, Du^{\varepsilon'} \, Du^{\varepsilon'} \overset{w}{\rightharpoonup} e \quad \text{dans} \quad \mathscr{D}'(\Omega). \tag{1.24}$$

On cherche la relation entre les limites u , σ , e naturellement introduites par le passage à la limite. Cette relation définit le matériau composite au sens suivant. Remarquant que

$$Du^{\varepsilon'} \overset{w}{\rightharpoonup} Du \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega) \quad \text{faible} \quad ,$$

on dira que la relation entre Du et σ est la loi constitutive du matériau composite dès lors qu'on peut l'écrire sous la forme $q = A \, Du$ où A est une matrice à déterminer (Ne pas oublier que le problème de départ est linéaire). Or, le problème (1.18)-(1.19) s'écrit encore, en faisant intervenir le tenseur σ^ε :

$$-\operatorname{div} \sigma^\varepsilon = f \quad \text{dans} \quad \mathscr{D}'(\Omega) \tag{1.25}$$

$$\sigma^\varepsilon = A^\varepsilon \, Du^\varepsilon. \tag{1.26}$$

Passant à la limite dans (1.25) au sens $\mathscr{D}'(\Omega)$ et utilisant la continuité de la dérivation des distributions, on obtient

$$-\operatorname{div} \sigma = f \quad \text{dans} \quad \mathscr{D}'(\Omega) \tag{1.27}$$

Le passage à la limite dans (1.26) s'effectue pour une suite extraite $(A^{\varepsilon''})$ telle que

$$A^{\varepsilon''} \overset{*}{\rightharpoonup} \bar{A} \quad \text{dans} \quad L^\infty(\Omega)^{N \times N} \quad \text{faible} \quad * \, .$$

Mais la limite faible n'est pas le produit "naïf" des limites faibles!

Un contre-exemple (classique) permet de s'en convaincre.

Proposition 1.3 *Sur* $[0, 1]$, *on définit:* $u_n(x) = \sin(n\,x)$. *Alors* $u_n \overset{w}{\rightharpoonup} 0$ *dans* $L^2(0, 1)$ *faible, mais* $u_n^2 \overset{w}{\rightharpoonup} \dfrac{1}{2}$ *dans* $L^2(0, 1)$ *faible.*

Pour revenir au cas qui nous intéresse, on se propose de montrer un résultat du type

Théorème 1.4 *(Enoncé provisoire). Il existe une matrice* A_0 *du même type que* A *telle que* $\sigma = A_0\,Du$.

2 LE CONTRÔLE DES COEFFICIENTS

C'est la deuxième motivation de ce Cours, après la modélisation des matériaux brièvement décrite plus haut.

2.1 Description du problème

Rappelons le principe du contrôle: au moyen d'un paramètre, décrire l'état du système étudié; en particulier, en donner si possible la solution, puis évaluer le coût sous la forme d'une fonctionnelle à minimiser.

Dans le problème étudié, on se donne une classe $\mathscr{A}_{\alpha,\beta}$ indexée par $\alpha > 0$, $\beta > 0$ donnés, de coefficients $a(x) \in L^\infty(\Omega)$, en fait ceux de la matrice $A(x) \in L^\infty(\Omega)^{N\times N}$, vérifiant $\alpha \leq a(x) \leq \beta$ dans Ω . Le problème que l'on regarde s'écrit désormais: pour $a \in \mathscr{A}_{\alpha,\beta}$ *cf*(1.20), résoudre:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(a\,Du) &= f \quad \text{dans} \quad \mathscr{D}'(\Omega). && (2.1)\\ u &\in H_0^1(\Omega) && (2.2)\end{aligned}$$

On définit la fonction coût associée par

$$J(a) = \int_\Omega |u-z|^2 \; dx,$$

avec $z \in L^2(\Omega)$ donné et on regarde le problème de minimisation

$$\min_a J(a), \quad f \in L^2(\Omega) \quad \text{donnée} \tag{2.3}$$

L'identification de a solution de (2.3) nous ramène à un problème classique en calcul des variations.

2.2 Lien avec le problème de la fibre

On va voir que le problème décrit au paragraphe précédent est en fait le même que celui de la fibre. En effet, soit (a^ε) une suite minimisante:

$$J(a^\varepsilon) \to \inf_{a\in\mathscr{A}_{\alpha,\beta}} J(a).$$

pour une suite extraite $(a^{\varepsilon'})$:

$$a^{\varepsilon'} \overset{*}{\rightharpoonup} \bar{a} \quad L^\infty \quad \text{faible}* \tag{2.4}$$

A-t-on $J(\bar{a}) = \inf_{a\in\mathscr{A}_{\alpha,\beta}} J(a)$? La réponse est NON en général. Pour le voir, on considère la suite (u^ε) des solutions de

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(a^\varepsilon\,Du^\varepsilon) &= f \quad \text{dans} \quad \mathscr{D}'(\Omega), && (2.5)\\ u^\varepsilon &\in H_0^1(\Omega). && (2.6)\end{aligned}$$

Le même raisonnement que plus haut s'applique pour établir l'estimation a priori

$$\|u^\varepsilon\|_{H_0^1} \leq \frac{1}{\alpha}\,\|f\|_{H^{-1}}$$

de sorte que pour une suite extraite

$$u^{\varepsilon''} \stackrel{w}{\rightharpoonup} u \quad H_0^1(\Omega) \quad \text{faible.}$$

Or, le théorème de compacité de Rellich dit que si Ω est borné, alors l'injection (continue) $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ est compacte et entraîne donc que

$$u^{\varepsilon''} \to u \quad L^2(\Omega) \quad \text{fort.}$$

Alors:

$$J(a^{\varepsilon''}) = \int_\Omega |a^{\varepsilon''} - z|^2 \to \int_\Omega |u - z|^2$$

c'est-à-dire, par la définition de $(a^{\varepsilon''})$ minimisante:

$$\inf_{a \in \mathscr{A}_{\alpha,\beta}} J(a) = \int_\Omega |u-z|^2$$

Le problème posé devient alors: quelle est la relation entre $\bar{a}$ et u ? *Si on sait* que u est solution de

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\bar{a}\,Du) &= f \quad \text{dans} \quad \mathscr{D}'(\Omega), &(2.7)\\ u &\in H_0^1(\Omega), &(2.8)\end{aligned}$$

alors $\bar{a}$ est un minimisant au sens que légalité suivante est vraie:

$$\inf_{a \in \mathscr{A}_{\alpha,\beta}} J(a) = J(\bar{a}).$$

Mais cela n'est pas vrai en général de sorte que le problème reste ouvert. De fait, on va montrer qu'il n'y a pas de relation explicite entre u et $\bar{a}$: il faudra élargir la classe des $\bar{a}$.

2.3 Cas unidimensionnel

Dans tout ce paragraphe, on se limite au cas de la dimension $N = 1$ pour exposer le principe d'élargissement de la classe des $\bar{a}$.

L'ouvert Ω devient $\Omega = (0,1)$. Soit alors une suite $(a^\varepsilon(x))$ telle que $a^\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$, $\alpha \leq a^\varepsilon \leq \beta$ où $0 < \alpha \leq \beta < +\infty$ sont des coefficients donnés. Soit à résoudre: Trouver u^ε solution de

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx}(a^\varepsilon \frac{du^\varepsilon}{dx}) &= f \quad \text{dans} \quad \mathscr{D}'(\Omega). &(2.9)\\ u^\varepsilon &\in H_0^1(\Omega) &(2.10)\end{aligned}$$

avec $f \in H^{-1}(\Omega)$ donné. Le passage à la limite faible, justifié pas une estimation a priori, s'effectue désormais classiquement pour une suite extraite indexée par ε' :

$$\frac{du^{\varepsilon'}}{dx} \overset{w}{\rightharpoonup} \frac{du}{dx} \qquad \text{dans} \quad L^2(\Omega) \quad \text{faible} \quad ; \tag{2.11}$$

$$\sigma^{\varepsilon'} = a^{\varepsilon'} \frac{du^{\varepsilon'}}{dx} \overset{w}{\rightharpoonup} \sigma \qquad \text{dans} \quad L^2(\Omega) \quad \text{faible} \quad ; \tag{2.12}$$

$$a^{\varepsilon'} \overset{*}{\rightharpoonup} \bar{a} \qquad \text{dans} \quad L^\infty(\Omega) \quad \text{faible}* \quad ; \tag{2.13}$$

la continuité de la dérivation au sens des distributions permet de conclure que

$$-\frac{d\sigma}{dx} = f \quad \text{dans} \quad \mathscr{D}'(\Omega). \tag{2.14}$$

On transforme le second membre de (2.14) grâce au

Théorème 2.1 *Si* Ω *est un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$, $f \in H^{-1}(\Omega)$ *si et seulement si il existe* $g \in L^2(\Omega)^N$ *tel que* $f = -\operatorname{div} g$. *Dans le cas général où* Ω *n'est pas borné, ceci doit être remplacé par* $f = -\operatorname{div} g + g_0$ *avec* $g_0 \in L^2(\Omega)$. *Dans tous les cas, on définit sur* $H^{-1}(\Omega)$ *une norme en posant:* $\|f\|_{H^{-1}} := \inf_{\{(-\operatorname{div} g = f)\}} \|g\|_{L^2(\Omega)^N}$.

Revenant au problème qui nous intéresse, pour lequel $N = 1$, on obtient:

$$-\frac{d}{dx}(\sigma^\varepsilon - g) = 0, \quad \text{dans} \quad \mathscr{D}'(\Omega)$$

ce qui entraîne que

$$\sigma^\varepsilon - g = C^\varepsilon \in \mathbb{R}, \tag{2.15}$$

c'est-à-dire, en revenant à l'expression de σ^ε

$$a^\varepsilon \frac{d}{dx} u^\varepsilon = g + C^\varepsilon. \tag{2.16}$$

Mais la suite de réels (C^ε) est bornée dans $\mathbb{R}$ (à un ensemble de mesure nulle près) car le membre de gauche de (2.16) est borné dans $L^2(\Omega)$. Donc, pour une suite extraite

$$C^{\varepsilon''} \to C \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}. \tag{2.17}$$

Or, le problème initial s'écrit

$$\frac{d}{dx} u^{\varepsilon''} = \frac{g}{a^{\varepsilon''}} + \frac{C^{\varepsilon''}}{a^{\varepsilon''}} \tag{2.18}$$

et le membre de gauche est bien défini car

$$0 < \frac{1}{\beta} \leq \frac{1}{a^{\varepsilon''}} \leq \frac{1}{\alpha} < +\infty.$$

De ce dernier encadrement, on déduit en outre que:

$$\|\frac{1}{a^{\varepsilon''}}\|_{L^\infty} \leq C.$$

Alors, quitte à extraire à nouveau une sous-suite:

$$\frac{1}{a^{\varepsilon''}} \overset{*}{\rightharpoonup} b \quad \text{dans} \quad L^\infty(\Omega) \quad \text{faible} * \quad .$$

et la limite b vérifie encore les bornes

$$0 < \frac{1}{\beta} \leq b \leq \frac{1}{\alpha} < +\infty.$$

On définit $\underline{a}$ en posant $b = \dfrac{1}{\underline{a}}$, avec

$$\alpha \leq \underline{a} \leq \beta. \tag{2.19}$$

Pour récapituler:

$$\frac{1}{a^{\varepsilon''}} \overset{*}{\rightharpoonup} \frac{1}{\underline{a}} \quad \text{dans} \quad L^\infty(\Omega) \quad \text{faible} * \quad . \tag{2.20}$$

On peut passer à limite dans (2.18): que

$$\frac{du^{\varepsilon''}}{dx} \overset{w}{\rightharpoonup} \frac{du}{dx} \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega) \quad \text{faible}$$

est immédiat. En effet, le premier terme du membre de droite converge faiblement dans $L^2(\Omega)$: on le voit en prenant une fonction test $\psi \in L^2(\Omega)$ et en remarquant que pour toute fonction test $\psi \in L^2(\Omega)$, le produit $g\,\psi$ est dans $L^1(\Omega)$ et que

$$\int_\Omega \frac{g}{a^{\varepsilon''}}\,\psi \to \int_\Omega \frac{1}{\underline{a}}\,(g\,\psi).$$

Pour le dernier terme, on a immédiatement que, par (2.17)

$$\frac{C^{\varepsilon''}}{a^{\varepsilon''}} \overset{*}{\rightharpoonup} \frac{C}{\underline{a}} \quad \text{dans} \quad L^\infty(\Omega) \quad \text{faible} * \quad .$$

Finalement

$$\underline{a}\,\frac{du}{dx} = g + C \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega).$$

Ceci nous donne la relation cherchée entre σ et $\dfrac{d}{dx}u$. En effet: de la relation (2.15), on en déduit, après passage à la limite dans $L^2(\Omega)$ faible, que

$$\sigma = g + C = \underline{a}\,\frac{du}{dx} \tag{2.21}$$

On rassemble ces résultats dans la

Proposition 2.2 *Dans le cas monodimensionnel* $N = 1$, *on a la relation* cf(2.21)

$$\sigma = \underline{a}\,\frac{du}{dx}$$

où $\underline{a}$ *résulte du passage à la limite* (2.20)

$$\frac{1}{a^{\varepsilon''}} \overset{*}{\rightharpoonup} \frac{1}{\underline{a}} \quad dans \quad L^\infty(\Omega) \quad faible* \quad .$$

et on a l'encadrement (2.19)

$$\alpha \leq \underline{a} \leq \beta.$$

On peut préciser la relation entre $\underline{a}$ et $\bar{a}$ introduit dans (2.4).

Lemme 2.3 *L'égalité* $\underline{a} = \bar{a}$ *est réalisée si et seulement si*

$$a^\varepsilon \to a \quad dans \quad L^2(\Omega) \quad fort \tag{2.22}$$

et alors $\underline{a} = \bar{a} = a$ *.*

On remarque d'abord que le résultat suivant est toujours vrai:

Lemme 2.4 *Les limites* $\underline{a}$ *et* $\bar{a}$ *sont reliées par*

$$\underline{a} \leq \bar{a} \quad p.p. \ dans \quad \Omega. \tag{2.23}$$

Preuve de (2.4)**.** En effet: pour toute $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$, on a

$$\int_\Omega \varphi \, \frac{1}{a^\varepsilon} \, (a^\varepsilon - z)^2 \; dx \geq 0$$

et le membre de gauche se décompose en

$$\int_\Omega \varphi \, (a^\varepsilon - 2\, z + \frac{z^2}{a^\varepsilon})$$

On passe à la limite quand $\varepsilon \to 0$ en utilisant les définitions de $\bar{a}$ et $\underline{a}$, soit:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \varphi \, (a^\varepsilon - 2\, z + \frac{z^2}{a^\varepsilon}) = \int_\Omega \varphi \, (\bar{a} - 2\, z + \frac{z^2}{\underline{a}})$$

On obtient alors

$$\int_\Omega \varphi \, (\bar{a} - 2\, z + \frac{z^2}{\underline{a}}) \geq 0, \quad \forall \varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega), \quad \varphi \geq 0.$$

c'est-à-dire, en faisant varier φ :

$$(\bar{a} - 2\, z + \frac{z^2}{\underline{a}}) \geq 0, \quad \text{p.p. en} \quad x \in \Omega \tag{2.24}$$

Le choix $z = \underline{a}$ entraîne (2.23). ∎

Preuve de (2.3)**.** Revenant au Lemme 2.3, on suppose d'abord que $\underline{a} = \bar{a} = a$. Cela revient à dire que

$$a = \liminf_{\varepsilon \to 0} a^\varepsilon = \left(\liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{a^\varepsilon} \right)^{-1} = \limsup_{\varepsilon \to 0} a^\varepsilon$$

i.e.:

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} a^\varepsilon = \limsup_{\varepsilon \to 0} a^\varepsilon = a$$

où les limites inf et sup sont à prendre dans le sens de la topologie faible de $L^2(\Omega)$. On en déduit alors que la suite (a^ε) est en fait convergente dans $L^2(\Omega)$ pour la topologie forte vers a. Réciproquement, on suppose que $a^\varepsilon \to a$ dans $L^2(\Omega)$ fort. Alors, pour une suite extraite $a^{\varepsilon'} \to a$ p.p., de sorte que, pour la même suite extraite: $\dfrac{1}{a^{\varepsilon'}} \to \dfrac{1}{a}$ p.p.. Nécessairement, cette limite vérifie $a = \bar{a} = \underline{a}$. ∎

Le problème est posé désormais de la généralisation des résultats du cas de la dimension $N = 1$ au cas général de $N > 1$. On peut déjà remarquer l'analogie entre l'application $(A, x) \mapsto A^{-1}\, x{\cdot}x$ qui est semi-continue inférieurement (s.c.i. pour abréger) dès que la matrice A vérifie des hypothèses de coercivité $A \in L^\infty(\Omega)^{N\times N}$, $A \geq \alpha\, I$, $\alpha > 0$, au sens des formes bilinéaires, et l'application scalaire $(a, x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \mapsto \dfrac{|x|^2}{a}$.

Le cas $N = 1$ a été complètement résolu ci-dessus. En effet, si $\Omega = (0, 1)$ est le segment ouvert ou fermé, les données du problème sont: (i) $f \in H^{-1}(\Omega)$, (ii) les coefficients $a^\varepsilon \in L^\infty$ uniformément bornés selon $0 < \alpha \leq a^\varepsilon \leq \beta$. On considère le problème: trouver u^ε solution de

$$u^\varepsilon \in H^1_0(\Omega), \tag{2.25}$$
$$-\frac{d}{dx}(a^\varepsilon \frac{du^\varepsilon}{dx}) \;=\; f \quad \text{dans} \quad \mathscr{D}'(\Omega). \tag{2.26}$$

La réponse est contenue dans le

Théorème 2.5 *Il existe une sous-suite extraite paramétrée par $\eta \to 0$ telle que:*

$$\frac{1}{a_\eta} \overset{*}{\rightharpoonup} \frac{1}{\underline{a}} \quad \textit{dans} \quad L^\infty(\Omega) \quad \textit{faible}*$$

La sous-suite des solutions associées vérifie

$$u_\eta \overset{w}{\rightharpoonup} u \qquad \textit{dans} \quad H^1_0(\Omega) \quad \textit{faible} \quad ; \tag{2.27}$$
$$\sigma_\eta = a_\eta \frac{du_\eta}{dx} \overset{w}{\rightharpoonup} \underline{a}\,\frac{du}{dx} \qquad \textit{dans} \quad L^2(\Omega) \quad \textit{faible} \quad ; \tag{2.28}$$

où u est la solution (unique) du problème aux limites

$$u \in H^1_0(\Omega), \tag{2.29}$$
$$-\frac{d}{dx}(\underline{a}\,\frac{du}{dx}) \;=\; f \quad \textit{dans} \quad \mathscr{D}'(\Omega); \tag{2.30}$$
$$\alpha \leq \underline{a} \leq \beta \tag{2.31}$$

Autrement dit, ***pour*** $N = 1$, le problème limite (2.29)-(2.31) est du même type que le problème initial (2.25)-(2.26) avec la restriction que $\underline{a} \neq \bar{a}$ en général. On peut donc formuler ***la conjecture***: si $N > 1$, soit la suite de matrices $(A^\varepsilon) \in L^\infty(\Omega)^{N\times N}$, équicoercive suivant $A^\varepsilon \geq \alpha\, I$, d'inverses (bien définies à cause de l'équicoercivité) uniformément bornées suivant $\|(A^\varepsilon)^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{\alpha}$. Alors, au moins pour une suite extraite (A^η), vérifier que

$$(A^\eta)^{-1} \overset{*}{\rightharpoonup} \underline{A}^{-1} \quad \text{dans} \quad L^\infty(\Omega)^{N\times N} \quad \text{faible} \quad * \quad ;$$

et que la suite associée des solutions u^η converge faiblement vers u solution d'un problème aux limites analogue au problème de départ de matrice $\underline{A}$. Dans la suite on va montrer que cette *conjecture est fausse*. On commence par un cas où les résultats de la dimension 1 sont aisément transportables quand $N > 1$.

2.4 Le cas des structures en couches

Une structure en couches peut être modélisée à l'aide de matrices $A^\varepsilon(x) = A^\varepsilon(x_1)$ ne dépendant que d'une seule composante après un changement de variable adéquat. L'étude est alors une adaptation des résultats déjà obtenus si on suppose en outre que $A^\varepsilon \in L^\infty(I)^{N\times N}$ pour un intervalle de $\mathbb{R}$ donné. En termes des coefficients, on impose que

$$A^\varepsilon_{ij} \in L^\infty(I), \quad i,\, j = 1, \cdots, N \tag{2.32}$$

avec

$$|A^\varepsilon_{ij}| \;\leq\; \beta \quad \text{p.p. en} \quad x_1 \in I, \tag{2.33}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \tag{2.34}$$

On fait aussi l'hypothèse d'équicoercivité

$$A^\varepsilon \geq \alpha\, I, \quad \text{p.p. en} \quad x_1 \in I \tag{2.35}$$

On se propose de passer à la limite quand $\varepsilon \to 0$ dans un sens à préciser.

Notant $\sigma^\varepsilon = A^\varepsilon\, Du^\varepsilon$, on peut écrire que

$$\sigma^\varepsilon_1 \;=\; \sum_{j=1}^N A^\varepsilon_{1j}\,(Du^\varepsilon)_j \tag{2.36}$$

$$\;=\; \sum_{j=1}^N A^\varepsilon_{1j}\,\partial_j\, u^\varepsilon \tag{2.37}$$

$$\;=\; A^\varepsilon_{11}\,\partial_1\, u^\varepsilon + A^\varepsilon_{1\alpha}\,\partial_\alpha\, u^\varepsilon \tag{2.38}$$

avec la convention des indices répétés. L'hypothèse (2.35) est une hypothèse sur la forme quadratique canoniquement associée à A^ε et elle induit en particulier que $A^\varepsilon_{11} = A^\varepsilon e_1 \cdot e_1 \geq \alpha |e_1|^2 = \alpha$, i.e., compte tenu de (2.33)-(2.34):

$$0 < \beta, \quad \beta \geq A^\varepsilon_{11} \geq \alpha \tag{2.39}$$

Il en résulte que $\dfrac{1}{\beta} \leq \dfrac{1}{A^\varepsilon_{11}} \leq \dfrac{1}{\alpha}$, et on obtient ainsi un premier résultat de convergence (faible), au moins pour une suite extraite en η :

$$\frac{1}{A^\eta_{11}(x_1)} \overset{*}{\rightharpoonup} \frac{1}{A_{11}} \quad \text{dans} \quad L^\infty(I) \quad \text{faible} \quad * \,. \tag{2.40}$$

avec l'estimation

$$\alpha \leq A_{11} \leq \beta \tag{2.41}$$

Cela permet de passer à la limite dans (2.36)-(2.38) réécrit sous la forme

$$\partial_1 u^\varepsilon \quad = \quad \frac{1}{A^\varepsilon_{11}} \sigma^\varepsilon_1 - \frac{A^\varepsilon_{1\alpha}}{A^\varepsilon_{11}} \partial_\alpha u^\varepsilon \tag{2.42}$$

avec $\partial_1 u^\varepsilon \overset{w}{\rightharpoonup} \partial_1 u$ dans $L^2(\Omega)$ faible tandis que le dernier terme est aussi

$$\partial_\alpha \Big(\frac{A^\varepsilon_{1\alpha}(x_1)}{A^\varepsilon_{11}(x_1)} u^\varepsilon \Big) \tag{2.43}$$

Les résultats déjà obtenus ont montré que $u^\varepsilon \overset{w}{\rightharpoonup} u$ dans $H^1_0(\Omega)$ faible, de sorte que le théorème de Rellich entraîne que $u^\varepsilon \to u$ dans $L^2(\Omega)$ fort. On peut maintenant passer à la limite dans (2.43). En effet, pour une suite extraite en $\varepsilon = \eta$, l'encadrement (2.39) et le résultat de convergence (2.40) entraînent que

$$\frac{A^\eta_{1\alpha}(x_1)}{A^\eta_{1\alpha}(x_1)} \overset{*}{\rightharpoonup} \frac{A_{1\alpha}(x_1)}{A_{1\alpha}(x_1)} \quad = \quad B_{1\alpha} \quad \text{dans} \quad L^\infty(I) \quad \text{faible} \quad * \tag{2.44}$$

où $A_{1\alpha}$ est défini par l'égalité $A_{1\alpha} = B_{1\alpha} A_{11}$. On en déduit que

$$\frac{A^\eta_{1\alpha}(x_1)}{A^\eta_{1\alpha}(x_1)} u^\eta \overset{w}{\rightharpoonup} \frac{A_{1\alpha}(x_1)}{A_{1\alpha}(x_1)} u \quad \text{dans} \quad \mathscr{D}'(\Omega) \quad ,$$

puis, par continuité de la dérivation au sens des distributions:

$$\partial_\alpha \Big(\frac{A^\eta_{1\alpha}(x_1)}{A^\eta_{1\alpha}(x_1)} u^\eta \Big) \overset{w}{\rightharpoonup} \partial_\alpha \Big(\frac{A_{1\alpha}(x_1)}{A_{1\alpha}(x_1)} u \Big) \quad \text{dans} \quad \mathscr{D}'(\Omega) \quad .$$

Il reste à montrer que

$$\frac{1}{A^\eta_{11}} \sigma^\eta_1 \overset{w}{\rightharpoonup} \frac{1}{A_{11}} \sigma_1. \tag{2.45}$$

Admettant pour le moment (2.45), on passe à la limite dans (2.42) quand $\varepsilon = \eta \to 0$, soit

$$\partial_1 u = \frac{1}{A_{11}} \sigma_1 \quad - \quad \frac{A_{1\alpha}}{A_{11}} \partial_\alpha u \quad \text{dans} \quad \mathscr{D}'(\Omega) \tag{2.46}$$

i.e. encore $\sigma_1 = A_{11} \partial_1 u + A_{1\alpha} \partial_\alpha u = A_{1j} \partial_j u$. On regarde maintenant σ^ε_β. Par définition:

$$\sigma^\varepsilon_\beta \quad = \quad A^\varepsilon_{\beta j} \partial_j u^\varepsilon = A^\varepsilon_{\beta 1} \partial_1 u^\varepsilon + A^\varepsilon_{\beta\alpha} \partial_\alpha u^\varepsilon \tag{2.47}$$

$$\quad = \quad \frac{A^\varepsilon_{\beta 1}}{A^\varepsilon_{11}} \sigma^\varepsilon_1 + \Big(-\frac{A^\varepsilon_{1\alpha}}{A^\varepsilon_{11}} A^\varepsilon_{\beta 1} + A^\varepsilon_{\beta\alpha} \Big) \partial_\alpha u^\varepsilon \tag{2.48}$$

Le passage à la limite dans (2.47)-(2.48) s'effectue grâce à la Proposition suivante, qui se vérifie à la main:

Proposition 2.6 *Si une suite* $(\psi^\varepsilon(x_1))$ *vérifie*

$$\psi^\varepsilon(x_1) \overset{*}{\rightharpoonup} \psi(x_1) \quad \textit{dans} \quad L^\infty(I) \quad \textit{faible} \quad *$$

et si σ_1 *est la limite (faible) de* σ^ε *dans* $L^2(\Omega)$ *, alors*

$$\psi^\varepsilon(x_1)\,\sigma^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} \psi(x_1)\,\sigma_1 \quad \textit{dans} \quad L^\infty(\Omega) \quad \textit{faible} \quad *$$

En effet, pour $\psi^\eta = \frac{A^\eta_{\beta 1}(x_1)}{A^\eta_{11}(x_1)}$, l'analogue de (2.44) est vrai, soit

$$\frac{A^\eta_{\beta 1}(x_1)}{A^\eta_{\beta 1}(x_1)} \overset{*}{\rightharpoonup} \frac{A_{\beta 1}(x_1)}{A_{\beta 1}(x_1)} \qquad \text{dans} \quad L^\infty(I) \quad \text{faible} \quad *\,. \tag{2.49}$$

et la Proposition 2.6 s'applique avec $\psi^\eta = \frac{A^\eta_{\beta 1}(x_1)}{A^\eta_{\beta 1}(x_1)}$ pour donner

$$\frac{A^\eta_{\beta 1}(x_1)}{A^\eta_{\beta 1}(x_1)}\,\sigma^\eta_1 \overset{*}{\rightharpoonup} \frac{A_{\beta 1}(x_1)}{A_{\beta 1}(x_1)}\,\sigma_1 \quad \text{dans} \quad L^\infty(\Omega) \quad \text{faible}\,*\,.$$

Il en résulte en particulier, pour le second membre de (2.47)-(2.48):

$$(-\frac{A^\eta_{1\alpha}}{A^\eta_{11}}\,A^\eta_{\beta 1} + A^\eta_{\beta\alpha}) \quad \overset{*}{\rightharpoonup} \quad (-\frac{A_{1\alpha}}{A_{11}}\,A_{\beta 1} + A_{\beta\alpha}) \tag{2.50}$$

$$\text{dans} \quad L^\infty(\Omega) \quad \text{faible}\,*\,. \tag{2.51}$$

Mais la régularité (2.32) et l'encadrement (2.41) entraînent, par Rellich et compte tenu de (2.50):

$$(-\frac{A^\eta_{1\alpha}}{A^\eta_{11}}\,A^\eta_{\beta 1} + A^\eta_{\beta\alpha})\,\partial_\alpha u^\eta \tag{2.52}$$

$$\overset{w}{\rightharpoonup} \quad (-\frac{A_{1\alpha}}{A_{11}}\,A_{\beta 1} + A_{\beta\alpha})\,\partial_\alpha u \tag{2.53}$$

$$\text{dans} \quad L^2(\Omega) \quad \text{faible.} \tag{2.54}$$

et finalement, le passage à la limite dans (2.47) a lieu pour toute la suite, à cause de l'unicité de la limite connue

$$\sigma^\varepsilon_\beta \overset{w}{\rightharpoonup} \sigma_\beta = A_{\alpha j}\,\partial_j u \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega) \quad \text{faible.}$$

Remarque 2.7 *La conjecture selon laquelle la suite des matrices inverses* $(A^{\varepsilon-1})$ *convergerait vers l'inverse de la limite faible est fausse, comme le montre le contre-exemple qui suit.*

2.5 Contre-exemple à la conjecture

Pour fixer les idées, on choisit $N = 2$ et on considère la suite de matrices donnée par:

$$\begin{pmatrix} a^\varepsilon(x_1) & 0 \\ 0 & a^\varepsilon(x_1) \end{pmatrix}, \quad \alpha \leq a^\varepsilon_{ij} \leq \beta.$$

Soit:

$$\frac{1}{a^\varepsilon} \overset{*}{\rightharpoonup} \frac{1}{\underline{a}} \qquad \text{dans} \quad L^\infty(\Omega) \quad \text{faible} \quad *; \tag{2.55}$$

$$a^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} \bar{a} \qquad \text{dans} \quad L^\infty(\Omega) \quad \text{faible} \quad *\,. \tag{2.56}$$

Alors:

$$(A^\varepsilon)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^\varepsilon} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^\varepsilon} \end{pmatrix} \overset{*}{\rightharpoonup} \begin{pmatrix} \frac{1}{\underline{a}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\underline{a}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{a} & 0 \\ 0 & \underline{a} \end{pmatrix}^{-1} \quad \text{dans} \quad L^\infty(\Omega) \quad \text{faible} \quad * \tag{2.57}$$

La conjecture dit que $\sigma = \underline{a}\, Du$. En effet, rappelons que: $A^\varepsilon_{11} = a^\varepsilon$, $A^\varepsilon_{12} = A^\varepsilon_{21} = 0$, $A^\varepsilon_{22} = a^\varepsilon$, et que $\dfrac{1}{A^\varepsilon_{11}} \overset{*}{\rightharpoonup} \dfrac{1}{A_{11}}$ dans $L^\infty(\Omega)$ faible * , de sorte que $A_{11} = \underline{a}$. De plus: $0 = \frac{A^\varepsilon_{12}}{A^\varepsilon_{11}} \overset{*}{\rightharpoonup} \frac{A_{12}}{A_{11}} = 0$ dans $L^\infty(\Omega)$ faible * , d'où $A_{12} = 0$. On obtient de même que $A_{21} = 0$. Il reste à étudier la limite de $A^\varepsilon_{22} - \frac{A^\varepsilon_{12}\, A^\varepsilon_{21}}{A^\varepsilon_{11}}$. Le premier terme est a^ε qui vérifie (2.56). On sait de plus que le deuxième terme converge au sens suivant:

$$\frac{A^\varepsilon_{12}\, A^\varepsilon_{21}}{A^\varepsilon_{11}} \overset{*}{\rightharpoonup} \frac{A_{12}\, A_{21}}{A_{11}} = 0 \quad \text{dans} \quad L^\infty \quad \text{faible} \quad * \tag{2.58}$$

De (2.58) et (2.57) il résulte aussitôt que $A_{22} = \bar{a}$. En conclusion, on a montré que

$$\sigma = \begin{pmatrix} \underline{a} & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix} Du \neq \underline{a}\, Du \tag{2.59}$$

dès que $\partial_2 u \neq 0$, et la conjecture est fausse.

Remarque 2.8 *En particulier, on voit ainsi que l'homogénéisé d'un matériau n'est pas nécessairement isotrope. En effet, on rappelle qu'un matériau de loi de comportement* $q = A\,\lambda$ *est isotrope si et seulement si* $|q| = c\,|\lambda|$, $\forall \lambda$. *Autrement dit, la matrice associée est proportionnelle à la matrice identité (c'est la matrice d'une homothétie), soit* $A = a\,I$ *avec* $a \in L^\infty(\Omega)$.

Ici, on a vu que l'homogénéisé est caractérisé par la relation (2.59) où $\underline{a} \neq \bar{a}$ en général.

2.6 Démonstration du Lemme technique

On rappelle le résultat laissé en plan:

Lemme 2.9 *On fait les hypothèses suivantes:*

$$u^\varepsilon \overset{w}{\rightharpoonup} u \qquad \text{dans} \quad H_0^1(\Omega) \quad \text{faible}; \tag{2.60}$$

$$-\operatorname{div}(A^\varepsilon\, Du^\varepsilon) = f \qquad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega); \tag{2.61}$$

$$\sigma^\varepsilon \overset{w}{\rightharpoonup} \sigma \qquad \text{dans} \quad L^2(\Omega)^N \quad \text{faible}; \tag{2.62}$$

$$A^\varepsilon(x) \;=\; A^\varepsilon(x_1). \tag{2.63}$$

Alors, si $\psi^\varepsilon = \psi^\varepsilon(x_1)$ *vérifie*

$$\psi^\varepsilon(x_1) \overset{*}{\rightharpoonup} \psi(x_1) \quad \text{dans} \quad L^\infty(\Omega) \quad \text{faible}^*$$

on a:

$$\psi^\varepsilon(x_1)\,\sigma_1^\varepsilon \overset{w}{\rightharpoonup} \psi(x_1)\,\sigma_1 \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega) \quad \text{faible}. \tag{2.64}$$

Remarque 2.10 *Pour simplifier le raisonnement, on fait l'hypothèse supplémentaire que* $f \in L^2(\Omega)$ *, ce qui permet de remplacer* (2.60), (2.61), (2.62) *par*

$$f \;\in\; L^2(\Omega); \tag{2.65}$$

$$-\operatorname{div}\sigma^\varepsilon \;=\; f; \tag{2.66}$$

$$\sigma_1^\varepsilon \rightharpoonup \sigma_1 \qquad L^2(\Omega) \quad \text{faible} \tag{2.67}$$

et on veut alors montrer que (2.64) *est vrai.*

Preuve. On considère un pavé $Q = I_1 \times Q' \subset \Omega$ ou I_1 est un intervalle de $\mathbb{R}$ destiné à contenir la variable x_1 . Alors, (2.67) entraîne

$$\sigma_1^\varepsilon \overset{w}{\rightharpoonup} \sigma_1 \qquad L^2(Q) \quad \text{faible} \tag{2.68}$$

et on en déduit que $\partial_1\sigma_1^\varepsilon = f - \partial_\alpha\sigma_\alpha^\varepsilon$ est borné dans $L^2(I_1;\, H^{-1}(Q'))$. A cet endroit, on fait intervenir un théorème dû à J.P. Aubin et J.L. Lions

Théorème 2.11 *Soit* V_0 *,* V_1 *deux espaces de Banach "convenables" avec l'inclusion compacte* $V_0 \subset V_1$ *. Si* (u^ε) *est une suite bornée dans* $L^2(0,T;\, V_0)$ *et si* $\partial_t u^\varepsilon$ *est borné dans* $L^2(0,T;\, V_1)$ *, alors* u^ε *est dans un compact de* $L^2(0,T;\, V_1)$ *(et même dans un compact de l'espace interpolé* $L^2(0,T;\, (V_0,\, V_1)_\theta$ *, pour un réel* $\theta \in]0,1]$ *).*

Du Théorème 2.11, on déduit que

$$\sigma^\varepsilon \to \sigma, \quad L^2(I_1,\, H^{-1}(Q')) \quad \text{fort}$$

Soit $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(Q')$. On a

$$\int_\Omega \psi^\varepsilon(x_1)\,\sigma_1^\varepsilon\,\varphi(x') =< \sigma_1^\varepsilon,\, \psi^\varepsilon(x_1)\,\varphi(x') >$$

où l'expression $\psi^\varepsilon(x_1)\,\varphi(x')$ est dans $L^2(I_1,\, H_0^1(Q'))$. ■

Remarque 2.12 *On montre de même que*

$$\psi^\varepsilon(x_i)\,\sigma_i^\varepsilon \overset{w}{\rightharpoonup} \psi(x_i)\,\sigma_i, \quad \forall i,$$

mais ce résultat est faux pour $\psi^\varepsilon(x_1)\,\sigma_2^\varepsilon$.

3 COMPACITÉ PAR COMPENSATION

3.1 Bilan

On commence par une synthèse des résultats acquis.

Ainsi, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, (A^ε) est une suite de matrices de $L^\infty(\Omega)^{N\times N}$, uniformément bornée dans $L^\infty(\Omega)^{N\times N}$ par une constante $\beta > 0$, équicoercive de constante de coercivité $\alpha > 0$, i.e.:

$$\begin{aligned} \|A^\varepsilon\|_{L^\infty} &\leq \beta, &(3.1)\\ A^\varepsilon &\geq \alpha\, I. &(3.2)\end{aligned}$$

Soit $f \in H^{-1}(\Omega)$ et soit u^ε solution de:

$$\begin{aligned} u^\varepsilon &\in H_0^1(\Omega); &(3.3)\\ -\operatorname{div}(A^\varepsilon\, Du^\varepsilon) &= f, \quad \mathcal{D}'(\Omega). &(3.4)\end{aligned}$$

Alors, sous les hypothèses (3.1)-(3.2), la suite des normes $(\|u^\varepsilon\|_{H_0^1})$ est bornée et il existe une sous-suite $(u^{\varepsilon'})$ vérifiant

$$\begin{aligned} u^{\varepsilon'} &\overset{w}{\rightharpoonup} u, \qquad H_0^1(\Omega) \quad \text{faible}; &(3.5)\\ \sigma^{\varepsilon'} = A^{\varepsilon'}\, Du^{\varepsilon'} &\overset{w}{\rightharpoonup} \sigma, \qquad L^2(\Omega)^N \quad \text{faible}. &(3.6)\end{aligned}$$

De (3.4) et (3.5)-(3.6), on déduit que la limite faible σ est solution de l'équation linéaire

$$-\operatorname{div}\sigma = f, \quad \mathcal{D}'(\Omega).$$

Mais on ne connaît pas a priori de relation simple entre les limites faibles σ et u (en particulier Du).

On a toutefois établi que pour des suites extraites paramétrées par ε'' , on a le résultat de convergence faible:

$$\begin{aligned} A^{\varepsilon''} &\overset{*}{\rightharpoonup} \bar{A} \qquad L^\infty(\Omega)^{N\times N} \quad \text{faible} \quad *; &(3.7)\\ A^{\varepsilon''-1} &\overset{*}{\rightharpoonup} \underline{A} \qquad L^\infty(\Omega)^{N\times N} \quad \text{faible} \quad * &(3.8)\end{aligned}$$

et que dans le cas particulier où $N = 1$, on a la relation explicite $\sigma = \underline{A}\,\dfrac{du}{dx}$. Hormis ce cas exceptionnel, le tenseur limite σ ne coïncide pas en général avec $\bar{A}\, Du$ ou avec $\underline{A}\, Du$, comme on l'a vérifié pour les matériaux en couches dans le paragraphe précédent.

3.2 Position du problème

Le problème est désormais posé de la fermeture de la suite des problèmes (3.3)-(3.4), qui équivaut à celui de la fermeture de la suite des matrices A^ε . Plus précisément, à tout couple de constantes > 0 , $(\alpha, \gamma) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$, on associe la classe de matrices

$$\mathscr{M}(\alpha, \gamma) = \{A \in L^\infty(\Omega)^{N\times N} : \quad A(x) \geq \alpha\, I, \quad (A)^{-1} \geq \gamma\, I\} \tag{3.9}$$

Remarque 3.1 *L'ensemble de matrices* (3.9) *est non vide,* $\forall\alpha > 0$, $\forall\gamma > 0$ *, car si* $A \in L^\infty(\Omega)^{N\times N}$ *est coercive au sens où* $A(x) \geq \alpha\, I$ *, p.p. dans* Ω *, alors son inverse* A^{-1} *existe p.p. dans* Ω *.*

On se propose de montrer que $\mathscr{M}(\alpha, \gamma)$ est stable pour le processus étudié. Pour cela, on commence par établir que

Proposition 3.2 *Pour toute matrice* $A \in \mathscr{M}(\alpha, \gamma)$ *, on a les estimations:*

$$\|A\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{\gamma}; \tag{3.10}$$

$$A \geq \gamma\, I \tag{3.11}$$

Preuve. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^N$. On pose $\xi = A\,\lambda$. Alors, par définition de γ :

$$\gamma\,|\xi|^2 \leq A^{-1}\xi\,\xi = \lambda\cdot\xi \leq |\lambda|\ |\xi|$$

d'où il résulte que $|\xi| \leq \frac{1}{\gamma}|\lambda|$, i.e. (3.10). De plus, si $A \geq \alpha\, I$ et $\|A\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{\gamma}$, alors $A \geq \alpha\,\gamma^2$. En effet: de la relation $\xi = A\,\lambda$, on déduit que $A^{-1}\,\xi\cdot\xi = \lambda\cdot\xi$ et $A\,\lambda\cdot\lambda = \lambda\cdot\xi$ avec $|\xi| \leq \frac{1}{\gamma}|\lambda|$. De cette dernière estimation et de la coercivité de A , il résulte que:

$$A^{-1}\,\xi\cdot\xi = A\,\lambda\cdot\lambda \geq \alpha\,|\lambda|^2 \geq \alpha\gamma^2\,|\xi|^2$$

■

.

On peut désormais énoncer le résultat fondamental:

Théorème 3.3 *De toute suite de matrices* $(A^\varepsilon) \in \mathscr{M}(\alpha, \gamma, \Omega)$ *, on peut extraire une sous- suite* (A^η) *et trouver une matrice* $A^0 \in \mathscr{M}(\alpha, \gamma, \Omega)$ *t.q.* $\forall f \in H^{-1}(\Omega)$ *, les solutions (uniques) de*

$$-\operatorname{div}(A^\eta\, Du^\eta) = f, \quad \mathcal{D}'(\Omega), \tag{3.12}$$

$$u^\eta \in H_0^1(\Omega) \tag{3.13}$$

vérifient

$$u^\eta \overset{w}{\rightharpoonup} u, \qquad H_0^1(\Omega) \quad \textit{faible} \tag{3.14}$$

$$A^\eta\, Du^\eta \overset{w}{\rightharpoonup} A^0\, Du, \qquad L^2(\Omega)^N \quad \textit{faible} \tag{3.15}$$

où u est solution de

$$
\begin{aligned}
-\operatorname{div}(A^0\, Du) &= f, \quad \mathcal{D}'(\Omega), && (3.16)\\
u &\in H_0^1(\Omega) && (3.17)
\end{aligned}
$$

En outre:

$$A^\eta\, Du^\eta \cdot Du^\eta \overset{w}{\rightharpoonup} A^0\, Du \cdot Du \quad \mathcal{D}'(\Omega),$$

au sens de la topologie faible $\sigma(L^1(\Omega), \mathscr{C}_c^\infty(\Omega))$

Remarque 3.4 *Avec les mêmes notations que plus haut, cela revient à établir l'existence d'une relation entre σ et u à l'aide d'une matrice A^0 sous la forme $\sigma = A^0\, Du$.*

Remarque 3.5 *Le résultat fondamental du Théorème* 3.3 *affirme l'existence d'une suite extraite indexée par η et d'une matrice A^0 vérifiant* (3.12)-(3.17) *pour tout second membre f ayant la régularité suffisante. Autrement dit, on établit ainsi une caractérisation du matériau "limite" au moyen de la suite extraite en η et de la matrice A^0.*

Remarque 3.6 *Le choix du paramètre η est essentiel. En effet: soit $A_{2n} = 2\,I$, $A_{2n+1} = I$. Alors la suite des solutions (u_n) est donnée par*

$$-\Delta\, u_{2n} = \frac{f}{2}, \quad -\Delta\, u_{2n+1} = f$$

ce qui montre bien la nécessité d'extraire.

Remarque 3.7 *La limite est unique: plus précisément, elle ne dépend pas de la suite extraite (u^η) et on a ainsi défini une nouvelle topologie, dite "de la H-convergence".*

Le résultat principal est contenu dans le

Théorème 3.8 *La classe $\mathscr{M}(\alpha, \beta, \Omega)$ est compacte pour la topologie de la H-convergence.*

Definition 3.9 *Une suite de matrices (A^ε) H-converge vers une matrice A^0, et on note $A^\varepsilon \overset{H}{\rightharpoonup} A^0$, si et seulement si: $\forall f \in H^{-1}(\Omega)$, les solutions du problème* (3.12)-(3.13) *avec $\eta = \varepsilon$ vérifient*

$$
\begin{aligned}
u^\varepsilon &\overset{w}{\rightharpoonup} u && H_0^1(\Omega) \quad \textit{faible;} && (3.18)\\
A^\varepsilon\, Du^\varepsilon &\overset{w}{\rightharpoonup} A^0\, Du && L^2(\Omega)^N \quad \textit{faible;} && (3.19)
\end{aligned}
$$

où u est solution de (3.16)-(3.17).

Remarque 3.10 *On verra dans la suite que la topologie de la H-convergence est associée à une métrique. Ainsi, on peut désormais passer à la limite dans le produit $\sigma^\varepsilon = A^\varepsilon\, Du^\varepsilon$ vu comme produit de dualité entre la topologie de la H-convergence pour la suite (A^ε) et la topologie faible dans $L^2(\Omega)^N$ pour la suite (u^ε).*

Remarque 3.11 *La matrice A^0 calculée par H-convergence est indépendante du second membre $f \in H^{-1}(\Omega)$. On va voir qu'elle est aussi indépendante de l'ouvert Ω et des conditions aux limites.*

Proposition 3.12 *La matrice* A^0 *calculée par H-convergence est indépendante de l'ouvert* Ω. *Plus précisément, Si* (A^ε) *est une suite de matrices de* $\mathscr{M}(\alpha, \gamma, \Omega)$ *H-convergente vers* A^0 *dans* $\mathscr{M}(\alpha, \gamma, \Omega)$ *et si* $\omega \subset \Omega$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^N$, *alors la suite* (A^ε) *H-converge vers la même matrice* A^0 *dans* $\mathscr{M}(\alpha, \gamma, \omega)$.

Proposition 3.13 *La matrice* A^0 *calculée par H-convergence est indépendante du choix des conditions aux limites. Plus précisément, soit* (A^ε) *une suite de matrices de* $\mathscr{M}(\alpha, \gamma, \Omega)$ *H-convergente vers* A^0, *soit* (v^ε) *une suite qui vérifie:*

$$v^\varepsilon \overset{w}{\rightharpoonup} v \qquad H^1(\Omega) \quad \textit{faible}, \tag{3.20}$$
$$-\operatorname{div}(A^\varepsilon\, Dv^\varepsilon) = f^\varepsilon \overset{w}{\rightharpoonup} f \qquad H^{-1}(\Omega) \quad \textit{faible}. \tag{3.21}$$

Alors, toute la suite (v^ε) *vérifie*

$$A^\varepsilon\, Dv^\varepsilon \overset{w}{\rightharpoonup} A^0\, Dv, \quad L^2(\Omega)^N \quad \textit{faible}.$$

De plus, l'énergie associée converge au sens suivant:

$$A^\varepsilon\, Dv^\varepsilon \cdot Dv^\varepsilon \overset{w}{\rightharpoonup} A^0\, Dv \cdot Dv, \qquad \mathcal{D}'(\Omega) \quad \textit{faible} \tag{3.22}$$

où l'on rappelle que $\mathcal{D}'(\Omega)$ *est la topologie faible* $\sigma(L^1(\Omega), \mathscr{C}_c^\infty(\Omega))$

Remarque 3.14 *On montre un résultat analogue en théorie de la thermo-conduction ou de la thermo-élasticité, la principale modification venant de l'introduction de la température* θ^ε *dans les équations du problème initial qui deviennent:*

$$-\operatorname{div}(A^\varepsilon\, Du^\varepsilon + \beta^\varepsilon\, \theta^\varepsilon) \;=\; f, \tag{3.23}$$
$$-\operatorname{div}(K^\varepsilon\, D\theta^\varepsilon) - \beta^\varepsilon\, Du^\varepsilon \;=\; g. \tag{3.24}$$

On introduit ainsi un couplage entre les matrices $A^\varepsilon \in (L^\infty)^{N\times N}$, $K^\varepsilon \in (L^\infty)^{N\times N}$, *et le vecteur* $\beta^\varepsilon \in (L^\infty)^N$. *Les conditions aux limites sont représentées par les appartenances* $u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$, $\theta^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$. *Alors, en multipliant les deux membres des équations* (3.23)-(3.24) *par* Du^ε *et* $D\theta^\varepsilon$ *resp. et en intégrant sur* Ω, *on obtient les égalités d'énergie:*

$$\int_\Omega A^\varepsilon\, Du^\varepsilon \cdot Du^\varepsilon + \int_\Omega \beta^\varepsilon\, Du^\varepsilon \cdot \theta^\varepsilon \;=\; \langle f,\, u^\varepsilon\rangle; \tag{3.25}$$
$$\int_\Omega K^\varepsilon\, D\theta^\varepsilon \cdot D\theta^\varepsilon - \int_\Omega \beta^\varepsilon\, Du^\varepsilon \cdot \theta^\varepsilon \;=\; \langle g,\, \theta^\varepsilon\rangle. \tag{3.26}$$

On en déduit les estimations a priori qui permettent de conclure comme plus haut.

La Proposition 3.13 signifie qu'il y a convergence de l'énergie (3.22) au sens suivant:

$$\int_\Omega \varphi\, A^\varepsilon\, Dv^\varepsilon \cdot Dv^\varepsilon\, dx \to \int_\Omega \varphi\, A^0\, Dv \cdot Dv\, dx, \quad \forall \phi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$$

qui coïncide avec la convergence faible $\sigma(L^1(\Omega), L^\infty)$, et pas seulement au sens des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$. Ce fait est une conséquence du résultat de régularité dû à Meyers[4] qui suit:

Théorème 3.15 *Les solutions du problème*

$$-\operatorname{div}(A^\varepsilon)\,Du^\varepsilon = f, \qquad \mathcal{D}'(\Omega); \tag{3.27}$$
$$u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega). \tag{3.28}$$

sont bornées dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ *pour un certain* $p > 2$ *et* Ω *suffisamment régulier dès que* f *est un peu mieux que* $H^{-1}(\Omega)$ *.*

Remarque 3.16 *On pourra se reporter à la démonstration de De Giorgi dans [3, 9] pour la spécification des restrictions.*

Remarque 3.17 *Le Théorème* 3.15 *se généralise aux systèmes et aux équations différentielles d'ordres supérieurs sous des hypothèses de très forte ellipticité (en particulier plus fortes que les hypothèses usuelles de Legendre-Hadamard). Plus précisément, on peut généraliser au problème suivant: Trouver* v *solution de*

$$-\operatorname{div}(A\,Dv) = g, \qquad v \in H_0^1(\Omega)^m; \tag{3.29}$$
$$\textit{avec} \qquad A(x)\,\xi\cdot\xi \geq \alpha\,|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^{N\times m}. \tag{3.30}$$

Le Théorème 3.15 nécessite en particulier que Ω ait un bord régulier. Soit donc Ω borné de bord régulier, $A \in \mathscr{M}(\alpha,\,\gamma,\,\Omega)$. Soit G , l'opérateur de Green défini par $G: \quad f \in H^{-1}(\Omega) \mapsto u = G\,f \in H_0^1(\Omega)$ solution de

$$-\operatorname{div}(A\,Du) = g, \quad \mathcal{D}'(\Omega).$$

L'existence de G résulte du théorème de Lax-Milgram qui dit que $G \in \mathscr{L}(H^{-1}(\Omega),\,H_0^1(\Omega))$ et que c'est un isomorphisme de $H^{-1}(\Omega)$ sur $H_0^1(\Omega)$. On a l'estimation

$$\|G\|_{\mathcal{L}(H^{-1},\,H_0^1)} \leq \frac{1}{\alpha}.$$

Par le Théorème 3.15, il existe $p_0 > 2$, t.q. G induit un isomorphisme

$$G_p: \quad W^{-1,p}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega)$$

$\forall p$ t.q. $p_0' < p < p_0$, $p_0 = p_0(\alpha,\,\gamma,\,\Omega)$ et

$$\|G\|_{\mathscr{L}(W^{-1,p},\,W_0^{1,p})} \leq C = C(\Omega,\,\alpha,\,\gamma,\,p).$$

Remarque 3.18 *L'espace dual* $H^{-1}(\Omega)$ *peut être défini par*

$$f \in H^{-1}(\Omega) \iff f = -\operatorname{div}(g), \quad g \in L^2(\Omega)^N.$$

De même, on a

$$f \in W^{-1,p}(\Omega) \iff f = -\operatorname{div}(g), \quad g \in L^p(\Omega)^N.$$

Si $g \in L^p(\Omega)^N$ *,* $p > 2$ *, alors*

$$u = G\,g \in W^{1,p}(\Omega), \quad p_0' < p < p_0 < +\infty.$$

Alors, le produit $A^\eta\,Du^\eta \cdot Du^\eta$ *, avec* $A^\eta \in (L^\infty)^{N\times N}$ *,* $Du^\eta \in L^p(\Omega)^N$ *, est borné dans* $L^{p/2}(\Omega)$ *, donc convergeant dans* $L^{p/2}(\Omega)$ *faible.*

Remarque 3.19 *Dans le cas particulier où les coefficients sont réguliers, alors* $p_0 = +\infty$ *dans la Remarque* 3.18. *En effet,* $-\Delta u = f \in W^{-1,p}(\Omega)$ *dès que* $u\Big|_{\partial\Omega} = 0$ *et que* Ω *est régulier.*

Remarque 3.20 *L'opérateur* $G_p : W^{-1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\Omega)$ *introduit plus haut est défini sur l'espace* $W^{-1,p}(\Omega)$ *qui est distinct de* $W^{-1,p'}(\Omega)$. *En effet: soit* u *solution de*

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(A\,Du) &= f; && (3.31)\\ u &\in W_0^{1,p}(\Omega). && (3.32) \end{aligned}$$

Alors, le second membre f *est dans* $W^{-1,p}(\Omega)$.

On a le résultat local:

Théorème 3.21 *Soit* $A \in \mathscr{M}(\alpha, \gamma, \Omega)$, $B_{2R} \subset \Omega$ *une boule ouverte de rayon* $2R > 0$ *avec* $0 < R < 1$ *et soit* u *solution de*

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(A\,Du) &= f \in \mathcal{D}'(B_{2R}); && (3.33)\\ u &\in H^1(B_{2R}). && (3.34) \end{aligned}$$

Alors, il existe $p_0 = p_0(\alpha, \gamma)$ *t.q.* $\forall p < p_0$ *:*

$$\begin{aligned} f \in W^{-1,p}(B_{2R}) &\mapsto u \in W^{1,p}(B_R); && (3.35)\\ \|u\|_{W^{1,p}(B_R)} &\leq C(\alpha, \gamma, p)\,\|f\|_{W^{-1,p}(B_{2R})} && (3.36) \end{aligned}$$

Preuve. C'est une conséquence du Théorème 3.15 appliqué avec $\varphi\, u$, $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(B_{2R})$, $\varphi\Big|_{\partial B_R} = 1$. ■

Remarque 3.22 *Dans certains cas, on peut expliciter la matrice homogénéisée. Ainsi, pour*

$$A^\varepsilon = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad \textit{ou} \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

on peut obtenir

$$A^0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

où $\mu = \dfrac{\lambda_2 + \lambda_3}{2}$ *est la moyenne arithmétique.*

4 APPLICATION: LE LEMME DIVERGENCE-ROTATIONNEL

Dans ce paragraphe, on se propose de développer un cas particulier très utile dans les passages à la limite non linéaires.

4.1 Le résultat

On commence par énoncer le résultat principal dans le

Théorème 4.1 *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un ouvert borné. Soit*

$$\sigma^\varepsilon \stackrel{w}{\rightharpoonup} \sigma, \qquad L^2(\Omega)^N \quad \textit{faible}, \tag{4.1}$$

$$g^\varepsilon \stackrel{w}{\rightharpoonup} g, \qquad L^2(\Omega)^N \quad \textit{faible}, \tag{4.2}$$

avec en outre:

$$\mathrm{div}\,(\sigma^\varepsilon) \qquad \textit{compact dans} \quad H^{-1}(\Omega), \tag{4.3}$$

$$\mathrm{rot}\,(g^\varepsilon) \qquad \textit{compact dans} \quad H^{-1}(\Omega)^{N\times N}. \tag{4.4}$$

Alors:

$$\sigma^\varepsilon \cdot g^\varepsilon = \sum_{i=1}^N \sigma_i^\varepsilon \, g_i^\varepsilon \stackrel{w}{\rightharpoonup} \sigma \cdot g = \sum_{i=1}^N \sigma_i \, g_i \quad \mathcal{D}'(\Omega)$$

où l'on rappelle que la convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ *signifie que*

$$\forall \varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega), \qquad \int_\Omega (\sigma^\varepsilon \cdot g^\varepsilon)\, \varphi \, dx \to \int_\Omega (\sum_{i=1}^N \sigma_i \, g_i)\, \varphi \, dx$$

Remarque 4.2 *Moyennant une hypothèse supplémentaire, on peut établir une réciproque (cf la Remarque* 4.4*).*

Remarque 4.3 *Les hypothèses sur* $\mathrm{div}\,(\cdot)$ *et* $\mathrm{rot}\,(\cdot)$ *sont toutes deux indispensables. Plus précisément, si on suppose seulement que:*

$$u^\varepsilon \stackrel{w}{\rightharpoonup} u, \quad L^2(\Omega) \quad \textit{faible}$$

alors, la limite de $|u^\varepsilon|^2$ *dans* $\mathscr{D}'(\Omega)$ *n'est pas* $|u|^2$ *en général. En fait, la propriété essentielle sous-jacente est liée à la compacité de* $\mathrm{div}\,(\sigma^\varepsilon)$ *et de* $\mathrm{rot}\,(g^\varepsilon)$ *.*

Remarque 4.4 *La réciproque évoquée dans la Remarque* 4.2 *peut s'énoncer comme suit: Le théorème* 4.1 *donne la forme de l'unique application non linéaire passant à la limite. En général:*

$$\sigma_1^\varepsilon \, g_1^\varepsilon \stackrel{w}{\rightharpoonup} \sigma_1 \, g_1 + \mu_1$$

où μ_1 *est une mesure* $\neq 0$ *. Par contre, si on définit de même les mesures* μ_i *,* $i = 1, \cdots, N$ *, on a* $\sum_{i=1}^N \mu_i = 0$ *.*

Remarque 4.5 *Plus généralement, on considère une fonction* $F: \quad \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, *continue, t.q.*

$$\begin{aligned}
F(\sigma^\varepsilon,\, g^\varepsilon) \overset{w}{\rightharpoonup} F(\sigma,\, g) \qquad & \mathcal{D}'(\Omega) \quad ; & (4.5)\\
\forall(\sigma^\varepsilon,\, g^\varepsilon) \quad t.q. \qquad & \sigma^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} \sigma \qquad L^\infty(\Omega)^N \quad \textit{faible} \quad *; & (4.6)\\
& g^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} g \qquad L^\infty(\Omega)^N \quad \textit{faible} \quad *; & (4.7)\\
\textit{avec} \qquad & \mathrm{div}\,(\sigma^\varepsilon) \quad \textit{compacte dans} \quad H^{-1}(\Omega), & (4.8)\\
& \mathrm{rot}\,(g^\varepsilon) \quad \textit{compacte dans} \quad H^{-1}(\Omega)^{N\times N}. & (4.9)
\end{aligned}$$

Alors

$$F(\sigma,\, g) = c\,\sigma\cdot g + a\cdot\sigma + b\cdot g + d$$

où $c\in\mathbb{R}$, $a,\, b\in\mathbb{R}^N$, $d\in\mathbb{R}$ *sont des constantes. Autrement dit: si* σ *et* g *sont mesurables, alors* $F(\sigma,\, g)$ *est aussi mesurable. Par exemple: si* σ^ε *et* g^ε *sont dans* $L^\infty(\Omega)$ *(resp. bornés), alors* $F(\sigma^\varepsilon,\, g^\varepsilon)$ *est aussi dans* $L^\infty(\Omega)$ *(resp. borné). Ainsi, pour* σ^ε *et* g^ε *convenables, on passe à la limite quand* $\varepsilon\to 0$ *et on obtient*

$$\begin{aligned}
F(\sigma,\, g) &= \lim_{\varepsilon\to 0} F(\sigma^\varepsilon,\, g^\varepsilon) = & (4.10)\\
&= c\,\sigma\cdot g + \quad \textit{terme linéaire} & (4.11)
\end{aligned}$$

et l'expression (4.10)-(4.11) *de la limite est unique au facteur multiplicatif* c *près, de sorte que le Théorème* 4.1 *caractérise la seule fonction non linéaire jouissant de cette propriété.*

4.2 Démonstration du Lemme Divergence-Rotationnel

On commence par un cas particulier: soit

$$g^\varepsilon = Dz^\varepsilon \overset{w}{\rightharpoonup} g \quad H^1(\Omega) \quad \text{faible.}$$

Alors, $\mathrm{rot}\,(g^\varepsilon) = \mathrm{rot}\,(Dz^\varepsilon) = 0$ est évidemment compact dans $H^{-1}(\Omega)$. Toutefois, cette hypothèse n'est pas restrictive, car les difficultés se concentrent dans le terme $\mathrm{rot}\,(\cdot)$. Alors:

$$\begin{aligned}
\sigma^\varepsilon \overset{w}{\rightharpoonup} \sigma, \qquad & L^2(\Omega)^N \quad \text{faible;} & (4.12)\\
\mathrm{div}\,(\sigma^\varepsilon) = f^\varepsilon \to f = \mathrm{div}\,(\sigma) \qquad & H^{-1}(\Omega) \quad \text{fort.} & (4.13)
\end{aligned}$$

En effet, soit $\varphi\in\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$. On a

$$\int_\Omega \varphi\,\sigma^\varepsilon\cdot Dz^\varepsilon \;=\; -\int_\Omega \sigma^\varepsilon\cdot D\varphi\, z^\varepsilon - {}_{H^{-1}}\langle \mathrm{div}\,(\sigma^\varepsilon),\, \varphi\, z^\varepsilon\rangle_{H_0^1} \qquad (4.14)$$

où l'on rappelle que

$$\varphi\, z^\varepsilon \overset{w}{\rightharpoonup} \varphi\, z, \quad H_0^1(\Omega) \quad \text{faible.} \qquad (4.15)$$

De plus, par le théorème de Rellich,

$$z^\varepsilon \to z \quad L^2(\Omega) \quad \text{fort},$$

donc on passe aisément à la limite dans le premier terme du membre de droite de (4.14):

$$\int_\Omega \sigma^\varepsilon \cdot D\varphi\, z^\varepsilon \to \int_\Omega \sigma \cdot D\varphi\, z. \tag{4.16}$$

On reporte (4.15) et (4.16) dans (4.14) pour en déduire que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega \varphi\, \sigma^\varepsilon \cdot Dz^\varepsilon = \int_\Omega \varphi\, \sigma \cdot Dz.$$

Réciproquement, on suppose que

$$F(\sigma^\varepsilon,\, g^\varepsilon) \overset{w}{\rightharpoonup} F(\sigma,\, g)$$

et on se propose de calculer la limite faible $F(\sigma,\, g)$. Pour cela, on se donne une direction $\xi \in \mathbb{R}^N$ et on pose $\sigma^\varepsilon = \sigma_1$ (resp. σ_2), $g^\varepsilon = \xi$ (resp. $-\xi$) si $k\,\varepsilon \le x\cdot\xi < k\,\varepsilon + \dfrac{\varepsilon}{2}$, (resp. $k\,\varepsilon + \dfrac{\varepsilon}{2} \le x\cdot\xi < k\,\varepsilon$) $\forall k \in \mathbb{Z}$. Cela revient à définir $(\sigma^\varepsilon,\, g^\varepsilon)$ comme suit: $\sigma^\varepsilon = \chi^\varepsilon\,\sigma_1 + (1-\chi^\varepsilon)\,\sigma_2$ où χ^ε est définie à partir du prolongement périodique $\bar\chi$ de la fonction caractéristique χ t.q. $\chi(t) = 1$ si $0 \le t < \dfrac{1}{2}$, $\chi(t) = 0$ si $\dfrac{1}{2} \le t < 1$ par $\chi^\varepsilon(x) = \bar\chi(\frac{x\cdot\xi}{\varepsilon})$. Un résultat classique est que

$$\chi^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} \frac{1}{2}, \quad L^\infty(\Omega)^N \quad \text{faible} \quad *$$

On en déduit que

$$\sigma^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} \sigma = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} \qquad L^\infty(\Omega)^N \quad \text{faible} \quad * \tag{4.17}$$

$$g^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} g = 0 \qquad L^\infty(\Omega)^N \quad \text{faible} \quad * \tag{4.18}$$

Plus géréralement, pour $\theta \in]0,\,1[$ fixé, on se donne $\varphi \in \mathscr{C}_c(\mathbb{R})$, affine par morceaux (pratiquement, φ est homothétique à la fonction chapeau), nulle hors de $[0,\,1]$, dont la dérivée φ' prend la valeur constante $\frac{1}{\theta}$ (resp. $-\frac{1}{1-\theta}$) sur $]0,\,\frac{\theta}{2}[$ (resp. sur $]\frac{\theta}{2},\,1[$). Si $\bar\varphi$ est son prolongement périoqique à $\mathbb{R}^3$, on pose $\varphi^\varepsilon(x) = \varepsilon\,\bar\varphi(\frac{x\cdot\xi}{\varepsilon})$, puis on définit $g^\varepsilon = D\varphi^\varepsilon$. σ^ε est défini de manière analogue à l'exemple précédent, avec $\chi(t) = 1$ (resp. 0) si $0 \le t < \theta$ (resp. $\theta \le t < 1$). Désormais

$$\sigma^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} \sigma = \theta\,\sigma_1 + (1-\theta)\,\sigma_2 \qquad L^\infty(\Omega)^N \quad \text{faible} \quad * \tag{4.19}$$

$$g^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} g = 0 \qquad L^\infty(\Omega)^N \quad \text{faible} \quad * \tag{4.20}$$

En effet:

$$g^\varepsilon = D\varphi^\varepsilon = \bar\varphi'(\frac{x\cdot\xi}{\varepsilon})\cdot\xi$$

Soit $(\sigma_1 - \sigma_2)\cdot\xi = 0$. Alors $\operatorname{div}(\sigma^\varepsilon) = 0$ partout dans Ω (incluant les interfaces $\xi = \theta$, $\xi = 1-\theta$.) De plus, on a

$$F(\sigma^\varepsilon, g^\varepsilon) \overset{w}{\rightharpoonup} \theta\, F(\sigma_1, \frac{\xi}{\theta}) + (1-\theta)\, F(\sigma_2, -\frac{\xi}{1-\theta}) = F(\sigma, g)$$

avec $\sigma = \theta\,\sigma_1 + (1-\theta)\,\sigma_2$ et $g = 0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^N$, $\forall \sigma_2$ t.q. $(\sigma_1 - \sigma_2)\cdot\xi = 0$, $\forall\theta \in [0, 1]$. Après dérivation, on vérifie que F est de la forme annoncée.

4.3 Conséquence: la convergence de l'énergie.

On commence par le résultat principal.

Théorème 4.6 *Soit*

$$v^\varepsilon \overset{w}{\rightharpoonup} v, \qquad H^1(\Omega) \quad \textit{faible}, \tag{4.21}$$

$$-\operatorname{div}(A^\varepsilon\, Dv^\varepsilon) = f^\varepsilon \to f, \qquad H^{-1}(\Omega) \quad \textit{fort}. \tag{4.22}$$

On suppose en outre que pour une suite extraite

$$A^{\varepsilon'}\, Dv^{\varepsilon'} = \sigma^{\varepsilon'} \overset{w}{\rightharpoonup} \sigma, \qquad L^2(\Omega)^N \quad \textit{faible}, \tag{4.23}$$

Alors toute la suite vérifie (4.23) *et la limite est unique, donnée par* $\sigma = A^0\, Dv$ *dans* $\mathcal{D}'(\Omega)$. *De plus, le Lemme div-rot montre qu'il y a convergence de l'énergie*

$$\sigma^\varepsilon \cdot Dv^\varepsilon = A^\varepsilon Dv^\varepsilon \overset{w}{\rightharpoonup} \sigma\cdot Dv = A^0\, Dv\cdot Dv, \quad \mathcal{D}'(\Omega)$$

Preuve. On commence par montrer que toute la suite converge au sens de (4.23). Supposons qu'on ait extrait une sous-suite en $\eta > 0$ t.q. il existe des fonctions w_i^η , $i = 1, \cdots, N$, qu'il existe $A^0 \in L^2(\Omega)^{N\times N}$ vérifiant

$$w_i^\eta \overset{w}{\rightharpoonup} x_i, \qquad H^1(\Omega) \quad \text{faible}, \tag{4.24}$$

$$-\operatorname{div}(A^\eta\, Dw_i^\eta) \quad \in \quad \text{compact dans} \quad H^{-1}(\Omega), \tag{4.25}$$

$$A^\eta\, Dw_i^\eta \overset{w}{\rightharpoonup} A^0\, e_i, \qquad L^2(\Omega) \quad \text{faible}. \tag{4.26}$$

L'hypothèse (4.24) pourrait être remplacée par

$$Dw_i^\eta \overset{w}{\rightharpoonup} e_i, \quad L^2(\Omega) \quad \text{faible}. \quad . \tag{4.27}$$

Dans (4.26), la limite faible existe car A^η est bornée dans $L^\infty(\Omega)$ et que Dw_i^η est borné dans $L^2(\Omega)$. Sous les hypothèses (4.24), si u^η est solution de (3.12), on a

$$A^\eta\, Du^\eta \overset{w}{\rightharpoonup} A^0\, Du, \qquad L^2(\Omega) \quad \text{faible}; \tag{4.28}$$

$$A^\eta\, Dv^\eta \overset{w}{\rightharpoonup} A^0\, Dv, \qquad L^2(\Omega) \quad \text{faible}, \tag{4.29}$$

en l'absence de conditions aux limites. Mais $\sigma^\varepsilon = A^\varepsilon\, Dv^\varepsilon$ est borné dans $L^2(\Omega)^N$, donc il existe une sous-suite extraite de la suite en η , notée ε' , telle que

$$\sigma^{\varepsilon'} \overset{w}{\rightharpoonup} \sigma \qquad L^2(\Omega)^N \quad \text{faible} \quad ; \tag{4.30}$$

$$(\sigma^{\varepsilon'} - A^{\varepsilon'}(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \, Dw_i^{\varepsilon'}) \cdot (Dv^{\varepsilon'} - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \, Dw_i^{\varepsilon'}))) \geq 0 \quad \text{p.p.} \tag{4.31}$$

Ce dernier point mérite d'être précisé. En effet: on note $X^{\varepsilon'} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \, Dw_i^{\varepsilon'}$, de sorte que le membre de gauche de l'inégalité (4.31) se réécrit comme

$$(A^{\varepsilon'} \, Dv^{\varepsilon'} - A^{\varepsilon'} \, X^{\varepsilon'}) \cdot (Dv^{\varepsilon'} - X^{\varepsilon'}))$$

qui est une quantité ≥ 0 par l'uniforme ellipticité de $A^{\varepsilon'}$ ($A^{\varepsilon'} \geq \alpha \, I$, $\alpha > 0$). De (4.27) et (4.30) on déduit que

$$A^{\varepsilon'} \, Dv^{\varepsilon'} - A^{\varepsilon'} \, X^{\varepsilon'} \overset{w}{\rightharpoonup} \sigma - A^0 \, (\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \, e_i) \quad L^2(\Omega) \quad \text{faible} \tag{4.32}$$

Dans la suite, on pose

$$\lambda = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \, e_i \tag{4.33}$$

Alors, le même raisonnement montre que le deuxième facteur dans (4.31) converge:

$$Dv^{\varepsilon'} - X^{\varepsilon'} \overset{w}{\rightharpoonup} Dv - \lambda \qquad L^2(\Omega) \quad \text{faible} \tag{4.34}$$

De plus, $\operatorname{rot}(Dv^{\varepsilon'} - X^{\varepsilon'}) \equiv 0$. On applique le Lemme Divergence-Rotationnel pour passer à la limite quand $\varepsilon' \to 0$:

$$(\sigma - A^0 \, \lambda) \cdot (Dv - \lambda) \geq 0, \quad \mathcal{D}'(\Omega) \quad \text{ou p.p.} \quad \textit{p.p.} \tag{4.35}$$

Pour terminer, on se place en un point de Lebesgue, i.e. en un point x_0 fixé hors d'un ensemble exceptionnel de mesure nulle. On écrit que (4.35) est vrai en particulier au point x_0 , soit:

$$(\sigma(x_0) - A^0(x_0) \, \lambda) \cdot (Du(x_0) - \lambda) \geq 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^N. \tag{4.36}$$

On en déduit que

$$\sigma(x_0) = A^0 \, Du(x_0). \tag{4.37}$$

En effet: avec le choix $\lambda = Du - t \, \mu$, $\mu \in \mathbb{R}^N$, $t > 0$, de λ dans (4.36), on obtient

$$(\sigma(x_0) - A^0(x_0) \, Du(x_0) + A^0 \, t \, \mu) \cdot (t \, \mu) \geq 0, \quad \forall t > 0, \forall \mu \in \mathbb{R}^N. \tag{4.38}$$

On divise le membre de gauche de (4.38) par $t > 0$ et on fait tendre $t \to 0$ dans le résultat, ce qui donne:

$$(\sigma(x_0) - A^0(x_0) \, Du(x_0)) \cdot \mu \geq 0, \quad \forall \mu \in \mathbb{R}^N. \tag{4.39}$$

On change μ en $-\mu$ dans (4.39) pour conclure que (4.37) est vrai en tout point de Lebesgue x_0 , donc que $\sigma = A^0 \, Du$. D'autre part, la limite ne dépend pas du choix de la suite exrtraite, donc toute la suite en η converge. En particulier, pour tout suite extraite η :

$$A^\eta \, Du^\eta \overset{w}{\rightharpoonup} A^0 \, Du, \qquad L^2(\Omega)^N \quad \text{faible}, \tag{4.40}$$

$$A^\eta \, Dv^\eta \overset{w}{\rightharpoonup} A^0 \, Dv, \qquad L^2(\Omega)^N \quad \text{faible}. \tag{4.41}$$

Pour terminer, il reste à montrer qu'il existe une suite extraite η t.q. $\forall i = 1, \cdots, N$, il existe w_i^η solution de

$$-\operatorname{div}(A^\eta w_i^\eta) \qquad \text{compact dans} \quad H^{-1}(\Omega), \tag{4.42}$$
$$A^\eta Dw_i^\eta \overset{w}{\rightharpoonup} A^0 e_i, \qquad L^2(\Omega)^N \quad \text{faible.} \tag{4.43}$$

Or, on vérifie que $A^0 \in L^\infty(\Omega)$ est coercive. En effet, supposons A^η construite t.q. $A^\eta \overset{\text{H}}{\rightharpoonup} A^0$. Alors, pour

$$z^\eta = \sum_{i=1}^N \lambda_i w_i^\eta, \quad \lambda \in \mathbb{R}^N, \tag{4.44}$$

on obtient:

$$Dz^\eta \overset{w}{\rightharpoonup} \sum_{i=1}^N \lambda_i e_i = \lambda \qquad L^2(\Omega)^N \quad \text{faible;} \tag{4.45}$$
$$\int_\Omega \varphi A^\eta Dz^\eta \cdot Dz^\eta \, dx \geq \alpha \int_\Omega |Dz^\eta|^2 \varphi \, dx, \qquad \forall \varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega), \quad \varphi \geq 0. \tag{4.46}$$

On passe à la limite dans (4.46) quand $\eta \to 0$ grâce au Lemme Divergence-Rotationnel. En effet: $\operatorname{div}(A^\eta Dz^\eta)$ a le bon comportement par hypothèse (4.42), compte tenu de la définition (4.44), et (4.45) entraîne

$$A^\eta Dz^\eta \overset{w}{\rightharpoonup} A^0 \lambda, \quad L^2(\Omega)^N \quad \text{faible.} \tag{4.47}$$

Il en résulte que

$$\lim_{\eta \to 0} \int_\Omega \varphi A^\eta Dz^\eta \cdot Dz^\eta \, dx = \int_\Omega A^0 \lambda \cdot \lambda \, dx \tag{4.48}$$
$$\geq \liminf_{\eta \to 0} \alpha \int_\Omega |Dz^\eta|^2 \varphi \, dx \geq \alpha \int_\Omega |\lambda|^2 \varphi \, dx, \tag{4.49}$$
$$\forall \varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega), \quad \varphi \geq 0. \tag{4.50}$$

Faisant varier $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega), \quad \varphi \geq 0$, on obtient

$$A^0(x)\lambda \cdot \lambda \geq \alpha |\lambda|^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}^N, \qquad \text{p.p. en} \quad x \in \Omega,$$

ce qui équivaut à $A^0(x) \geq \alpha I$, p.p. dans Ω. Ceci montre en particulier que $A^0(x)$ est inversible, p.p. dans Ω. Montrons que l'inverse $(A^0)^{-1}$ est équicoercive. Pour cela, on remarque que la suite des inverses $(A^\eta)^{-1}$ étant équicoercive de constante $\gamma > 0$, on a aussi

$$\int_\Omega \varphi A^\eta z^\eta \cdot z^\eta \, dx = \int_\Omega \varphi (A^\eta)^{-1} \sigma^\eta \cdot \sigma^\eta \, dx \tag{4.51}$$
$$\geq \gamma \int_\Omega \varphi |\sigma^\eta|^2 \tag{4.52}$$

et il suffit de passer à la limite en $\eta \to 0$ car (4.47) entraîne, par une nouvelle application du Lemme Divergence-Rotationnel:

$$\lim_{\eta\to 0} \quad \int_\Omega \varphi\, A^\eta\, z^\eta \cdot z^\eta\, dx = \int_\Omega \varphi\, \sigma \cdot \lambda\, dx \tag{4.53}$$

$$= \lim_{\eta\to 0} \int_\Omega \varphi\, (A^\eta)^{-1}\, \sigma^\eta \cdot \sigma^\eta\, dx \geq \liminf_{\eta\to 0} \gamma \int_\Omega \varphi\, |\sigma^\eta|^2 \geq \int_\Omega \varphi\, |\sigma|^2 \tag{4.54}$$

avec $\sigma = A^0\lambda$. Donc, (4.53) se réécrit

$$\int_\Omega \varphi\, A^0\lambda \cdot \lambda\, dx = \int_\Omega \varphi\, (A^0)^{-1}\, \sigma \cdot \sigma\, dx \geq \gamma \int_\Omega \varphi\, |\sigma|^2, \quad \forall \varphi \geq 0 \tag{4.55}$$

Alors, en tout point de Lebesgue x_0 fixé:

$$(A^0)^{-1}(x_0)\, \sigma(x_0) \cdot \sigma(x_0) \geq \gamma\, |\sigma(x_0)|^2 ,$$

donc

$$(A^0)^{-1}(x_0) \geq \gamma\, I, \quad \forall \sigma, \quad \text{p.p. en} \quad x_0 \in \Omega,$$

soit encore: $(A^0)^{-1} \geq \gamma\, I$, c.q.f.d. ■

Dans la suite, on a besoin du

Lemme 4.7 *Soit* V_1 *(resp.* V_2 *), un espace de Banach séparable (resp. réflexif séparable), soit* $S^\varepsilon \in \mathscr{L}(V_1, V_2)$ *,* $|||S^\varepsilon||| \leq C_0$ *,* C_0 *constante* > 0 *. Alors:* $\exists \eta > 0$ *,* $\exists S \in \mathscr{L}(V_1, V_2)$ *t.q.*

$$\forall f \in V_1, \quad S^\eta f \overset{w}{\rightharpoonup} S f \qquad V_2 \quad \textit{faible} \tag{4.56}$$

$$\textit{et} \qquad |||S||| \leq C_0. \tag{4.57}$$

Preuve. Le raisonnement fait intervenir des arguments classiques. En effet: (4.56) signifie que (S^ε) converge simplement, faiblement vers S . On conclut avec une sous-suite diagonale. Plus précisément: V_1 étant séparable, il existe $X \subset V_1$, dénombrable, dense, soit $X = \{x_1, x_2, \cdots, \}$. Alors, d'après (4.57), on a l'estimation uniforme

$$\|S^\varepsilon x_i\|_{V_1} \leq |||S^\varepsilon|||\ |x_i| \tag{4.58}$$

$$\leq C_0\, |x_i| , \quad \forall i \in \mathbb{N}. \tag{4.59}$$

On extrait une suite diagonale, notée η , t.q. ($\eta \to 0$):

$$S^\eta\, x_i \overset{w}{\rightharpoonup} L(x_i), \quad V_2 \quad \text{faible}, \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad \text{fixé} \tag{4.60}$$

Or la boule unité d'un espace de Banach réflexif et séparable est faiblement compacte. Soit $v \in V_1$; on définit $L(v)$ comme suit. La densité de X dans V_1 fournit une suite (y_j) , $y_j \in X$, t.q. $y_j \to v$ dans V_1 . Alors, la suite $(L(y_j))$ est de Cauchy dans V_2 . En effet:

$$\|S^\eta\, y_j - S^\eta\, y_k\|_{V_2} \leq C_0 |y_j - y_k| \tag{4.61}$$

où $C_0 > 0$ est donnée par (4.57). Alors, passant à la limite quand $\eta \to 0$ dans (4.61) en tenant compte de (4.60), on en déduit que

$$\|L(y_j) - L(y_k)\|_{V_2} \leq C_0 |y_j - y_k|$$

La suite de Cauchy $(L(y_j))$ est convergente dans V_2 fort et sa limite coïncide avec $L(v)$ à cause de (4.60). La limite $L(v)$ ne dépend pas de la suite $y_j \to v$. En effet: soit $\bar{y_j} \to v$ dans V_1, $\bar{y_j} \in X$. On a aussi

$$\|S^\eta\, y_j - S^\eta\, \bar{y_j}\|_{V_2} \leq C_0 |y_j - \bar{y_j}|$$

d'où, après passage à la limite quand $\eta \to 0$:

$$\|L(y_j) - L(\bar{y_j})\|_{V_2} \leq C_0 |y_j - \bar{y_j}|$$

ce qui permet de conclure. Il est immédiat que L ainsi défini est un opérateur linéaire de V_1 dans V_2 et que $\|L(v)\| \leq C_0\,|v|$. Il reste à vérifier que $S = L \in \mathscr{L}(V_1, V_2)$ est l'opérateur qui nous intéresse, et en particulier que

$$S^\eta\, f \stackrel{w}{\rightharpoonup} S\, f, \quad \text{dans} \quad V_2 \quad \text{faible}, \quad \forall f \in V_1. \tag{4.62}$$

C'est vrai par construction pour tout $f \in X$. On conclut dans le cas général par un argument de densité grâce à la décomposition

$$S^\eta\, f = S^\eta\,(f - v) + S^\eta\, v, \quad v \in V_1.$$

■

Remarque 4.8 *La même démonstration permet de traiter le cas d'un opérateur S^ε lipschitzien: on vérifie alors que l'opérateur limite L est aussi lipschitzien.*

Remarque 4.9 *La démonstration utilise la faible compacité d'un espace de Banach (réflexif): en fait, cette propriété se retrouve au moyen d'un raisonnement analogue.*

Lemme 4.10 *Soit V un espace de Banach réflexif séparable et $\bar\alpha > 0$, $\bar\gamma > 0$ des constantes > 0. Soit $T^\varepsilon \in \mathscr{L}(V, V')$ une suite d'opérateurs t.q.*

$$\langle T^\varepsilon\, v,\, v\rangle \;\geq\; \bar\alpha\, \|v\|_V^2\,; \tag{4.63}$$

$$\langle (T^\varepsilon)^{-1}\, f,\, f,\rangle \;\geq\; \bar\gamma\, |f|_{V'}^2\,; \tag{4.64}$$

Alors: il existe une sous-suite indexée par η, il existe $T^0 \in \mathscr{L}(V, V')$ t.q.

$$\langle T^0\, v,\, v\rangle \;\geq\; \bar\alpha\, \|v\|_V^2\,; \tag{4.65}$$

$$\langle (T^0)^{-1}\, f,\, f,\rangle \;\geq\; \bar\gamma\, |f|_{V'}^2\,; \tag{4.66}$$

$$\textit{et} \qquad (T^\eta)^{-1}\, f \stackrel{w}{\rightharpoonup} (T^0)^{-1}\, f, \quad \forall f \in V'. \tag{4.67}$$

Remarque 4.11 *Le Lemme* 4.10 *est la forme abstraite du Théorème que l'on veut montrer. En effet, on en déduit ce dernier au moyen du Lemme de Lax-Milgram abstrait et de l'inverse $(T^\varepsilon)^{-1}$: alors, $u^\varepsilon = (T^\varepsilon)^{-1} f$ est solution du problème aux limites que l'on veut résoudre. Quand $\varepsilon \to 0$, on cherche la relation entre u et f.*

Remarque 4.12 *La propriété*

$$T^\varepsilon\, v \stackrel{w}{\rightharpoonup} T\, v, \quad V' \quad \textit{faible}$$

est sans intérêt pour le problème étudié car on a

$$-\operatorname{div}(A^\varepsilon\, Dv) \stackrel{w}{\rightharpoonup} -\operatorname{div}(\bar{A}\, Dv) \quad L^2(\Omega)$$

dès que

$$A^\varepsilon \stackrel{*}{\rightharpoonup} \bar{A} \quad L^\infty \quad \textit{faible} \quad *$$

Ici, on veut la convergence de l'inverse $(A^\varepsilon)^{-1}$ *, donc aussi celle de* $(T^\varepsilon)^{-1}$ *. Or, la convergence des inverses est une question délicate et il faut se méfier de la symétrie —apparente— entre* T^ε *et* $(T^\varepsilon)^{-1}$ *.*

Preuve. Soit u^ε solution de $T^\varepsilon u^\varepsilon = f$, i.e. $u^\varepsilon = (T^\varepsilon)^{-1} f$. De l'hypothèse d'équicoercivité (4.63), on déduit que

$$\bar{\alpha} \left\| u^\varepsilon \right\|_V^2 \leq \langle T^\varepsilon u^\varepsilon, u^\varepsilon \rangle = \langle f, u^\varepsilon \rangle \leq \left\| f \right\|_{V'} \left\| u^\varepsilon \right\|_V$$

i.e.

$$\left\| u^\varepsilon \right\|_V \leq \frac{1}{\bar{\alpha}} \left\| f \right\|_{V'}$$

Il en résulte que

$$|||(T^\varepsilon)^{-1}|||_{\mathscr{L}(V, V')} \leq \frac{1}{\bar{\alpha}} =: C_0$$

Mais V est un espace de Banach réflexif séparable, donc, d'après le Lemme 4.10, il existe $\eta > 0$, $S_0 \in \mathscr{L}(V, V')$ t.q.

$$\forall f \in V', \quad (T^\eta)^{-1} f \stackrel{w}{\rightharpoonup} S_0 f \quad V \quad \text{faible.}$$

On veut montrer que S_0 est inversible et prendre $S_0^{-1} = T^0$. Or:

$$\langle (T^\eta)^{-1} f, f \rangle \geq \bar{\gamma} \left\| f \right\|_{V'}$$

par l'hypothèse (4.64). On obtient, après le passage à la limite $\eta \to 0$:

$$\langle S^0 f, f \rangle \geq \bar{\gamma} \left\| f \right\|_{V'}$$

Autrement dit: S_0 est coercif, donc inversible d'après le lemme de Lax-Milgram. Soit $S_0 = (T_0)^{-1}$. On a encore:

$$\langle T^\eta u^\eta, u^\eta \rangle \geq \bar{\alpha} \left\| u^\eta \right\|_V^2$$

i.e.

$$\langle f, u^\eta \rangle = \langle f, (T^\eta)^{-1} f \rangle \geq \bar{\alpha} \left\| u^\eta \right\|_V^2 = \bar{\alpha} \left\| (T^\eta)^{-1} f \right\|_V^2$$

On passe à la limite quand $\eta \to 0$ dans l'inégalité ainsi obtenue, soit

$$\langle f, (T^\eta)^{-1} f \rangle \geq \bar{\alpha} \left\| (T^\eta)^{-1} f \right\|_V^2$$

car le membre de droite est s.c.i.:

$$\langle f, (T^0)^{-1} f \rangle \geq \bar{\alpha} \left\| (T^0)^{-1} f \right\|_V^2$$

et ceci s'écrit encore

$$\langle T^0 u, u \rangle \geq \bar{\alpha} \left\| u \right\|_V^2$$

On a ainsi montré la première propriété. ■

4.4 Retour au problème initial et conclusion

Soit le problème

$$
\begin{aligned}
-\operatorname{div}(A^\varepsilon\, Du^\varepsilon) &= f, &(4.68)\\
u^\varepsilon &\in H_0^1(\Omega). &(4.69)
\end{aligned}
$$

Pour $w \in H_0^1(\Omega)$ donné, on peut trouver f dans (4.68)-(4.69) tel que

$$u^\eta \overset{w}{\rightharpoonup} w \quad H_0^1(\Omega) \quad \text{faible}$$

d'après le théorème abstrait. La démonstration du théorème de compacité par compensation sera terminée dès lors que l'on aura tenu compte de la condition aux limites de Dirichlet. Dans ce but, on considère un ouvert borné Ω. On note B une boule fermée de $\mathbb{R}^N$ contenant la fermeture de Ω: $\bar{\Omega} \subset B$. On définit

$$\hat{A}^\varepsilon = \begin{cases} A^\varepsilon, & \Omega; \\ \alpha\, I, & \text{dans} \quad B(\Omega). \end{cases}$$

Soit à résoudre le problème

$$
\begin{aligned}
-\operatorname{div}(\bar{A}^\varepsilon\, D\bar{u}^\varepsilon) &= \bar{f}, \quad \mathcal{D}'(B); &(4.70)\\
\bar{u}^\varepsilon &\in H_0^1(B). &(4.71)
\end{aligned}
$$

Le problème (4.70)-(4.71) est bien posé, de la forme $\hat{T}^\varepsilon\, \hat{u}^\varepsilon = \hat{f}$ où $\hat{T}^\varepsilon \in \mathscr{L}(H_0^1(B);\, H^{-1}(B))$, i.e.

$$\hat{T}^\varepsilon = -\operatorname{div}(\bar{A}^\varepsilon\, \cdot).$$

On a les estimations suivantes:

$$
\begin{aligned}
\langle \hat{T}^\varepsilon\, v,\, v\rangle &= \langle -\operatorname{div}(\bar{A}^\varepsilon\, v),\, v\rangle = \int_\Omega \bar{A}^\varepsilon\, Dv \cdot Dv &(4.72)\\
&\geq \alpha \int_\Omega |Dv|^2 = \alpha\, \|v\|^2_{H_0^1(B)}. &(4.73)
\end{aligned}
$$

ainsi que:

$$
\begin{aligned}
\langle (\hat{T}^\varepsilon)^{-1}\, \hat{f},\, \hat{f}\rangle &= \langle \hat{f},\, \hat{u}^\varepsilon\rangle = \int_\Omega \bar{A}^\varepsilon\, D\hat{u}^\varepsilon \cdot D\hat{u}^\varepsilon &(4.74)\\
&= \int_\Omega (\bar{A}^\varepsilon)^{-1}\, (\bar{A}^\varepsilon\, D\hat{u}^\varepsilon) \cdot (\bar{A}^\varepsilon\, D\hat{u}^\varepsilon) &(4.75)\\
&\geq \gamma \int_\Omega |A^\varepsilon\, Du^\varepsilon|^2 \geq \gamma\, \|f\|^2_{H^{-1}} &(4.76)
\end{aligned}
$$

car $\bar{f} = -\operatorname{div}(\bar{A}^\varepsilon\, D\hat{u}^\varepsilon)$ et $\|F\|^2_{H^{-1}} = \inf_{\operatorname{div}\sigma = F} \|\sigma\|^2_{L^2(\Omega)^N}$. On en déduit le résultat annoncé avec $\bar{\gamma}$ et on peut énoncer: $\exists \eta > 0$, $\exists \hat{T}_0 \in \mathscr{L}(H_0^1(B),\, H^{-1}(B))$ t.q. $\hat{T}_0$ soit un isomorphisme défini par *cf*(4.70)-(4.71):

$$
\begin{aligned}
-\operatorname{div}(\bar{A}^\eta\, D\bar{u}^\eta) &= \bar{f}, \quad \mathcal{D}'(B); &(4.77)\\
\bar{u}^\eta &\in H_0^1(B); &(4.78)\\
\bar{u}^\eta \overset{w}{\rightharpoonup} u = (\hat{T}_0)^{-1}\, f & \qquad H_0^1(\Omega) \quad \text{faible}. &(4.79)
\end{aligned}
$$

En effet: soit $\psi \in \mathscr{C}_c^\infty(B)$: $x_i\,\psi(\cdot) \in H_0^1(B)$ dès que $\psi \equiv 1$ dans Ω et alors $x_i\,\psi \equiv x_i$ dans Ω. Avec le choix $f_i = \hat{T}_0(x_i\,\psi)$ du second membre, on a

$$\hat{u}_i^\eta \stackrel{w}{\rightharpoonup} x_i\,\psi(x) \quad H_0^1(B) \quad \text{faible.}$$

On se restreint à Ω pour conclure.

Remarque 4.13 *La dernière étape permet de tenir compte des conditions aux limites.*

Remarque 4.14 *On peut reproduire la démonstration avec d'autres opérateurs elliptiques uniformément elliptiques.*

Remarque 4.15 *Le théorème de compacité de $\mathscr{M}(\alpha,\,\gamma,\,\Omega)$ pour la topologie de la H-convergence est dû à Spagnolo[9] et la démonstration en est due à L. Tartar(1973)[10, 7]. Spagnolo[9] a aussi introduit la notion de G-convergence qui traite de la convergence des opérateurs de Green pour des problèmes du type:*

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(A^\varepsilon\,Du^\varepsilon) &= f, && (4.80)\\ u^\varepsilon &= G^\varepsilon\,f && (4.81)\end{aligned}$$

où G^ε est par définition l'opérateur de Green associé. On étudie alors la convergence simple faible de la suite des G^ε. Spagnolo[9, 3] a traité le cas des opérateurs symétriques, L.Tartar[10] celui des opérateurs non symétriques. J-L. Lions[2] a introduit l'homogénéisation comme variante de la H-convergence[5, 6, 7] avec des coefficients périodiques de périodes tendant vers 0. Enfin, De Giorgi[3] a développé la notion de Γ-convergence: pour des opérateurs A^ε symétriques, on considère le problème de minimisation associé:

$$\min J^\varepsilon(v), \quad J^\varepsilon(v) = \int_\Omega A^\varepsilon\,Dv\cdot Dv\,dx$$

Par la Γ-convergence, on peut alors passer à la limite.

5 ENCORE LA COMPACITÉ PAR COMPENSATION

5.1 Bilan et motivation

On commence par rappeler le premier théorème de compacité par compensation déjà établi.

Théorème 5.1 *Etant donnée la suite de matrices* $(A^\varepsilon) \in \mathcal{M}(\alpha,\, \gamma,\, \Omega)$ *, il existe une sous-suite en* $\eta > 0$ *et il existe une matrice* $A^0 \in \mathcal{M}(\alpha,\, \gamma,\, \Omega)$ *telle que:*

$$\begin{aligned}
si \quad v^\eta \overset{w}{\rightharpoonup} v & \qquad H^1(\Omega) \quad faible, && (5.1)\\
avec \quad -\operatorname{div}(A^\eta\, Dv^\eta) \;=\; & \qquad f^\eta, \quad \mathcal{D}'(\Omega), && (5.2)\\
f^\eta \to f & \qquad H^{-1}(\Omega) \quad fort, && (5.3)\\
alors \quad A^\eta\, Dv^\eta \overset{w}{\rightharpoonup} A^0\, Dv, & \qquad L^2(\Omega)^N \quad faible. && (5.4)
\end{aligned}$$

Lors de la démonstration du Théorème 5.1, on a établi l'existence de fonctions tests w_i^η , $i = 1,\, \cdots,\, N$, t.q.

$$\begin{aligned}
Dw_i^\eta \overset{w}{\rightharpoonup} e_i, & \qquad L^2(\Omega)^N \quad \text{faible}, && (5.5)\\
-\operatorname{div}(A^\eta\, Dw_i^\eta) = g_i^\eta \to g_i, & \qquad H^{-1}(\Omega) \quad \text{fort}, && (5.6)\\
A^\eta\, Dw_i^\eta \overset{w}{\rightharpoonup} A^0\, e_i, & \qquad L^2(\Omega)^N \quad \text{faible}. && (5.7)
\end{aligned}$$

A une telle famille $(w_i^\eta)_{i=1,\cdots,N}$, on associe la matrice $P^\eta \in (L^2(\Omega))^{N\times N}$ définie par:

$$P^\eta\, e_i = Dw_i^\eta, \quad i = 1,\, \cdots,\, N. \qquad (5.8)$$

On a alors la

Proposition 5.2 *La suite* (P^η) *définie par* (5.5)-(5.8) *vérifie*

$$\begin{aligned}
P^\eta \overset{w}{\rightharpoonup} I, & \qquad L^2(\Omega)^{N\times N} \quad faible, && (5.9)\\
A^\eta\, P^\eta \overset{w}{\rightharpoonup} A^0, & \qquad L^2(\Omega)^{N\times N} \quad faible, && (5.10)\\
{}^t P^\eta\, A^\eta\, P^\eta \overset{w}{\rightharpoonup} A^0, & \qquad \mathcal{D}'(\Omega)^{N\times N}. && (5.11)
\end{aligned}$$

Preuve. La convergence faible (5.9) est une conséquence de la définition de P^η (5.8) et en particulier de (5.5) dans cette définition. D'autre part, la convergence faible (5.10) s'obtient par définition (5.1) de A^0 . Il reste à montrer (5.11). Pour cela, il suffit de remarquer que pour des fonctions régulières $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)^N$, $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)^N$, on a

$$\int_\Omega A^\eta\, P^\eta\, \phi \cdot P^\eta\, \psi \to \int_\Omega A^0\, \phi \cdot \psi$$

grâce au Lemme Divergence-Rotationnel vis-à-vis duquel $A^\eta\, P^\eta\, \phi$ (resp. $P^\eta\, \psi$) a une "bonne divergence" (resp. un"bon rotationnel"). ∎

5.2 Le deuxième Théorème

La suite de matrices (P^η) est un bon outil pour la construction d'un correcteur au sens suivant:

Théorème 5.3 *Avec les notations de ce paragraphe, on a*

$$Dv^\eta = P^\eta\, Dv + r^\eta, \qquad \text{où} \quad v = \lim_{\eta\to 0}(v^\eta) \quad \text{au sens du Théorème } 5.1 \tag{5.12}$$

$$\text{avec} \quad r^\eta \to 0 \qquad L^1_{loc}(\Omega)^N \quad \text{fort.} \tag{5.13}$$

Remarque 5.4 *Comme on l'a signalé en introduction du Théorème* 5.3*, celui-ci donne un résultat de correcteur*

Remarque 5.5 *Les fonctions-tests w_i^η sont fondamentales en ce qu'elles permettent de représenter toutes les solutions du problème.*

Remarque 5.6 *Des problèmes techniques pour établir ce résultat limitent la convergence des correcteurs à un espace du type $L^1_{loc}(\Omega)$. Néanmoins, il existe une autre version— la bonne— du Théorème* 5.3 *ne faisant intervenir que des espaces L^2 . Revenant à ce dernier, la conclusion en est limitée par les faits suivants: i) la suite $|Dv^\eta|$ est bornée dans $L^2(\Omega)$, ii) ainsi que la suite $|P^\eta\, Dv|$, iii) de sorte que le correcteur r^η est étudié dans $L^1(\Omega)$, et on ne peut pas en augmenter la régularité, sauf à utiliser un argument dû à Meyers[4] pour obtenir une amélioration très légère.*

Le Théorème suivant est la version améliorée annoncée ***cf Remarque*** 5.6.

Théorème 5.7 *Avec les notations du Théorème* 5.3*, si i) $Dv^\eta \in L^q(\Omega)^N$ avec $q \geq 2$ et si ii) $P^\eta \in L^p(\Omega)^{N\times N}$ avec $p \geq 2$ et $\|P^\eta\|_{L^p} \leq C_0$, alors:*

$$r^\eta \to 0 \qquad (L^s_{loc}(\Omega))^N \tag{5.14}$$

$$\text{avec} \qquad s = \inf(2,\, r), \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \quad \text{(Hölder)} \tag{5.15}$$

En particulier, si $p = q = 2$, alors on retrouve la régularité $L^1_{loc}(\Omega)$. Si de plus

$$\int_\Omega A^\eta\, Dv^\eta \cdot Dv^\eta\, dx \to \int_\Omega A^0\, Dv \cdot Dv\, dx$$

alors on peut supprimer "loc" et remplacer $(L^s_{loc}(\Omega))^N$ dans (5.14) *par $(L^s(\Omega))^N$.*

Remarque 5.8 *Un cas particulier intéressant du Théorème* 5.7 *est donné par la situation suivante: soit u^ε solution de*

$$-\operatorname{div}(A^\varepsilon\, Du^\varepsilon) = f, \qquad \mathcal{D}'(\Omega); \tag{5.16}$$

$$u^\varepsilon \in H^1_0(\Omega). \tag{5.17}$$

Alors, pour une suite extraite (η) :

$$D\,u^\eta = P^\eta\, Du + r^\eta \quad \text{avec} \quad r^\eta \to 0, \quad L^s(\Omega)$$

où $s = \inf(2,\, r)$, $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$.

Preuve. On utilise la condition aux limites de Dirichlet. Alors

$$\int_\Omega A^\varepsilon\, Du^\varepsilon \cdot Du^\varepsilon\, dx = {}_{H^{-1}}\langle f,\, u^\eta\rangle_{H_0^1}.$$

Or, par hypothèse, il existe une suite extraite (η) telle que $u^\eta \overset{w}{\rightharpoonup} u$ dans $H^1(\Omega)$ faible où u est solution de

$$-\operatorname{div}(A^0\, Du) = f, \quad u \in H_0^1(\Omega),$$

ce qui entraîne:

$${}_{H^{-1}}\langle f,\, u^\eta\rangle_{H_0^1} \to {}_{H^{-1}}\langle f,\, u\rangle_{H_0^1} = \int_\Omega A^0\, Du \cdot Du\, dx$$

par le Théorème 5.1.

Remarque 5.9 *On peut passer à la limite dans des problèmes différents, comme on le voit dans la suite.*

Pour illustrer la Remarque 5.9, on considère le cas de la thermo-élasticité. Soit z^ε solution de

$$-\operatorname{div}(A^\varepsilon\, Dz^\varepsilon - g^\varepsilon) = 0, \qquad \mathcal{D}'(\Omega), \tag{5.18}$$

$$z^\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \tag{5.19}$$

où la suite de matrices A^ε est H-convergente vers A^0 et à valeurs dans $\mathcal{M}(\alpha,\, \gamma,\, \Omega)$. On suppose en outre que le second membre dans (5.18)-(5.19) vérifie

$$g^\varepsilon \in L^2(\Omega), \quad \|g^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \le C \tag{5.20}$$

ce qui entraîne en particulier que la suite (g^ε) est bornée dans $H^{-1}(\Omega)$, mais pas forcément dans un compact de $H^{-1}(\Omega)$. Dans la formulation variationnelle de (5.18)-(5.19), on prend z^ε pour fonction-test, d'où on déduit:

$$\int_\Omega A^\varepsilon\, Dz^\varepsilon \cdot Dz^\varepsilon\, dx = \int_\Omega g^\varepsilon \cdot Dz^\varepsilon\, dx.$$

L'équicoercivité de la famille de matrices $\mathscr{M}(\alpha,\, \gamma,\, \Omega)$ entraîne l'estimation a priori:

$$\alpha\, \|Dz^\varepsilon\|_{L^2}^2 \le \|g^\varepsilon\|_{L^2}\, \|Dz^\varepsilon\|_{L^2}$$

de sorte que la suite (z^ε) est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. Pour une suite extraite (η):

$$z^\eta \overset{w}{\rightharpoonup} z \quad H_0^1(\Omega) \quad \text{faible.}$$

D'autre part, d'après (5.20), il existe $\bar{g} \in L^2(\Omega)^N$ tel que, à une suite extraite près:

$$g^\eta \overset{w}{\rightharpoonup} \bar{g} \quad L^2(\Omega)^N \quad \text{faible.}$$

Mais en général $-\operatorname{div}(A^0\, Dz - \bar{g}) \neq 0$. Par contre: il existe $g^0 \in H^{-1}(\Omega)$ t.q. $-\operatorname{div}(A^0\, Dz - g^0) = 0$. Pour construire g^0, on utilise le résultat de correcteur. En effet: posant $\sigma^\varepsilon = A^\varepsilon\, Du^\varepsilon - g^\varepsilon$ on voit que la suite (σ^ε) est bornée dans $L^2(\Omega)^N$ par hypothèse, donc faiblement convergente dans cet espace, soit, pour une suite extraite:

$$\sigma^\eta \overset{w}{\rightharpoonup} \sigma \quad L^2(\Omega)^N \quad \text{faible}$$

et alors $-\operatorname{div}\sigma = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Or, par le Lemme Divergence-Rotationnel: pour toute suite de fonctions-tests, on a la propriété:

$$v^{\varepsilon'} \overset{w}{\rightharpoonup} v \quad H_0^1(\Omega) \quad \text{faible}$$

et un bon choix de la limite faible v permet de conclure. Or, on a toujours

$$\sigma^{\varepsilon'} \cdot Dv^{\varepsilon'} \overset{w}{\rightharpoonup} \sigma \cdot Dv \quad \text{faible}$$

au sens du Lemme Divergence-Rotationnel tandis que le premier membre se décompose en

$$\begin{aligned} \sigma^{\varepsilon'} \cdot Dv^{\varepsilon'} &= (A^{\varepsilon'} Du^{\varepsilon'} - g^{\varepsilon'}) \cdot Dv^{\varepsilon'} &(5.21)\\ &= Du^{\varepsilon'} \cdot {}^tA^{\varepsilon'} Dv^{\varepsilon'} - g^{\varepsilon'} \cdot Dv^{\varepsilon'} &(5.22)\end{aligned}$$

On admet momentanément la

Proposition 5.10 *Si la suite (A^ε) est H-convergente vers A^0, alors la suite $({}^tA^\varepsilon)$ est H-convergente vers ${}^tA^0$.*

Corollaire 5.11 *Si A^ε est symétrique, $\forall\varepsilon > 0$ et si la suite (A^ε) est H-convergente vers A^0, alors la H-limite A^0 est symétrique.*

Ici: la suite $({}^tA^{\varepsilon'})$ est H-convergente vers ${}^tA^0$. On choisit la suite (v^ε) solution de

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}({}^tA^\varepsilon Dv^\varepsilon) &= h, \quad \mathcal{D}'(\Omega); &(5.23)\\ v^\varepsilon \in H_0^1(\Omega). & &(5.24)\end{aligned}$$

On a, grâce au Lemme Divergence-Rotationnel :

$$Du^{\varepsilon'} \cdot {}^tA^{\varepsilon'} Dv^{\varepsilon'} \overset{w}{\rightharpoonup} Du \cdot {}^tA^0 Dv = A^0 Du \cdot Dv$$

Il reste à étudier le terme

$$-g^{\varepsilon'} \cdot Dv^{\varepsilon'}$$

quand $\varepsilon' \to 0$. Pour cela, on utilise le résultat de correcteur. Soit Q^ε (resp. P^ε) la matrice correcteur associée à ${}^tA^\varepsilon$ (resp. A^ε). En général $Q^\varepsilon \neq {}^tP^\varepsilon$. On le voit en particulier sur le cas des matériaux en couches. D'après le Théorème 5.7:

$$\begin{aligned} Dv^\varepsilon &= Q^\varepsilon Dv + r^\varepsilon, &(5.25)\\ \text{et} \qquad & r^\varepsilon \to 0 \quad L^2(\Omega)^N \quad \text{fort si} \quad v \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega). &(5.26)\end{aligned}$$

On en déduit:

$$\begin{aligned} g^\varepsilon \cdot Dv^\varepsilon &= g^\varepsilon \cdot (Q^\varepsilon Dv + r^\varepsilon), &(5.27)\\ r^\varepsilon \to 0 & \qquad L^2(\Omega)^N \quad \text{fort}. &(5.28)\end{aligned}$$

Comme $(|g^\varepsilon|)$ est borné dans $L^2(\Omega)$, il résulte de (5.28) que

$$g^\varepsilon \cdot r^\varepsilon \to 0, \quad L^1(\Omega).$$

Alors, on peut extraire une suite ε'' t. q.

$${}^tQ^{\varepsilon''} g^{\varepsilon''} \overset{w}{\rightharpoonup} g^0, \quad \mathcal{D}'(\Omega)^N.$$

Donc, par définition de Q^ε :

$$g^\varepsilon \cdot Dv^\varepsilon \overset{w}{\rightharpoonup} g^0 \cdot Dv + 0, \quad \mathcal{D}'(\Omega)$$

et on en déduit que

$$\sigma\, Dv = A^0\, Du \cdot Dv - g^0 \cdot Dv, \quad \mathcal{D}'(\Omega), \quad \forall v \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$$

On se place en un point x_0 de Lebesgue. Pour un choix convenable de Dv, on a $\forall x_0$, point de Lebesgue:

$$\sigma = A^0(x_0)\, Du - g^0,$$

donc aussi p.p. On en déduit le résultat: soit z^ε solution de

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(A^\varepsilon\, Dz^\varepsilon - g^\varepsilon) &= 0, && (5.29)\\ z^\varepsilon &\in H_0^1(\Omega), && (5.30) \end{aligned}$$

avec:

$$\begin{aligned} A^\varepsilon &\overset{\mathrm{H}}{\rightharpoonup} A^0, \qquad \text{dans} \quad \mathcal{M}(\alpha,\gamma,\Omega), && (5.31)\\ {}^tQ^\varepsilon\, g^\varepsilon &\overset{w}{\rightharpoonup} g^0, \qquad \mathcal{D}'(\Omega)^N, && (5.32)\\ z^\varepsilon &\overset{w}{\rightharpoonup} z, \qquad H_0^1(\Omega) \quad \text{faible} && (5.33) \end{aligned}$$

Alors:

$$-\operatorname{div}(A^0\, Dz - g^0) = 0, \quad \mathcal{D}'(\Omega).$$

Plus précisément, on a même: $g^0 \in L^2(\Omega)^N$.

Remarque 5.12 *Dans* (5.32), *la convergence a lieu en fait au sens* $L^1(\Omega)$ *car il s'agit de passer à la limite pour le produit de* ${}^tQ^\varepsilon \in L^2(\Omega)$ *par* $g^\varepsilon \in L^2(\Omega)$.

5.3 La cas de la thermo-élasticité stationnaire

On considère le problème: trouver $(\boldsymbol{u}^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ solution de

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(A^\varepsilon\, Du^\varepsilon + \beta^\varepsilon\, \theta^\varepsilon) &= f, && (5.34)\\ -\operatorname{div}(K^\varepsilon\, D\theta^\varepsilon) - \beta^\varepsilon\, Du^\varepsilon &= g && (5.35) \end{aligned}$$

avec $\|\beta^\varepsilon\|_{L^\infty} \le C$. Alors, par équicoercivité de la suite de matrices (A^ε) :

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon\|_{H_0^1} &\le \frac{1}{\alpha}\, \|f\|_{H^{-1}}, && (5.36)\\ \|\theta^\varepsilon\|_{H_0^1} &\le \frac{1}{\alpha}\, \|g\|_{H^{-1}}. && (5.37) \end{aligned}$$

On en déduit que $\beta^\varepsilon\, Du^\varepsilon$ est uniformément borné en norme L^2, donc que $-\operatorname{div}(K^\varepsilon\, D\theta^\varepsilon)$ est dans un compact de $H^{-1}(\Omega)$. De plus, $\beta^\varepsilon\, \theta^\varepsilon = g^\varepsilon$ se décompose suivant

$$\beta^\varepsilon\, \theta^\varepsilon = \beta^\varepsilon\, \theta + \beta^\varepsilon\,(\theta^\varepsilon - \theta) = \beta^\varepsilon\, \theta + r^\varepsilon$$

où $r^\varepsilon = \beta^\varepsilon\,(\theta^\varepsilon - \theta) \to 0$ dans $L^2(\Omega)$ fort. Soit donc Q^ε le correcteur associé à ${}^tA^\varepsilon$. On passe à la limite, $\varepsilon \to 0$, dans

$$-\operatorname{div}(A^\varepsilon\,Du^\varepsilon + \beta^\varepsilon\,\theta^\varepsilon) = f, \quad g^\varepsilon = \beta^\varepsilon\,\theta^\varepsilon,$$

ce qui donne

$$-\operatorname{div}(A^0\,Du + \beta^0\,\theta) = f,$$

c'est-à-dire:

$${}^tQ^\varepsilon\,g^\varepsilon \rightharpoonup g^0 = \beta^0\,\theta$$

avec

$${}^tQ^\varepsilon\,\beta^\varepsilon \overset{w}{\rightharpoonup} \beta^0, \quad L^2(\Omega)^N \quad \text{faible.} \tag{5.38}$$

En effet: dans le membre de gauche de (5.38), le terme ${}^tQ^\varepsilon$ (resp. β^ε) est borné en norme $L^2(\Omega)$ (resp. $L^\infty(\Omega)$) et on utilise la définition d'un correcteur. De même, on passe à la limite dans

$$-\operatorname{div}(K^\varepsilon\,D\theta^\varepsilon) - \beta^\varepsilon\,Du^\varepsilon = g. \tag{5.39}$$

Pour cela, on décompose Du^ε sous la forme

$$Du^\varepsilon = P^\varepsilon\,Du + Dy^\varepsilon + r^\varepsilon$$

où P^ε est le correcteur de A^ε, Dy^ε résulte d'une construction ad-hoc et où

$$r^\varepsilon \to 0 \quad L^1(\Omega)^N \quad \text{fort.}$$

On en déduit alors que

$$\beta^\varepsilon\,Du^\varepsilon = \beta^\varepsilon\,P^\varepsilon\,Du + \beta^\varepsilon\,Dy^\varepsilon + \beta^\varepsilon\,r^\varepsilon$$

avec

$$\beta^\varepsilon\,P^\varepsilon\,Du = {}^tP^\varepsilon\,\beta^\varepsilon\,Du \tag{5.40}$$

$${}^tP^\varepsilon\,\beta^\varepsilon \rightharpoonup \beta^* \quad L^2(\Omega) \quad \text{faible,} \tag{5.41}$$

$$\beta^\varepsilon\,Dy^\varepsilon \to w^0 \quad L^1(\Omega) \quad \text{fort,} \tag{5.42}$$

$$\beta^\varepsilon\,r^\varepsilon \to 0 \quad L^1(\Omega) \quad \text{fort.} \tag{5.43}$$

L'équation limite de (5.39) sécrit donc

$$-\operatorname{div}(K^0\,D\theta) - \beta^*\,Du - w^0 = g,$$

5.4 Démonstration du deuxième Théorème

On procède en deux étapes.

(i) Première étape Soit $\phi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)^N$, $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$. On pose

$$X^\varepsilon = \int_\Omega \varphi\,A^\varepsilon(Du^\varepsilon - P^\varepsilon\,\phi)\,(Du^\varepsilon - P^\varepsilon\,\phi).$$

Par équicoercivité de la suite de matrices (A^ε) :

$$X^\varepsilon \geq \alpha \int_\Omega |Du^\varepsilon - P^\varepsilon\,\phi|^2$$

Si on montre que $X^\varepsilon \to 0$, alors on aura terminé. Plus précisément, on se propose d'établir que

$$X^\varepsilon \to \int_\Omega \varphi \cdot A^0\,(Du-\phi)\cdot(Du-\phi)$$

par le théorème de compacité par compensation. En effet: dans $Du^\varepsilon - P^\varepsilon\,\phi$, le deuxième terme est borné en norme $L^2(\Omega)^N$ car c'est la somme finie

$$P^\varepsilon\,\phi = \sum_{i=1}^N P^\varepsilon e_i\cdot\phi_i = \sum_{i=1}^N Dw_i^\varepsilon\cdot\phi_i$$

et $Dw_i^\varepsilon \overset{w}{\rightharpoonup} e_i$ dans $L^2(\Omega)^N$ faible par construction. De plus, $\mathrm{rot}\,(Du^\varepsilon - P^\varepsilon\,\phi)$ est dans un compact de $H^{-1}(\Omega)^N$. On le voit en écrivant que

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\,(Du^\varepsilon - P^\varepsilon\,\phi) &= \mathrm{rot}\,(-P^\varepsilon\,\phi) = -\,\mathrm{rot}\,(P^\varepsilon\,\phi) &(5.44)\\ &= -\,\mathrm{rot}\,(\phi_i\cdot Dw_i^\varepsilon)_{\alpha\beta} = -\partial_\alpha(\phi_i\,\partial_\beta w_i^\varepsilon)+\partial_\beta(\phi_i\,\partial_\alpha w_i^\varepsilon) &(5.45)\end{aligned}$$

et en remarquant que cette quantité est bornée dans $L^2(\Omega)$, donc dans un compact de $H^{-1}(\Omega)$. D'autre part:

$$A^\varepsilon(Du^\varepsilon - P^\varepsilon\,\phi) = A^\varepsilon(Du^\varepsilon - \sum_{i=1}^N \phi_i\cdot Dw_i^\varepsilon)$$

est borné en norme $L^2(\Omega)$, donc faiblement convergeant vers une limite déterminée par le Théorème 5.1 et la Proposition 5.2:

$$A^\varepsilon(Du^\varepsilon - P^\varepsilon\,\phi) \overset{w}{\rightharpoonup} A^0\,(Du-\phi) \quad L^2(\Omega)^N \quad \text{faible}$$

car

$$A^\varepsilon\,Dw_i^\varepsilon \overset{w}{\rightharpoonup} e_i \quad L^2(\Omega)^N \quad \text{faible.} \tag{5.46}$$

Il reste à vérifier que $\mathrm{div}\,(A^\varepsilon(Du^\varepsilon - P^\varepsilon\,\phi))$ est dans un compact de $H^{-1}(\Omega)$. Or, cela est vrai pour $\mathrm{div}\,(A^\varepsilon(Du^\varepsilon))$ d'après les hypothèses sur le problème aux limites de solution u^ε. De (5.46), on déduit en outre que $A^\varepsilon\,Dw_i^\varepsilon$ est dans un compact de $H^{-1}(\Omega)$, $\forall i = 1,\cdots,N$, et ϕ_i est évidemment borné dans $L^2(\Omega)$, de sorte que $-\sum_{i=1}^N \mathrm{div}\,((A^\varepsilon\,Dw_i^\varepsilon)\,\phi_i) = -\,\mathrm{div}\,(A^\varepsilon\,P^\varepsilon\,\phi)$ permet de satisfaire aux conditions du Lemme Divergence-Rotationnel; on applique celui-ci pour conclure. ■

On peut énoncer le théorème de correcteur

Théorème 5.13 *Soit*

$$\begin{aligned} u^\varepsilon \overset{w}{\rightharpoonup} u \qquad & H^1(\Omega) \quad \textit{faible;} & (5.47)\\ -\,\mathrm{div}\,(A^\varepsilon\,Du^\varepsilon) \qquad & \textit{compact dans} \quad H^{-1}(\Omega), & (5.48)\\ A^\varepsilon \;\overset{H}{\rightharpoonup}\; A^0 \qquad & \textit{dans} \quad \mathcal{M}(\alpha,\gamma,\Omega). & (5.49)\end{aligned}$$

Alors: $\forall\phi\in\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)^N$, $\forall\varphi\in\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$, $\varphi\ge 0$, *on a*

$$\begin{aligned}\limsup_{\varepsilon\to 0}\alpha\int_\Omega \varphi\,|Du^\varepsilon - P^\varepsilon\,\phi|^2 &\le \int_\Omega \varphi\,A^0\,(Du-\phi)\cdot(Du-\phi)\,dx &(5.50)\\ &\le \frac{1}{\gamma}\int_\Omega |Du-\phi|^2. &(5.51)\end{aligned}$$

Corollaire 5.14 *Si* $u \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ *et si* $\phi = Du$ *, alors le Théorème* 5.13 *dit que*

$$Du^\varepsilon = P^\varepsilon\, Du + r^\varepsilon$$

et que

$$r^\varepsilon \to 0 \quad L^2_{loc}(\Omega)^N \quad \textit{fort.} \tag{5.52}$$

Preuve. En effet si en outre $0 \leq \varphi \leq 1$, on a *cf*(5.50)-(5.51):

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \alpha \int_\Omega \varphi \left| Du^\varepsilon - P^\varepsilon\, \phi \right|^2 \leq \frac{1}{\gamma} \int_\Omega A^0 \,(Du - \phi) \cdot (Du - \phi)\; dx = 0,$$

ce qui permet de conclure, compte tenu de (5.50)-(5.51). ■

Remarque 5.15 *La fonction-test* φ *intervient dans l'étude de la convergence de*

$$\int_\Omega \varphi\, A^\varepsilon\, Du^\varepsilon \cdot Du^\varepsilon. \tag{5.53}$$

Mais si on sait que l'énergie converge, i.e. que

$$\int_\Omega A^\varepsilon\, Du^\varepsilon \cdot Du^\varepsilon \to \int_\Omega A^0\, Du \cdot Du,$$

alors on peut prendre $\varphi \equiv 1$ *dans* (5.53), *ce qui revient à dire que "loc" est supprimé dans* (5.52) *qui devient*

$$r^\varepsilon \to 0 \quad L^2(\Omega)^N \quad \textit{fort} \tag{5.54}$$

(*ii*) Le cas général On se donne u et on définit

$$r^\varepsilon = Du^\varepsilon - P^\varepsilon\, Du - P^\varepsilon\,(\phi - Du).$$

pour un certain $\phi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)^N$. Alors, par le Théorème 5.13:

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \left\| Du^\varepsilon - P^\varepsilon\, \phi \right\|_{L^2_{loc}(\Omega)^N} \leq \frac{1}{\sqrt{\gamma\, \alpha}} \left\| \phi - Du \right\|_{L^2}$$

Or:

$$\begin{aligned} \left\| P^\varepsilon\,(\phi - Du) \right\|_{L^2} &\leq \left\| P^\varepsilon \right\|_{L^p} \left\| \phi - Du \right\|_{L^q} && (5.55)\\ &\leq C_0 \left\| \phi - Du \right\|_{L^q} && (5.56) \end{aligned}$$

dès que P^ε est uniformément borné en norme comme opérateur à valeurs dans L^p . Le cas $q = 2$ se vérifie comme exercice. En substituant à ϕ une suite approximante de Du , on montre le

Théorème 5.16 *Soit*

$$u^\varepsilon \overset{w}{\rightharpoonup} u \qquad H^1(\Omega) \quad \textit{faible} \tag{5.57}$$

$$-\operatorname{div}(A^\varepsilon\, Du^\varepsilon) \qquad \textit{compact dans} \quad H^{-1}(\Omega) \tag{5.58}$$

$$A^\varepsilon \quad \overset{H}{\rightharpoonup} \quad A^0 \qquad \textit{dans} \quad \mathcal{M}(\alpha,\gamma,\Omega). \tag{5.59}$$

Alors, on a le résultat de correcteur:

$$Du^\varepsilon = P^\varepsilon\,\phi + r^\varepsilon_\phi, \quad \forall \phi \in \mathscr{C}^\infty_c(\Omega)^N$$

ainsi que l'estimation

$$\|r^\varepsilon_\phi\|_{L^2_{loc}(\Omega)} \le \frac{\delta}{\sqrt{\gamma\,\alpha}} \quad \textit{si} \quad \|Du-\phi\|_{L^2} \le \delta \tag{5.60}$$

vraie pour tout $\delta > 0$ *assez petit, i.e. dès que* ϕ *est une bonne approximation de* Du *en norme* L^2 *.*

On termine ce chapitre par la démonstration d'un résultat laissé en plan.

5.5 Démonstration du résultat auxiliaire

On rappelle le résultat admis plus haut:

Proposition 5.17 *Soit* (g^ε) *vérifiant les hypothèses suivantes:*

$$\|g^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^N} \le C_0, \tag{5.61}$$

$$^tQ^\varepsilon\, g^\varepsilon \overset{w}{\rightharpoonup} g^0, \quad \mathcal{D}'(\Omega)^N, \tag{5.62}$$

Alors $g^0 \in L^2(\Omega)^N$ *.*

Preuve. En effet: pour tout $\psi \in \mathscr{C}^\infty_c(\Omega)^N$,

$$\begin{aligned} |\int_\Omega {}^tQ^\varepsilon\, g^\varepsilon\cdot\psi\,dx| &= |\int_\Omega g^\varepsilon\cdot Q^\varepsilon\,\psi\,dx| && (5.63)\\ &\le \sqrt{\int_\Omega |g^\varepsilon\,dx|^2}\sqrt{\int_\Omega |Q^\varepsilon\,\psi\,dx|^2} && (5.64)\\ &\le \sqrt{C_0}\sqrt{\frac{1}{\alpha}\int_\Omega {}^tA^\varepsilon\,Q^\varepsilon\,\psi\cdot Q^\varepsilon\,\psi\,dx} && (5.65)\end{aligned}$$

où $\alpha > 0$ est la constante de coercivité de A^ε . Or, par définition de Q^ε , la quantité $Q^\varepsilon\,\psi$ s'exprime comme une somme de gradients, soit $Q^\varepsilon\psi = \sum_i \psi_i\, Q^\varepsilon_i\, \boldsymbol{e}_i = \sum_i \psi_i\, Dw^\varepsilon_i$ où ${}^tA^\varepsilon\, Dw^\varepsilon_i \rightharpoonup {}^tA^0\,\boldsymbol{e}_i$ dans $L^2(\Omega)$ faible, d'où:

$$\int_\Omega {}^tA^\varepsilon\, Q^\varepsilon\psi\cdot Q^\varepsilon\psi = \sum_{i,j}\psi_i\,\psi_j\,{}^tA^\varepsilon\, Dw^\varepsilon_i\cdot Dw^\varepsilon_j. \tag{5.66}$$

Mais:

$$\operatorname{div}\left({}^tA^\varepsilon Dw^\varepsilon_i\right) \in \quad \text{compact de} \quad H^{-1}(\Omega), \tag{5.67}$$

$$\operatorname{rot}(Dw^\varepsilon_i) = 0. \tag{5.68}$$

et le Lemme Divergence-Rotationnel entraîne que $\forall i,\, j$:

$$\frac{1}{\alpha}\int_\Omega {}^t\!A^\varepsilon Dw_i^\varepsilon \cdot Dw_j^\varepsilon \to \frac{1}{\alpha}\int_\Omega {}^t\!A^0\,\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j$$

de sorte que le terme correcteur

$$\frac{1}{\alpha}\int_\Omega {}^t\!A^\varepsilon\, Q^\varepsilon\,\psi \cdot Q^\varepsilon\,\psi\;dx$$

a une "bonne" divergence vis-à-vis de la théorie de la compacité par compensation et passe à la limite selon

$$\frac{1}{\alpha}\int_\Omega {}^t\!A^\varepsilon\, Q^\varepsilon\,\psi \cdot Q^\varepsilon\,\psi\;dx \;\to\; \frac{1}{\alpha}\int_\Omega {}^t\!A^0\,\psi\cdot\psi\;dx \tag{5.69}$$

$$\le\; \frac{1}{\gamma\,\alpha}\int_\Omega |\psi|^2 \tag{5.70}$$

Il en résulte l'estimation

$$\left|{}_{(\mathcal{D}'(\Omega))^N}\langle g^0,\,\psi\rangle_{\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)^N}\right| \le \sqrt{\frac{C_0}{\gamma\,\alpha}}\;\|\psi\|_{L^2(\Omega)^N}$$

i.e., en faisant varier $\psi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)^N$ et en utilisant un argument de densité ($\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)^N$ est dense dans $L^2(\Omega)^N$), on conclut que: $g^0 \in L^2(\Omega)^N$ (fort). ∎

6 UN PEU DE THÉORIE ABSTRAITE

6.1 Résumé des séances précédentes

Ce chapitre est consacré à la mise en oeuvre d'une théorie plus générale englobant les résultats déjà acquis concernant la compacité par compensation et le résultat de correcteur en vue d'une représentation "explicite" de la solution obtenue par passage à la limite. Pour mémoire, on énonce ces résultats.

Définition 6.1 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, de bord lipschitzien. Soit $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $\frac{1}{\gamma} > \alpha$ en pratique. On introduit le sous-ensemble de matrices*

$$\mathcal{M}(\alpha,\, \gamma,\, \Omega) = \{A \in (L^\infty(\Omega))^{N\times N} :\ A \geq \alpha\, I, \quad A^{-1} \geq \gamma\, I\}$$

On dit qu'une suite de matrices (A^ε), $A^\varepsilon \in \mathcal{M}(\alpha,\, \gamma,\, \Omega)$, est H-convergente quand $\varepsilon \to 0$ vers une matrice $A^0 \in \mathscr{M}(\alpha,\, \gamma,\, \Omega)$ si $\forall f \in H^{-1}(\Omega)$, les solutions du problème

$$\begin{aligned} u^\varepsilon &\in H_0^1(\Omega)^N, && (6.1)\\ -\operatorname{div}(A^\varepsilon\, Du^\varepsilon) &= f, \quad \mathcal{D}'(\Omega), && (6.2) \end{aligned}$$

vérifient

$$\begin{aligned} u^\varepsilon &\overset{w}{\rightharpoonup} u && H_0^1(\Omega) \quad \textit{faible} && (6.3)\\ A^\varepsilon\, Du^\varepsilon &\overset{w}{\rightharpoonup} A^0\, Du && L^2(\Omega)^N \quad \textit{faible} && (6.4) \end{aligned}$$

où u est solution de

$$\begin{aligned} u &\in H_0^1(\Omega)^N, && (6.5)\\ -\operatorname{div}(A^0\, Du) &= f, \quad \mathcal{D}'(\Omega), && (6.6) \end{aligned}$$

Remarque 6.2 *Dans la Définition* 6.1*, on suppose l'ouvert Ω borné afin de travailler avec la norme du Gradient qui nécessite l'utilisation de l'inégalité de Poincaré.*

Remarque 6.3 *Si $A \in (L^\infty(\Omega))^{N\times N}$ vérifie $A^{-1} \geq \gamma\, I$ alors $\|A^{-1}\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{\gamma}$. Donc, on ne restreint pas la généralité en considérant $\mathcal{M}(\alpha,\, \gamma,\, \Omega)$ pour $\frac{1}{\gamma} \geq \alpha$.*

Théorème 6.4 *Avec les notations de la Définition* 6.1*, l'ensemble $\mathcal{M}(\alpha,\, \gamma,\, \Omega)$ est compact pour la H-convergence.*

Plus précisément

Proposition 6.5 *Sur $\mathcal{M}(\alpha,\, \gamma,\, \Omega)$ la H-convergence pour les suites dérive d'une topologie associée à une métrique.*

Preuve. Soit $\phi \in L^2(\Omega)^N$, donné, soit $f \in H^{-1}(\Omega)$. Sur l'ensemble des suites de matrices (A^ε), on définit

$$N_{\phi,f}(A^\varepsilon,\, A^0) = |\int_\Omega (A^\varepsilon\, Du^\varepsilon - A^0\, Du)\cdot \phi\, dx|$$

On vérifie immédiatement que $N_{\phi,f}(\cdot,\,\cdot)$ est une semi-norme $\forall(\phi,\,f)$. Les espaces $H^{-1}(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$ sont séparables: soit (ϕ_i) (resp. (f_i)) une famille dénombrable dense dans $H^{-1}(\Omega)$ (resp. $L^2(\Omega)^N$). Alors la suite de semi-normes (N_{ϕ_i,f_i}) permet de définir une base de voisinages sur l'ensemble des matrices. On lui associe une distance sur les bornés pour la topologie faible en posant:

$$d(A^\varepsilon,\,A^0) = \sum_{i\geq 0}\sum_{j\geq 0}\frac{1}{2^i}\,\frac{1}{2^j}\,\frac{1}{\|\phi_i\|_{L^2}}\,N_{\phi_i,f_j}(A^\varepsilon,\,A^0)\,\frac{1}{\|f_j\|_{H^{-1}}}$$

■

Lemme 6.6 *Si* $A^\varepsilon \in \mathcal{M}(\alpha,\,\gamma,\,\Omega)$ *et si* $A^\varepsilon \to A$ *p.p., alors* $A^\varepsilon \overset{H}{\rightharpoonup} A$.

Preuve. Soit $u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ solution de

$$-\operatorname{div}(A^\varepsilon\,Du^\varepsilon) = f, \quad \mathcal{D}'(\Omega)$$

De l'estimation

$$\|u^\varepsilon\|_{H_0^1} \leq \frac{1}{\alpha}\,\|f\|_{H^{-1}}$$

on déduit l'existence d'une suite extraite ε' t.q.

$$Du^{\varepsilon'} \overset{w}{\rightharpoonup} Du \qquad L^2(\Omega)^N \quad \text{faible} \quad , \tag{6.7}$$

$$A^{\varepsilon'}\,Du^{\varepsilon'} \overset{w}{\rightharpoonup} A\,Du \qquad \mathcal{D}'(\Omega). \tag{6.8}$$

En effet: (6.7) est vrai par construction de la suite extraite. Il reste à vérifier (6.8) pour la même suite. Or, la suite $(A^{\varepsilon'})$ est bornée dans L^∞ et converge p.p. vers A , donc, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, elle converge vers A dans $L^2(\Omega)$ fort. On utilise (6.7) pour conclure. Finalement, l'unicité de la limite montre que toute la suite converge. ■

6.2 Le cas de la dimension générale

On a vu que dans le cas particulier de la dimension $N = 1$, une suite de matrices carrées, $(A^\varepsilon) \in L^\infty(\Omega)$, est H-convergente vers A^0 si et seulement si la suite des inverses $\dfrac{1}{A^\varepsilon}$ est convergente vers $\dfrac{1}{A^0}$ dans L^∞ faible $*$.

Si $N \geq 2$, on considère une suite $(A^\varepsilon) \in \mathcal{M}(\alpha,\,\gamma,\,\Omega)$ telle que.

$$A^\varepsilon \in \mathcal{M}(\alpha,\,\gamma,\,\Omega) \tag{6.9}$$

$$A^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} \bar{A} \qquad L^\infty(\Omega)^{N\times N} \quad \text{faible} \quad * \tag{6.10}$$

Une telle suite existe bien par définition de $\mathcal{M}(\alpha,\,\gamma,\,\Omega)$. En outre, la matrice A^ε est nécessairement inversible, et on peut toujours supposer que la suite des inverses, soit $(A^\varepsilon)^{-1}$, vérifie

$$(A^\varepsilon)^{-1} \overset{w*}{\rightharpoonup} (\underline{A})^{-1} \quad L^\infty(\Omega)^{N\times N} \quad \text{faible*} \tag{6.11}$$

à cause des estimations uniformes $\|(A^\varepsilon)^{-1}\| \leq C$, $\|A^\varepsilon\| \leq C$. Or, la théorie de la H-convergence permet d'établir qu'à une suite extraite près, A^ε est H-convergente vers une matrice A^0. On se propose de comparer les matrices limites $\bar{A}$, $\underline{A}$ avec A^0. Plus précisément:

Théorème 6.7 *Avec les notations de ce paragraphe, si une suite de matrices symétriques vérifie* (6.9)-(6.10), (6.11) *et si* A^0 *désigne sa H-limite, alors*

$$\underline{A} \le A^0 \le \bar{A} \tag{6.12}$$

au sens des formes quadratiques associées, i.e.

$$\underline{A}(x)\,\xi\cdot\xi \le A^0(x)\,\xi\cdot\xi \le \bar{A}(x)\,\xi\cdot\xi, \quad p.p. \quad x\in\Omega, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N$$

Pour montrer le Théorème 6.7, on a besoin du

Lemme 6.8 *Une suite de matrices* A^ε *est H-convergente vers* A^0 *si et seulement si la suite des symétriques* ${}^tA^\varepsilon$ *est H-convergente vers* ${}^tA^0$. *En particulier:* A^ε *est symétrique — au moins à partir d'un certain rang— si et seulement si sa H-limite, quand elle existe, est symétrique.*

Preuve de (6.12). Soit u^ε solution de (6.1)-(6.2) et soit P^ε la matrice des correcteurs associée: pour toute $\phi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)^N$, le vecteur $P^\varepsilon\,\phi$ se décompose sous la forme

$$P^\varepsilon\,\phi = \sum_{i=1}^N \phi_i \cdot P^\varepsilon\,e_i = \sum_{i=1}^N \phi_i \cdot D w_i^\varepsilon$$

où w_i^ε vérifie

$$w_i^\varepsilon \overset{w}{\rightharpoonup} x_i \qquad H^1(\Omega) \quad \text{faible} \tag{6.13}$$

$$-\operatorname{div}(A^\varepsilon\,Dw_i^\varepsilon) \to -\operatorname{div}(A^0\,e_i) \qquad H^{-1}(\Omega) \quad \text{fort.} \tag{6.14}$$

Soit $\mu\in\mathbb{R}^N$ donné. Par la positivité de A^ε symétrique, on a

$$A^\varepsilon\,(Dw_i^\varepsilon - \mu)\cdot(Dw_i^\varepsilon - \mu) \ge 0. \tag{6.15}$$

Dans (6.15), le membre de gauche se décompose en

$$A^\varepsilon\,Dw_i^\varepsilon\cdot Dw_i^\varepsilon - 2\,A^\varepsilon\,Dw_i^\varepsilon\cdot\mu + A^\varepsilon\,\mu\cdot\mu \tag{6.16}$$

dont le comportement de chaque terme quand $\varepsilon\to 0$ est connu. En effet: la compacité par compensation entraîne

$$A^\varepsilon\,Dw_i^\varepsilon\cdot Dw_i^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} A^0\,e_i\cdot e_i \quad L^\infty \quad \text{faible} \quad * .$$

Le deuxième terme de l'expression (6.16) tient compte de la symétrie de A^ε et converge suivant

$$2\,A^\varepsilon\,Dw_i^\varepsilon\cdot\mu \overset{*}{\rightharpoonup} 2\,A^0\,e_i\cdot\mu \quad L^\infty \quad \text{faible} \quad *$$

compte tenu de (6.14). Le troisième terme fait intervenir la définition (6.9)-(6.10) de $\bar{A}$ et devient

$$A^\varepsilon\,\mu\cdot\mu \overset{*}{\rightharpoonup} \bar{A}\,\mu\cdot\mu \quad L^\infty \quad \text{faible} \quad * .$$

Ce raisonnement est vrai pour tout $i=1,\cdots,N$. Donc, en substituant à w_i^ε pour i fixé la combinaison linéaire $\lambda = \sum_{i=1} \lambda_i\,w_i^\varepsilon$, on obtient

$$A^0\lambda\cdot\lambda - 2\,A^0\lambda\cdot\mu + \bar{A}\,\mu\cdot\mu \ge 0.$$

En particulier, pour le choix $\mu = \lambda$ de μ, on voit que

$$\bar{A}\lambda \cdot \lambda \geq A^0\lambda \cdot \lambda, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^N$$

i.e. $\bar{A} \geq A^0$. L'autre inégalité contenue dans (6.12) s'obtient de même. En effet, on remarque que la solution u^ε du problème (6.1)-(6.2) satisfait l'inégalité suivante, due à la positivité de l'inverse $(A^\varepsilon)^{-1}$:

$$(A^\varepsilon)^{-1}\,(A^\varepsilon\, Du^\varepsilon - \tau) \cdot (A^\varepsilon\, Du^\varepsilon - \tau) \geq 0, \quad \forall \tau \in \mathbb{R}^N, \tag{6.17}$$

c'est-à-dire encore, en décomposant à nouveau

$$Du^\varepsilon \cdot A^\varepsilon\, Du^\varepsilon - 2\, Du^\varepsilon \cdot \tau + (A^\varepsilon)^{-1}\, \tau \cdot \tau \geq 0, \quad \forall \tau \in \mathbb{R}^N. \tag{6.18}$$

et on étudie le comportement limite quand $\varepsilon \to 0$ de chaque terme à gauche. Par un argument de compacité par compensation, on vérifie que

$$Du^\varepsilon \cdot A^\varepsilon\, Du^\varepsilon \overset{w}{\rightharpoonup} Du \cdot A^0\, Du \quad \mathcal{D}'(\Omega) \quad . \tag{6.19}$$

Le deuxième terme de (6.18) est une conséquence de la symétrie de A^ε après utilisation de la définition de la transposition des matrices. Il passe à la limite aisément à cause de la linéarité:

$$2\, Du^\varepsilon \cdot \tau \overset{w}{\rightharpoonup} 2\, Du \cdot \tau \quad \mathcal{D}'(\Omega) \quad . \tag{6.20}$$

Le troisième terme résulte de la définition (6.11) de $(\underline{A})^{-1}$:

$$(A^\varepsilon)^{-1}\, \tau \cdot \tau \overset{*}{\rightharpoonup} (\underline{A})^{-1}\, \tau \cdot \tau \quad L^\infty(\Omega) \quad \text{faible*} \quad . \tag{6.21}$$

Finalement, de (6.19)-(6.21) et de (6.17)-(6.18), on déduit que

$$Du \cdot A^0\, Du - 2\, Du \cdot \tau + (\underline{A})^{-1}\, \tau \cdot \tau \geq 0, \quad \forall \tau \in \mathbb{R}^N,$$

c'est-à-dire encore

$$(A^0)^{-1}\,(A^0\, Du \cdot A^0\, Du) - 2\,(A^0)^{-1}\,(A^0\, Du) \cdot \tau + (\underline{A})^{-1}\, \tau \cdot \tau \geq 0, \quad \forall \tau \in \mathbb{R}^N.$$

En $x_0 \in \Omega$ fixé, on peut choisir $A^0(x_0)\, Du(x_0) = \tau$. (Il suffit de prendre $u = u(x)$ sous la forme $u(x) = \tau \cdot x$ avec $Du(x_0)$ solution de $A^0(x_0)\, Du(x_0) = \tau$.) Alors

$$(A^0)^{-1}\, \tau \cdot \tau - 2\,(A^0)^{-1}\, \tau \cdot \tau + (\underline{A})^{-1}\, \tau \cdot \tau \geq 0, \quad \forall \tau \in \mathbb{R}^N,$$

i.e. $\underline{A}^{-1} \geq (A^0)^{-1}$. Pour terminer, on rappelle le résultat classique suivant, vrai pour des matrices symétriques ≥ 0 :

$$A \geq B \iff (A)^{-1} \leq (B)^{-1}, \quad \forall A,\, B \quad \text{symétriques} \quad \geq 0.$$

∎

Remarque 6.9 *La symétrie est une hypothèse essentielle dans la démonstration du Théorème* 6.7.

Le résultat du Théorème 6.7 ne précise pas si les bornes obtenues sont optimales. En effet: soit (A^ε) une suite de matrices vérifiant

$$A^\varepsilon \overset{\mathrm{H}}{\rightharpoonup} A^0 \qquad \mathcal{M}(\alpha,\, \gamma,\, \Omega), \tag{6.22}$$

$${}^tA^\varepsilon = A^\varepsilon, \tag{6.23}$$

$$A^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} \bar{A} \qquad L^\infty(\Omega) \quad \text{faible} \quad * \tag{6.24}$$

$$(A^\varepsilon)^{-1} \overset{*}{\rightharpoonup} (\underline{A})^{-1} \qquad L^\infty(\Omega) \quad \text{faible} \quad * \tag{6.25}$$

Alors, le Théorème 6.7 dit que:

$$\underline{A} \leq \bar{A}.$$

Or, on sait déjà que

$$A^0 \geq \alpha\, I \overset{w}{\rightharpoonup} (A^0)^{-1} \geq \gamma\, I$$

et dans le problème considéré, on a en outre les inégalités

$$A^0 \leq \bar{A}, \quad (A^0)^{-1} \leq (\underline{A})^{-1}.$$

On peut donc attendre des contraintes sur A^0 découlant du choix de la suite de solutions (u^ε) dans le raisonnement servant à établir le Théorème 6.7.

6.3 Le cas des matériaux isotropes.

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la résolution du problème posé dans le cas particulier des matériaux isotropes dont la suite des matrices associées est de la forme $A^\varepsilon = a^\varepsilon(x)\, I$, où $a^\varepsilon(x) = \alpha\, \chi^\varepsilon(x) + \beta\,(1 - \chi^\varepsilon(x))$ et où χ^ε est une fonction caractéristique. On modélise ainsi le mélange de deux matériaux isotropes.

(i) Le cas bidimensionnel On se limite dans un premier temps à la valeur $N = 2$ et on cherche une caractérisation du mélange de deux matériaux isotropes. On a déjà vu que la matrice homogénéisée est symétrique: $A^0 = {}^tA^0$, $\forall N \geq 1$, donc diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^N$, et on note $\lambda_1(x) \leq \cdots \leq \lambda_N(x)$ ses valeurs propres. De $A^0 \geq \alpha\, I$ (resp. $(A^0)^{-1} \geq \gamma\, I$), on déduit que $\alpha \leq \lambda_1(x)$ (resp. $\lambda_N(x) \leq \dfrac{1}{\gamma} =: \beta$). On a ainsi, avec des notations évidentes, $\underline{a}(x)\, I \leq A^0 \leq \bar{a}\, I$, où $\bar{a} = \alpha\,\theta + \beta\,(1-\theta)$ si $\chi^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} \theta \quad L^\infty\, w*$. Cette dernière limite est licite car $0 \leq \chi^\varepsilon \leq 1$ est bornée en norme L^∞, donc il existe une sous-suite convergente pour la topologie faible * vers une fonction θ t.q. $0 \leq \theta \leq 1$.

Remarque 6.10 *Si sur un ensemble S_0 (resp. S_1) mesurable on a*

$$\chi^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} 0 \quad L^\infty(S_0) \quad \textit{faible} \quad *$$

resp.

$$\chi^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} 1 \quad L^\infty(S_1) \quad \textit{faible} \quad *$$

alors, au moins pour une suite extraite

$$\chi^\varepsilon \to 0 \quad \textit{p.p. sur} \quad S_0$$

resp.

$$\chi^\varepsilon \to 1 \quad \textit{p.p. sur} \quad S_1.$$

Par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on en déduit alors que la convergence est forte L^1 sur $S_0 \cup S_1 = \Omega$.

La Remarque 6.10 suggère alors que pour

$$(A^\varepsilon)^{-1} = \frac{1}{\alpha}\,\chi^\varepsilon + \frac{1}{\beta}\,(1-\chi^\varepsilon)$$

on a de même

$$(A^\varepsilon)^{-1} \overset{*}{\rightharpoonup} (A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}\,\theta + \frac{1}{\beta}\,(1-\theta) \quad L^\infty \quad \text{faible} \quad * .$$

On note la limite ci-dessus

$$\frac{1}{\underline{\theta}} := \frac{1}{\alpha}\,\theta + \frac{1}{\beta}\,(1-\theta).$$

Alors $A^0 \le \bar{a}\, I$ et $(A^0)^{-1} \le \dfrac{1}{\underline{\theta}}\, I$, où l'on a posé: $\bar{a} = \theta\,\alpha + (1-\theta)\,\beta$, ce qui fait bien apparaître des contraintes sur la matrice homogénéisée A^0 .

(ii) Le cas général .

Dans le cas où $N \ge 2$, on fait apparaître de même des contraintes. En effet, on introduit les quantités $\bar{a} = \theta\,\alpha + (1-\theta)\,\beta$ et

$$\frac{1}{\underline{\theta}} = \frac{1}{\alpha}\,\theta + \frac{1}{\beta}\,(1-\theta)$$

pour lesquelles on vérifie immédiatement que $\underline{\theta} \le \bar{a}$. Graphiquement, on fait apparaître deux branches d'hyperboles délimitant une lentille qui représente le domaine d'admissibilité des valeurs propres de la matrice A^0 . Plus précisément, on vérifie que $\beta\,\bar{a} = \dfrac{\alpha\,\beta}{\underline{a}} - \alpha$ et que si λ_N (resp. λ_1) désigne la plus grande (resp. plus petite) valeur propre de A^0 , alors $\lambda_N \le \bar{a}$ et $\lambda_1 \ge \underline{a}$. En particulier, si $N = 2$ et si $A^0(x)$ admet deux valeurs propres $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x)$ en tout $x \in \Omega$ associées à des vecteurs propres normalisés $V_1(x)$, $V_2(x)$, on note

$$A^0(x) = \lambda_1(x)\, V_1(x) \otimes V_1(x) + \lambda_2(x)\, V_2(x) \otimes V_2(x) \tag{6.26}$$

où (λ_1, λ_2) décrivent une lentille définie par deux branches d'hyperboles comme ci-dessus.

Théorème 6.11 *Soit A^0 décrite par* (6.26). *Il existe une suite de matrices (A^ε) de la forme:*

$$A^\varepsilon = \alpha\,\chi^\varepsilon(x) + \beta\,(1-\chi^\varepsilon(x))$$

H-convergente vers A^0 .

Preuve. La démonstration est compliquée et utilise un procédé de réitération. Plus précisément, on se donne $0 \le \theta \le 1$ et on note χ la fonction indicatrice de l'intervalle $[0,\, \theta]$ prolongée par périodicité sur tout $\mathbb{R}$. On définit $\theta^\varepsilon(t) = \alpha\,\chi(\frac{t}{\varepsilon}) + \beta\,(1-\chi(\frac{t}{\varepsilon}))$, puis $\chi^\varepsilon = \theta^\varepsilon(x \cdot e)$ où $e \in \mathbb{R}^2$ est un vecteur donné. Alors, les résultats obtenus pour les matériaux stratifiés montrent que la suite (A^ε) ainsi définie est H-convergente vers

$$A^0 = \begin{pmatrix} \underline{a} & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix}$$

■

Remarque 6.12 *Une variante de la construction esquissée dans la démonstration du Théorème* 6.11 *consiste à mettre en couches parallèles de direction* η *donnée deux matériaux de matrices resp.*

$$\begin{pmatrix} \underline{a}_{\theta_1} & 0 \\ 0 & \bar{a}_{\theta_2} \end{pmatrix} \quad et \quad \begin{pmatrix} \bar{a}_{\theta_2} & 0 \\ 0 & \underline{a}_{\theta_2} \end{pmatrix}$$

On choisit $\underline{a}_{\theta_1} = \bar{a}_{\theta_2}$ *. On obtient ainsi toutes les matrices dont les valeurs propres appartiennent à une lentille donnée (convexe). On conclut avec des estimations sur les correcteurs grâce à la métrisabilité de la H-convergence.*

Remarque 6.13 *Le Théorème* 6.11 *induit la question de la H-fermeture de l'ensemble de départ.*

Remarque 6.14 *Le Théorème* 6.11 *se généralise au cas de la dimension* $N \geq 2$ *.*

6.4 Prototype de la compacité par compensation

On se propose de développer le Lemme Divergence-Rotationnel. On rappelle le résultat de base.

Lemme 6.15 *Soit*

$$\begin{aligned} u^\varepsilon &\overset{w}{\rightharpoonup} u \quad L^2(\Omega)^N \quad \textit{faible} && (6.27)\\ v^\varepsilon &\overset{w}{\rightharpoonup} v \quad L^2(\Omega)^N \quad \textit{faible} && (6.28)\\ \operatorname{div}(u^\varepsilon) &\quad \textit{compact dans} \quad H^{-1}(\Omega), && (6.29)\\ \operatorname{rot}(v^\varepsilon) &\quad \textit{compact dans} \quad H^{-1}(\Omega)^{N\times N}. && (6.30) \end{aligned}$$

Alors

$$u^\varepsilon \cdot v^\varepsilon \overset{w}{\rightharpoonup} u \cdot v \quad \mathcal{D}'(\Omega) \tag{6.31}$$

où (6.31) *est à entendre au sens de la topologie faible* $\sigma(L^1(\Omega), \mathscr{C}_c^\infty(\Omega))$ *.*

Remarque 6.16 *On a vu que le produit scalaire est la seule fonction non linéaire autorisant ce passage à la limite.*

Remarque 6.17 *Peut-on choisir mieux que* $\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ *dans* (6.31)*? La réponse est "oui": en fait la convergence a lieu dans* $\sigma(L^1(\Omega), \mathscr{C}_c^0(\Omega))$ *. Mais il n'y a pas de convergence au sens de* $\sigma(L^1(\Omega), L^\infty(\Omega))$ *. Un contre-exemple est fourni par le cas de figure suivant. On prend* $\Omega = B$ *la boule unité de* $\mathbb{R}^N$ *,* $N = 2$ *. Le choix* $v^\varepsilon = 1_B$ *de la fonction-test montre que* $\displaystyle\int_B u^\varepsilon\, v^\varepsilon\, dx$ *ne converge pas en général vers* $\displaystyle\int_B u\, v\, dx$ *. En effet: soit* $g^\varepsilon \in H^{1/2}(\partial B)$ *,* $h^\varepsilon \in H^{-1/2}(\partial B)$ *, tels que*

$$\begin{aligned} g^\varepsilon &\overset{w}{\rightharpoonup} 0 \quad H^{1/2}(\partial B) \quad \textit{faible}, && (6.32)\\ h^\varepsilon &\overset{w}{\rightharpoonup} 0 \quad H^{-1/2}(\partial B) \quad \textit{faible}, && (6.33)\\ \langle g^\varepsilon, h^\varepsilon\rangle &\to 1 && (6.34) \end{aligned}$$

L'existence de g^ε *et* h^ε *satisfaisant* (6.32)-(6.34) *se vérifie directement. On résout*

$$\begin{aligned} -\Delta p^\varepsilon &= 0, \quad B, && (6.35)\\ p^\varepsilon &= g^\varepsilon \quad \partial B, && (6.36)\\ v^\varepsilon = Dp^\varepsilon \overset{w}{\rightharpoonup} 0 & \qquad L^2(\Omega)^2 \quad \textit{faible.} && (6.37)\end{aligned}$$

Par définition de v^ε *, on a* $\operatorname{rot} v^\varepsilon = 0$ *, donc compact dans* $H^{-1}(\Omega)$ *. Soit, d'autre part:*

$$\begin{aligned} -\Delta q^\varepsilon &= 0, \quad B, && (6.38)\\ \partial_n q^\varepsilon &= h^\varepsilon - \bar{h}^\varepsilon, \quad \bar{h}^\varepsilon = \frac{1}{mes(\partial B)}\int_{\partial B} h^\varepsilon\, d\sigma && (6.39)\end{aligned}$$

Alors

$$Dq^\varepsilon \overset{w}{\rightharpoonup} 0 \quad L^2(\Omega)^N \quad \textit{faible.}$$

Pour conclure, on introduit la matrice

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et on pose

$$u^\varepsilon = R\,Dq^\varepsilon = \begin{pmatrix} \partial_2 q^\varepsilon \\ -\partial_1 q^\varepsilon \end{pmatrix} = \operatorname{rot}(q^\varepsilon). \tag{6.40}$$

On voit que $\operatorname{div}(u^\varepsilon) = 0$ *, de sorte que les hypothèses du Lemme Divergence-Rotationnel sont vérifiées par le couple* $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ *donné en* (6.35)-(6.37), (6.38)-(6.39), (6.40). *Plus précisément: on intègre par parties dans*

$$\int_B u^\varepsilon \cdot v^\varepsilon\, dx = \int_B R\,Dq^\varepsilon \cdot Dp^\varepsilon$$

et on obtient

$$\int_{\partial B} g^\varepsilon\,(h^\varepsilon - \bar{h}^\varepsilon) \to 1 \neq 0.$$

Remarque 6.18 *La restriction: "*Ω *ouvert borné" est technique. En effet, si,* $\Omega = \mathbb{R}^N$ *, on raisonne avec des espaces de Hardy du type* $\mathcal{H}^1$ *. D'autre part, la convergence a lieu dans* $\mathcal{H}^1$ *faible, i.e. pour la topologie faible* $\sigma(L^1(\Omega), VMO)$ *ou* $\sigma(L^1(\Omega), BMO)$ *où* $BMO = (\mathcal{H}^1)'$ *. Pour le voir, il suffit de considérer* $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ *,* $v \in L^2(\mathbb{R}^N)$ *t.q.* $\operatorname{div} u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ *et* $\operatorname{rot} v \in L^2(\mathbb{R}^N)$ *. Alors* $u \cdot v \in L^1(\mathbb{R}^N)$ *au mieux. Mais on a aussi* $u \cdot v \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^N)$ *borné dans* $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^N)$ *.*

6.5 Cas analogue très simple

Soit $N = 2$, $u = u(x_1)$ ne dépendant que de la variable x_1 . Soit $u^\varepsilon = u^\varepsilon(x_1)$, $v^\varepsilon = v^\varepsilon(x_2)$, t.q.

$$\begin{aligned} u^\varepsilon &\overset{w}{\rightharpoonup} u \quad L^2(\Omega) \quad \text{faible} && (6.41)\\ v^\varepsilon &\overset{w}{\rightharpoonup} v \quad L^2(\Omega) \quad \text{faible} && (6.42)\end{aligned}$$

Par construction $\partial_2 u^\varepsilon = 0$, $\partial_1 v^\varepsilon = 0$. La théorie de la compacité par compensation dit alors que

$$u^\varepsilon\, v^\varepsilon \overset{w}{\rightharpoonup} u\, v \quad \mathcal{D}'(\Omega) \tag{6.43}$$

où $\mathcal{D}'(\Omega)$ signifie la topologie $\sigma(L^1(\Omega), \mathscr{C}_c^\infty(\Omega))$. En effet, il suffit de remarquer que les fonctions de la forme $\phi(x_1) \otimes \varphi(x_2)$ avec $\phi \in \mathscr{C}_c^\infty$, $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty$ sont denses dans $\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$. Alors, on écrit que

$$\int_\Omega u^\varepsilon\, v^\varepsilon\, \phi(x_1)\, \varphi(x_2)\, dx = \int_{\Omega_1} u^\varepsilon(x_1)\, \phi(x_1)\, dx_1 \int_{\Omega_2} v^\varepsilon(x_2)\, \varphi(x_2)\, dx_2.$$

D'autre part, $u^\varepsilon\, v^\varepsilon \in L^2(\Omega)\, (\notin L^1(\Omega))$ est borné dans $L^2(\Omega)\, (\notin L^1(\Omega))$ et on a l'égalité

$$\int_{Q_1 \times Q_2} |u^\varepsilon\, v^\varepsilon|^2 = \int_{Q_1} |u^\varepsilon(x_1)|^2 \; dx_1 \int_{Q_2} |v^\varepsilon(x_2)|^2 \; dx_2$$

de sorte que (6.43) est vrai dans $L^2(\Omega)$ faible.

Remarque 6.19 *Les trois principaux cas d'application de la compacité par compensation sont les suivants: (i) le Lemme Divergence-Rotationnel; (ii) le cas simple évoqué ci-dessus, généralisable à la dimension $N \geq 2$ dès lors que l'on considère des suites $u_i^\varepsilon = u_i^\varepsilon(x_i)$, $i = 1, \cdots, N$, $u^\varepsilon : \Omega \to \mathbb{R}$; (iii) le résultat dû à J. Ball[1] que l'on se propose de démontrer maintenant.*

Lemme 6.20 *[1]Dans $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, soit $u^\varepsilon : \Omega \to \mathbb{R}^N$*

$$u^\varepsilon \overset{w}{\rightharpoonup} u \quad W^{1,N}(\Omega)^N \quad \textit{faible.} \tag{6.44}$$

Alors

$$\det Du^\varepsilon \overset{w}{\rightharpoonup} \det Du \quad \sigma(L^1(\Omega), \mathscr{C}_c^\infty(\Omega))$$

ce qui signifie encore que

$$\int_\Omega \varphi \, \det Du^\varepsilon \, dx \to \int_\Omega \varphi \, \det Du \, dx, \quad \forall \varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$$

Preuve. Par hypothèse (6.44),

$$Du^\varepsilon \overset{w}{\rightharpoonup} Du \quad L^{N \times N} \quad \text{faible.}$$

Alors $\det(Du^\varepsilon)$ est borné dans $L^1(\Omega)$, donc convergeant vers une mesure. Il reste à montrer que cette mesure est $\det(Du)$. Or, le développement de $\det(Du^\varepsilon)$ par rapport à la première colonne sécrit

$$\det(Du^\varepsilon) = \sum_{i=1}^N \partial_i u^\varepsilon \, m_{1i}(Du^\varepsilon)$$

où $m_{ij}(Du^\varepsilon)$ est le mineur fondamental associé à Du^ε de rang (i,j) et où $\partial_i u^\varepsilon \in L^N(\mathbb{R}^N)$, $m_{1i}(Du^\varepsilon) \in L^N(\mathbb{R}^N)'$, $i = 1, \cdots, N$. On vérifie que $\sum_{i=1}^N \partial_i (m_{1i}\,(D\varphi)) = 0$, $\forall \varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. De plus: $\|m_{1i}\,(Du^\varepsilon)\|_{L^{N'}} \leq C$ où $N' = \dfrac{N}{N-1}$. On conclut par le Lemme Divergence-Rotationnel car $\operatorname{rot} Du^\varepsilon = 0$. ∎

Remarque 6.21 *On peut donner une autre démonstration pour le Lemme* 6.20. *En effet: on prend* $N = 2$ *pour fixer les idées. Alors*

$$\det(Du^\varepsilon,\, Dv^\varepsilon) = \partial_x Du^\varepsilon\, \partial_y Dv^\varepsilon - \partial_y Du^\varepsilon\, \partial_x Dv^\varepsilon \stackrel{w}{\rightharpoonup} L \qquad \textit{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega)$$

avec

$$\partial_x Du^\varepsilon\, \partial_y Dv^\varepsilon - \partial_y Du^\varepsilon\, \partial_x Dv^\varepsilon = \partial_x(u^\varepsilon\, \partial_y Dv^\varepsilon) - \partial_y(u^\varepsilon\, \partial_x Dv^\varepsilon) \quad \textit{dans} \quad H^1(\Omega). \tag{6.45}$$

Plus précisément: cela se vérifie d'abord pour $u^\varepsilon,\, v^\varepsilon \in \mathscr{C}^1(\Omega)$ *, la conclusion venant par densité de* $\mathscr{C}^1$ *dans* H^1 *. Or, le théorème de Rellich montre que le second membre de* (6.45) *converge faiblement*

$$\partial_x(u^\varepsilon\, \partial_y Dv^\varepsilon) - \partial_y(u^\varepsilon\, \partial_x Dv^\varepsilon) \stackrel{w}{\rightharpoonup} \partial_x(u\, \partial_y Dv) - \partial_y(u\, \partial_x Dv), \tag{6.46}$$

$$= \det(Du,\, Dv), \quad \textit{dans} \quad \sigma(W^{-1,1},\, \mathscr{C}_c^\infty), \tag{6.47}$$

la dernière égalité se montrant par la même formule algébrique que (6.45).

6.6 Le Théorème général de compacité par compensation

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, un ouvert, régulier ou non. Soit

$$u^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad (L^\infty(\Omega))^p \quad \text{faible} \quad * \tag{6.48}$$

et soit $F: \quad \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, continue. Alors $(F(u^\varepsilon))$ est bornée dans $L^\infty(\Omega)$, donc il existe une suite extraite convergente, i.e.

$$F(u^{\varepsilon'}) \overset{*}{\rightharpoonup} \bar{F} \quad L^\infty \quad \text{faible}*$$

On suppose en outre que

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^p A_{ijk}\, \partial_i u_j^\varepsilon = 0, \quad k = 1, \cdots, q$$

où les réels A_{ijk} sont donnés.

Remarque 6.22 *Il suffit de prendre $N = 2p$ pour retrouver le cas déjà traité.*

On se propose de répondre aux deux questions suivantes: Quand a-t-on (i) $\bar{F} = F(u)$, (ii) $\bar{F} \geq F(u)$, avec $A\,Du = 0$, $\forall (u^\varepsilon)$ satisfaisant (6.48)?

Remarque 6.23 *La question (ii) ci-dessus équivaut à se demander si la fonctionnelle F est faiblement semi-continue inférieurement (sci), ce que l'on formule par:*

$$\forall \varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega), \quad \varphi \geq 0, \quad \liminf_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega F(u^\varepsilon) \varphi \, dx \geq \int_\Omega F(u)\, \varphi \, dx. \tag{6.49}$$

Le premier résultat ci-dessous est une condition nécessaire du second ordre.

Théorème 6.24 *Avec les notations du début, si F est sci au sens* (6.49)*, alors:*

$$F(u)\, \lambda\, \lambda \geq 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}^p, \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

Si F est continue, alors

$$\bar{F} = F(u) \iff F''(u)\, \lambda\, \lambda = 0, \forall u \in \mathbb{R}^p, \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

où l'on a posé:

$$\Lambda \;=\; \{\lambda \in \mathbb{R}^p; \quad \exists \xi \in \mathbb{R}^N, \quad \xi \neq 0, \quad (\lambda,\, \xi) \in \mathscr{V}\} \tag{6.50}$$

$$\mathscr{V} \;=\; \{(\lambda,\, \xi) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^N, \quad \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^p A_{ijk} \xi_i\, \lambda_j := A\, \xi \otimes \lambda = 0\} \tag{6.51}$$

Preuve. On regarde $(\hat{u}(\xi),\, \xi)$, $\hat{u} = \mathscr{F}(u)$. Par hypothèse, on a $\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^p A_{ijk}\, \xi_i\, \hat{u}_j(\xi) = 0$, i.e. $(\hat{u}(\xi),\, \xi) = (\lambda,\, \xi) \in \mathscr{V}$, $\forall \xi$. Si F est sci, alors $F''(u)\, \lambda \cdot \xi = 0$, $\forall (\lambda,\, \xi)$ dès que F est de classe $\mathscr{C}^2$, donc $F(u)$ est affine. Plus précisément, on montre que $t \in \mathbb{R} \mapsto F(u + t\, \lambda) \in \mathbb{R}$ est convexe en $t \in \mathbb{R}$, $\forall u \in \mathbb{R}^p$, $\forall \lambda \in \Lambda$. On raisonne de même pour F continue, i.e. pour F et $-F$ sci. Au cours de la démonstration, on utilise la fonction-test

$$u^\varepsilon(x) = u(x) + \varphi(\frac{x\cdot\xi}{\varepsilon})\,\lambda, \quad \xi \in \mathbb{R}^N, \quad \xi \neq 0, \quad (\lambda,\, \xi) \in \mathscr{V}$$

avec $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique. Plus précisément, on choisit φ constante par morceaux, de la forme: $\varphi(x) = \dfrac{1}{\theta}$ si $0 \leq x \leq \theta$, $\varphi(x) = -\dfrac{1}{1-\theta}$ si $\theta \leq x \leq 1$, $\varphi(x) = 0$ partout ailleurs et on construit ψ affine par morceaux telle que $\psi' = \varphi$. On vérifie alors que $F(u^\varepsilon)$ est constante par morceaux sur des bandes perpendiculaires à la direction de ξ. ■

6.7 Exemples

(*i*) Si $A_{ijk} = 0$ pour tous les indices $i,\, j,\, k$, on ne dispose pas d'information sur les dérivées et $\Lambda = \mathbb{R}^N$. On en déduit que F est convexe (resp. affine): on retrouve ainsi un résultat classique important.

(*ii*) Si $\partial_i u_j^\varepsilon = 0$, $\forall i,\, j$, comme la convergence dans L^∞ faible * des fonctions constantes équivaut à la convergence simple dans $\mathbb{R}$, toutes les fonctions F continues conviennent et $\Lambda = \{0\}$.

(*iii*) Cas intermédiaire On retrouve le Lemme Divergence-Rotationnel avec

$$\mathscr{V} = \{(\hat u,\, \hat v,\, \xi) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N; \quad \xi\cdot\hat u = 0 \quad \text{et} \quad \xi \quad \text{parallèle à} \quad \hat v\} \tag{6.52}$$
$$\Lambda = \{(\hat u,\, \hat v) \in (\mathbb{R}^N)^2; \quad \hat u \quad \text{perpendiculaire à} \quad \hat v\} \tag{6.53}$$

Plus précisément, on montre que

$$F(\hat u,\, \hat v) = \delta\,\hat u\cdot\hat v + \alpha\,\hat u + \beta\,\hat v + \gamma = \alpha\,\hat u + \beta\,\hat v + \gamma \quad \text{est affine sur} \quad \Lambda.$$

Réciproquement: on montre que F ainsi définie est la seule fonction affine sur Λ.

(*iv*) Soit

$$\psi^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} \psi \quad W^{1,\infty}(\Omega), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^N.$$

Alors

$$u^\varepsilon = D\psi^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} D\psi = u \quad L^\infty(\Omega)^N \quad \text{faible} \ast.$$

Soit $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ sci (C'est la situation type en calcul des variations). Alors:

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega \varphi(x)\, F(D\psi^\varepsilon)\, dx \geq \int_\Omega \varphi(x)\, F(D\psi), \quad \forall \varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega), \quad \varphi \geq 0.$$

Or: $\mathrm{rot}\,(u^\varepsilon) = \mathrm{rot}\,(D\psi^\varepsilon) = 0$. Avec les notations du début de paragraphe:

$$\mathscr{V} = \{(\hat u,\, \xi); \quad \hat u \quad \text{parallèle à} \quad \xi\}$$

et $\Lambda = \mathbb{R}^N$. La semi-continuité faible de F dans toutes les directions de $\mathbb{R}^N$ ($= \Lambda$) entraîne que F est convexe. Soit alors le problème de minimisation

$$\min_{v\in H^1(\Omega)} (\int_\Omega F(Dv)).$$

Une condition nécessaire pour passer à la limite est que F soit convexe.

7 ETUDE DE LA RÉCIPROQUE

7.1 Récapitulatif

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et soit (u^ε) t.q.

$$\begin{aligned} u^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} u & \qquad (L^\infty)^p \quad \text{faible} \quad * \quad , & (7.1) \\ \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{p} A_{ijk}\,\partial_i u_j^\varepsilon &= 0, \quad k = 1, \cdots, q. & (7.2) \end{aligned}$$

On suppose en outre que $F: \quad \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ vérifie l'une des trois conditions suivantes

$$F: \quad \mathbb{R}^p \to \mathbb{R} \qquad \text{continue} \tag{7.3}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega \varphi\, F(u^\varepsilon)\; dx = \int_\Omega \varphi\, F(u) \qquad \forall \varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega); \tag{7.4}$$

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega \varphi\, F(u^\varepsilon)\; dx \geq \int_\Omega \varphi\, F(u) \qquad \forall \varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega), \quad \varphi \geq 0. \tag{7.5}$$

On introduit la variété caractéristique et sa première composante:

$$\mathscr{V} = \{(\lambda, \xi) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^N;\ \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{p} A_{ijk}\,\xi_i\,\lambda_j = 0\}, \tag{7.6}$$

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^p;\ \lambda \neq 0, \quad \exists \xi \in \mathbb{R}^N, \quad (\lambda, \xi) \in \mathscr{V}\} \tag{7.7}$$

On a déjà établi une condition nécessaire du second ordre sous la forme du

Théorème 7.1 *Si $F: \quad \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^N$ est faiblement sci, alors*

$$F''(u)\,\lambda\cdot\lambda \geq 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}^p, \quad \forall \lambda \in \Lambda. \tag{7.8}$$

Autrement dit: l'application

$$\mathbb{R} :\to \mathbb{R}, \quad t \mapsto F(u + t\lambda)$$

est convexe, $\forall u \in \mathbb{R}^p$, $\forall \lambda \in \Lambda$.

Remarque 7.2 *Si l'on ne dispose pas de contrainte sur les dérivées partielles, alors $\Lambda = \mathbb{R}^p$ et la condition nécessaire se réduit à la convexité de F.*

Remarque 7.3 *Dans le cas général où $\Lambda \neq \mathbb{R}^p$, la condition nécessaire exprime que F est convexe dans les directions de Λ.*

7.2 La réciproque: condition suffisante

On commence par énoncer le résultat principal:

Théorème 7.4 *Si F vérifie la condition nécessaire* (7.8) *et si en outre F est quadratique, i.e. de la forme: $F(u) = M\,u \cdot u$, $\forall u \in \mathbb{R}^p$, alors la condition nécessaire* (7.8) *est suffisante au sens suivant: si $u^\varepsilon \overset{w}{\rightharpoonup} u$ dans $L^2(\Omega)$ faible avec $\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{p} A_{ijk}\,\partial_i u_j^\varepsilon$ dans un compact de $H^{-1}(\Omega)$, $k = 1, \cdots, q$, alors*

$$\forall \varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega), \quad \varphi \geq 0, \quad \liminf_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega F(u^\varepsilon)\,\varphi\,dx \geq \int_\Omega F(u)\,\varphi\,dx$$

Remarque 7.5 *On retrouve le cadre du Lemme Divergence-Rotationnel. Mais tous les problèmes se concentrent dans le noyau de l'opérateur (A_{ijk}) qui permet de remplacer une condition de H^{-1} compacité par une égalité en termes de la variable duale $\xi \in \mathbb{R}^N$.*

Remarque 7.6 *Un cas particulier important du Théorème* 7.4 *est celui où $u^\varepsilon = D\psi^\varepsilon$, $\psi^\varepsilon \in W^{1,\infty}(\Omega)^N$. Alors: $\psi^\varepsilon \in L^\infty(\Omega)^{N\times N}$ vérifie automatiquement $\operatorname{rot} D\psi^\varepsilon = 0$ et la variété caractéristique associée au problème s'explicite:*

$$\begin{aligned} \mathscr{V} &= \{(\lambda, \xi) \in \mathbb{R}^{N\times N} \times \mathbb{R}^N, \quad \exists \mu \in \mathbb{R}^N, \quad \lambda = \mu \otimes \xi\} && (7.9)\\ &= \{(\mu \otimes \xi, \xi), \quad \mu \in \mathbb{R}^N, \quad \xi \in \mathbb{R}^N\} && (7.10) \end{aligned}$$

La première composante devient alors:

$$\Lambda = \{\mu \otimes \xi, \quad \mu \in \mathbb{R}^N, \quad \xi \in \mathbb{R}^N.\}$$

Ce dernier ensemble coïncide avec l'ensemble des matrices carrées $N \times N$ de rang 1 . De la propriété

$$\int_\Omega \varphi\,F(D\psi^\varepsilon)\,dx \to \int_\Omega \varphi\,F(D\psi)\,dx \qquad \forall \varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega), \quad \varphi \geq 0, \tag{7.11}$$

$$\forall \psi^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} \psi \qquad W^{1,\infty}(\Omega)^N \quad \textit{faible} \quad * \tag{7.12}$$

on déduit que l'application

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto F(u + t\,(\mu \otimes \xi))$$

est convexe, $\forall u \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $\forall \mu, \xi \in \mathbb{R}^N$. Cette condition exprime que F est rang-1 convexe, i.e. vérifie

$$F''(u)\,(\mu \otimes \xi) \cdot (\mu \otimes \xi) \geq 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}^N, \quad \forall \mu, \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Si (7.11)-(7.12) *est vrai $\forall \varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$, on obtient que F est rang-1 affine.*

Remarque 7.7 *Le cas où ψ^ε est scalaire est différent, puisqu'il fournit un critère de convexité.*

7.3 Continuité faible

On peut mettre en évidence d'autres conditions nécessaires. Le Théorème suivant porte sur une condition nécessaire d'ordre supérieur.

Théorème 7.8 *Si la fonctionnelle* F *est faiblement continue, alors:*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad k \geq 2: \quad F^{(k)}(u) \cdot \lambda_1 \cdots \lambda_k = 0,$$

est vérifié par $(\lambda_1, \xi_1), \cdots, (\lambda_k, \xi_k) \in \mathscr{V}$ *dès que le rang du système* $(\xi_1, \cdots, \xi_k)$ *est* $\leq k-1$.

Remarque 7.9 *Il est sous-entendu que* $F \in \mathscr{C}^\infty$ *a la régularité suffisante.*

Preuve. On prend

$$u^\varepsilon = u + \sum_{i=1}^{k} \varphi(\frac{x \cdot \xi_i}{\varepsilon})\, \lambda_i, \quad (\lambda_i, \xi_i) \in \mathscr{V}.$$

Si $k = N+1$, la condition de rang est automatique. On a, par définition de Λ :

$$F^{(N+1)}(u)\, \lambda_1 \cdots \lambda_N = 0, \quad \forall (\lambda_i) \in \Lambda$$

et $F(u)$ est un polynôme de degré $\leq N+1$. En effet: Soit $\Lambda \subset \mathbb{R}^p$, soit L l'espace vectoriel engendré par Λ. Si $\ell = \dim L < p$, on identifie L au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}^\ell$ de R^p et on décompose $\mathbb{R}^p$ en somme directe orthogonale $\mathbb{R}^p = \mathbb{R}^\ell \oplus \mathbb{R}^{p-\ell}$. Alors, $F(u)\Big|_{\mathbb{R}^\ell}$ est un polynôme de degré $k \geq N$ en les variables $u_1, \cdots, u_\ell$, à coefficients $c^{(1)}(u), \cdots, c^{(k)}(u)$ dans $\mathbb{R}^{p-\ell}$ fonctions de $u_{\ell+1}, \cdots, u_p$, c'est-à-dire vérifiant $\dfrac{\partial c}{\partial u_i}(u_j^\varepsilon) = 0$, $i = 1, \cdots, \ell$, $j = \ell+1, \cdots, p$. En conclusion, F est un polynôme en $u_1, \cdots, u_\ell$ de degré $\leq N+1$ avec des coefficients dépendant de $u_{\ell+1}, \cdots, u_p$. En particulier:

$$u_j^\varepsilon \to u_j \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega \quad (\text{fort dans} \quad L^1(\Omega)), \quad j = \ell+1, \cdots, p.$$

■

Dans la suite on se limite au cas où $L = \mathbb{R}^p$.

Théorème 7.10 *Si les conditions nécessaires d'ordre supérieur sont vérifiées (c'est-à-dire pour* $2 < k \leq N+1$ *), alors* $u \mapsto F(u)$ *est faiblement continue dès lors que le rang de* $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_k)$ *est indépendant de* $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_k)$ *vérifiant* $(\lambda_i, \xi_i) \in \mathscr{V}$, $i = 1, \cdots, k$.

Remarque 7.11 *Le Théorème* 7.10 *donne une condition nécessaire et suffisante de continuité faible.*

Remarque 7.12 *Il y a des cas où la condition de rang n'est pas satisfaite. Mais pratiquement, le résultat du Théorème* 7.10 *reste vrai de sorte que la restriction est technique.*

Remarque 7.13 *Un cas particulier important est celui où* $u^\varepsilon = D\psi^\varepsilon$, $\psi^\varepsilon \in W^{1,\infty}(\Omega)^N$, $u^\varepsilon \in L^\infty(\Omega)^{N\times N}$. *Le résultat exprime en fait que la condition nécessaire d'ordre* 2 , *i.e.*

$$F''(u)\,(\mu\otimes\xi)\,(\mu\otimes\xi) = 0, \quad \forall \mu \in \mathbb{R}^N, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \quad \forall u \in \mathbb{R}^{N\times N}$$

entraîne les condition nécessaire d'ordre ≥ 2 . *Ces conditions nécessaires impliquent que F(u) est combinaison linéaire des mineurs de* u . *Par exemple, si* $N = 3$ *et si* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, *soit* $\psi : \Omega \to \mathbb{R}^3$. *On suppose que* $\psi \in W^{1,\infty}(\Omega)^3 \mapsto F(\nabla\psi) \in L^\infty(\Omega)$ *est continue pour la topologie faible *. Alors,* $F(u)$ *s'explicite sous la forme:*

$$F(u) = c\,\det u + \sum_i c_i\, m_2^i(u) + \sum_{ij} c_{ij}\, u_{ij} + c_0 \tag{7.13}$$

où les $m_2^i(u)$ *sont les mineurs fondamentaux de* u *d'ordre* 2 . *Réciproquement, on vérifie immédiatement que* $F(u)$ *donnée par* (7.13) *est faiblement *continue.*

Remarque 7.14 *Le résultat de la Remarque* 7.13 *s'applique en particulier au Lemme Divergence-Rotationnel dont on montre qu'il entraîne la condition nécessaire d'ordre* 2 .

Remarque 7.15 *Le Théorème général ne s'applique pas si* F *est une fonction polynôme de degré* k *et si* $u^\varepsilon \stackrel{w}{\rightharpoonup} u$ *dans* $L^k(\Omega)^p$. *Par exemple, si* F *est une fonction polynôme de degré* 3 , *il faut aussi que* $u^\varepsilon \stackrel{w}{\rightharpoonup} u$ *dans* $L^4(\Omega)^p$.

Remarque 7.16 *Les lemmes de moyenne utilisent la régularité* $\det D\psi \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ *si* $\psi \in W^{1,N}(\Omega)^N$, *meilleure que* $L^1(\Omega)$.

7.4 Compléments sur le Théorème des correcteurs

On commence par rappeler le résultat du Théorème des correcteurs. Soit $A^\varepsilon \in \mathscr{M}(\alpha,\gamma,\Omega)$ H-convergente vers $A^0 \in \mathscr{M}(\alpha,\gamma,\Omega)$ et soit $u^\varepsilon \stackrel{w}{\rightharpoonup} u \quad H^1(\Omega)$ faible solution de $-\operatorname{div}(A^\varepsilon\, Du^\varepsilon) = f, \quad \mathcal{D}'(\Omega)$ avec $f \in H^{-1}(\Omega)$.

Théorème 7.17 *Avec les notations de ce paragraphe, le correcteur* r^ε *est défini par*

$$Du^\varepsilon = P^\varepsilon\, Du + r^\varepsilon, \tag{7.14}$$

$$r^\varepsilon \to 0 \quad L^1_{loc}(\Omega)^N \quad \textit{fort} \tag{7.15}$$

où la suite $P^\varepsilon \in L^2(\Omega)^{N\times N}$ *est définie par* $P^\varepsilon e_i = Dw_i^\varepsilon$, $i = 1,\cdots,N$ *et où*

$$w_i^\varepsilon \stackrel{w}{\rightharpoonup} x_i \qquad H^1(\Omega) \quad \textit{faible}, \tag{7.16}$$

$$-\operatorname{div}(A^\varepsilon\, Dw_i^\varepsilon) = g_i^\varepsilon \qquad \mathcal{D}'(\Omega), \tag{7.17}$$

$$g_i^\varepsilon \qquad \textit{compact dans} \quad H^{-1}(\Omega). \tag{7.18}$$

Si, en outre, $u \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$, *alors*

$$r^\varepsilon \to 0 \quad L^2_{loc}(\Omega)^N \quad \textit{fort} \tag{7.19}$$

où
$$Du^\varepsilon = \sum_{j=1}^{N} \partial_j u \cdot Dw_j^\varepsilon + r^\varepsilon.$$
Si
$$\int_\Omega A^\varepsilon\, Du^\varepsilon \cdot Du^\varepsilon \to \int_\Omega A^0\, Du \cdot Du\, dx$$
alors, on peut enlever " loc " dans (7.19)*.*

(i) Première application On regarde le problème

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(A^\varepsilon\, Du^\varepsilon - g^\varepsilon) &= 0, & (7.20)\\ g^\varepsilon \quad & \text{borné dans} \quad L^2(\Omega) & (7.21)\end{aligned}$$

7.5 Deuxième application

Soit à étudier la suite de terme général $F(Du^\varepsilon)$ où $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne et $F(0) = 0$. Si F est linéaire, on sait passer à la limite. Sinon, on considère la suite $F(\sum_{j=1}^{N} \lambda_j\, Dw_j^\varepsilon)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}^N$ fixé indépendant de ε. Son terme général est borné dans $L^2(\Omega)$. On suppose que λ décrit une partie dénombrable de $\mathbb{R}^N$. Alors, il existe une suite extraite diagonale (ε') telle que:

$$F(\sum_{j=1}^{N} \lambda_j\, Dw_j^{\varepsilon'}) \overset{w}{\rightharpoonup} F^0(x, \lambda) \quad \text{faible}$$

où $F^0 = F^0(x, \lambda) \in L^2_x(\Omega)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^N$ fixé. On vérifie que F^0 est lipschizienne, i.e. que
$$|F^0(x, \xi) - F^0(x, \eta)| \leq \frac{M}{\sqrt{\alpha\, \gamma}}\, |\xi - \eta|\,.$$
On conclut par densité des $\lambda \in \mathbb{R}^N$. Alors

$$F(Du^\varepsilon) = F(P^\varepsilon\, Du + r^\varepsilon) = F(P^\varepsilon\, Du) + R^\varepsilon$$

où $F(P^\varepsilon\, Du)$ est borné dans $L^1(\Omega)$ et où le reste R^ε vérifie

$$|R^\varepsilon| \leq M\, |r^\varepsilon|$$

donc converge dans $L^1_{loc}(\Omega)$ fort vers 0. Il en résulte le

Théorème 7.18 *Avec les notations de ce paragraphe, on a le résultat de convergence*

$$F(Du^\varepsilon) \overset{w}{\rightharpoonup} F^0(x, Du) \quad L^2(\Omega) \quad \textit{faible} \tag{7.22}$$

Remarque 7.19 *Y-a-t-il unicité des w_i^ε et P_i^ε ?*

La réponse à la question de la Remarque 7.19 est contenue dans le

Théorème 7.20 *Si* (P^ε) *et* $(\hat{P}^\varepsilon)$ *vérifient le Théorème* 7.18 *des correcteurs, alors* $P^\varepsilon - \hat{P}^\varepsilon \to 0$ *dans* $L^2_{loc}(\Omega)$ *fort.*

Remarque 7.21 *A quoi ressemble* P^ε *dans le cas de matériaux en couches?*

Un calcul explicite a montré que la matrice homogénéisée A^0 dans le cas de matériaux en couches vérifie, par définition de A^0 :

$$\frac{1}{A^\varepsilon_{11}} \overset{*}{\rightharpoonup} \frac{1}{A^0_{11}} \qquad L^\infty(I) \quad \text{faible} \, * \tag{7.23}$$

$$\frac{A^\varepsilon_{i1}}{A^\varepsilon_{11}} \overset{*}{\rightharpoonup} \frac{A^0_{i1}}{A^0_{11}} \qquad L^\infty(I) \quad \text{faible} \quad * \quad , i \neq 1; \tag{7.24}$$

$$\frac{A^\varepsilon_{1j}}{A^\varepsilon_{11}} \overset{*}{\rightharpoonup} \frac{A^0_{1j}}{A^0_{11}} \qquad L^\infty(I) \quad \text{faible} \quad * \quad , j \neq 1; \tag{7.25}$$

$$A^\varepsilon_{ij} - \frac{A^\varepsilon_{i1}\, A^\varepsilon_{1j}}{A^\varepsilon_{11}} \overset{*}{\rightharpoonup} A^0_{ij} - \frac{A^0_{i1}\, A^0_{1j}}{A^0_{11}} \qquad L^\infty(I) \quad \text{faible} \quad * \quad i, j \neq 1; \tag{7.26}$$

Par construction de la matrice P^ε associée, on pose

$$w^\varepsilon_i = x_i + z^\varepsilon_i(x_1), \quad i = 1, \cdots, N.$$

Alors

$$Dw^\varepsilon_i = e_i + {z^\varepsilon}'_i(x_1) \cdot e_1 = Dw^\varepsilon_i(x_1)$$

Soit g^ε_i donné par $g^\varepsilon_i(x_1) = -\dfrac{dG^\varepsilon_i(x_1)}{dx_1}$, G^ε_i à choisir tel que

$$-\frac{d}{dx_1}\left(A^\varepsilon_{11}\frac{dz^\varepsilon_i}{dx_1} + A^\varepsilon_{1i}\right) = \frac{dG^\varepsilon_i(x_1)}{dx_1}.$$

On prend $G^\varepsilon_1 = A^0_{1i}$. Alors:

$$\frac{dz^\varepsilon_i}{dx_1} = \frac{A^0_{1i}}{A^\varepsilon_{11}} - \frac{A^\varepsilon_{1i}}{A^\varepsilon_{11}}.$$

On trouve:

$$P^\varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{A^0_{11}}{A^\varepsilon_{11}} & \frac{A^0_{12}-A^\varepsilon_{12}}{A^\varepsilon_{11}} & \cdots & \cdots & \frac{A^0_{1N}-A^\varepsilon_{1N}}{A^\varepsilon_{11}} \\ 0 & 1 & 0\cdots & \cdots 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$P^\varepsilon \overset{w}{\rightharpoonup} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0\cdots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0\cdots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\cdots 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Remarque 7.22 *Si* $w_i^\varepsilon = x_i + z_i^\varepsilon$, *avec*

$$z_i^\varepsilon \xrightarrow{w} 0 \qquad H^1(\Omega) \quad \textit{faible}; \tag{7.27}$$

$$-\operatorname{div}\left(A^\varepsilon\left(Dz_i^\varepsilon + e_i\right)\right) \qquad \textit{compact dans} \quad H^{-1}(\Omega). \tag{7.28}$$

On pose:

$$u^\varepsilon = u + \sum_{j=1}^N \partial_j u\, z_j^\varepsilon + s^\varepsilon, \quad u \in H^2(\Omega).$$

Alors:

$$Du^\varepsilon = Du + \sum_{j=1}^N \partial_j u\, Dz_j^\varepsilon + \sum_{j=1}^N D(\partial_j u)\, z_j^\varepsilon + Ds^\varepsilon \tag{7.29}$$

$$\sum_{j=1}^N D(\partial_j u)\, z_j^\varepsilon \to 0 \quad (L^1(\Omega))^N \quad \textit{fort.} \tag{7.30}$$

Mais Du *se décompose dans la base* (e_j) *:*

$$Du = \sum_{j=1}^N \partial_j u\, e_j$$

Donc (7.29) *devient*

$$Du^\varepsilon = \sum_{j=1}^N \partial_j u\, Ds_j^\varepsilon + \mathscr{O}(1) \quad \textit{dans} \quad (L^1(\Omega))^N \quad \textit{fort.}$$

Cela entraîne $Ds^\varepsilon = \mathcal{O}(1)$ *dans* $L^1(\Omega)^N$ *fort si et seulement si*

$$Ds^\varepsilon \to 0 \qquad L^1(\Omega) \quad \textit{fort} \tag{7.31}$$

$$\textit{d'où} \quad s^\varepsilon \to 0 \qquad W^{1,1}(\Omega) \quad \textit{fort.} \tag{7.32}$$

7.6 Le cas périodique

(*cf*[2, 8]) Le résultat énoncé dans la Remarque 7.22 est désormais explicite dans le cas périodique développé dans ce paragraphe.

En effet, soit $Y = \prod_{i=1}^N]0,\, y_i[$ le pavé de $\mathbb{R}^N$, $A \in (L^\infty(\mathbb{R}^N))^{N\times N}$, Y -périodique. (Par définition, une application $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est Y-périodique si

$$f(x + \sum_{i=1}^N k_i\, y_i) = f(x), \quad \forall k = (k_i) \in \mathbb{Z}^N, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.)$$

On note $\beta = \|A\|_\infty$ et on suppose que $A \geq \alpha\, I$, $\alpha > 0$. On considère le problème

$$-\operatorname{div}\left(A(\frac{x}{\varepsilon})\, Du^\varepsilon\right) \;=\; f, \quad \mathcal{D}'(\Omega), \tag{7.33}$$

$$u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega). \tag{7.34}$$

On remarque que la théorie générale s'applique avec $A^\varepsilon = A(\frac{x}{\varepsilon})$. On a le

Théorème 7.23 *Dans le cas périodique, toute la suite converge. Plus précisément: la suite de matrices* (A^ε) *associée au problème* (7.33)-(7.34) *est* H *- convergnte vers une matrice à coefficients constants donnée par une formule "explicite".*

Dans la suite, on suppose que Y est le cube unité de $\mathbb{R}^N$ pour fixer les idées.

Définition 7.24 *On note* $L^2_\sharp(Y)$ *l'ensemble des fonctions* $f \in L^2\mathbb{R}^N)$ Y *-périodiques.*

Définition 7.25 *On dit que* $z \in H^1_\sharp(Y)$ *si et seulement si* $z \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ *et* z *est* Y *-périodique.*

Lemme 7.26 *Soit* $f \in L^2_\sharp(Y)$, $\int_Y z\,dy = 0$, $g \in L^2_\sharp(Y)$ *. Alors, il existe* z *unique,* $z \in H^1_\sharp(Y)$, $\int_Y g\,dy = 0$ *, tel que:*

$$-\operatorname{div}(A\,Dz) = f - \operatorname{div}(g), \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N). \tag{7.35}$$

Preuve. On applique le lemme de Lax-Milgram à $V = H^1_\sharp(Y)$. Plus précisément: on note

$$V_m = \{z \in H^1_\sharp(Y); \quad \int_Y z = 0\}$$

et on munit V_m de la norme

$$|z|_{H^1_\sharp(Y)} = \int_Y |Dz|^2$$

qui est bien définie par le Théorème de Poincaré-Wittinger. Avec ces notations, la formulation variationnelle du problème (7.35) s'écrit

$$\int_Y A\,Dz \cdot D\psi = \int_Y f \cdot \psi + \int_Y g \cdot D\psi, \qquad \forall \psi \in V_m, \tag{7.36}$$

$$z \in V_m \qquad . \tag{7.37}$$

D'après le Lemme de Lax-Milgram, le problème (7.36)-(7.37) admet une solution unique $z \in V_m$ dès que $f \in L^2_\sharp(Y)$. On veut écrire l'équation aux dérivées partielles associée, soit formellement si $f \in \mathscr{C}^\infty_c(Y)$:

$$-\operatorname{div}(A\,Dz) \;=\; f - \frac{1}{|Y|}\int_Y f - \operatorname{div}(g), \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N) \tag{7.38}$$

$$z \;\in\; H^1_\sharp(Y), \quad \int_Y z = 0. \tag{7.39}$$

Dans la suite, on pose $\psi = f - \dfrac{1}{|Y|}\displaystyle\int_Y f$, de sorte que $\psi \in \mathscr{C}^\infty_c(Y)$, $\displaystyle\int_Y \psi\,dy = 0$. On en déduit alors le résultat annoncé. ∎

D'après le Lemme 7.26, il existe des fonctions $\chi_j \in H^1_\sharp(Y)$, $\displaystyle\int_Y \chi_j = 0$, $j = 1, \cdots, N$, telles que

$$-\operatorname{div}(A\,(D\chi_j + e_j)) = 0, \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N).$$

Alors: $A^0\, e_j = \dfrac{1}{|Y|} \displaystyle\int_Y A\,(D\chi_j + e_j)$. On a aussi, en appliquant le lemme de Lax-Milgram:

$$A^0\, e_j \cdot e_i = \frac{1}{|Y|} \int_Y A\,(D\chi_j + e_j) \cdot (D\chi_i + e_i)\, dy.$$

De plus, les w_j^ε sont donnés par $w_j^\varepsilon = x_j + \varepsilon\, \chi_j(\dfrac{x}{\varepsilon})$ avec $\varepsilon\, \chi_j(\dfrac{x}{\varepsilon}) = z_j^\varepsilon$, de sorte que $Dw_j^\varepsilon = e_j + (D\chi_j)(\dfrac{x}{\varepsilon})$ et alors $P^\varepsilon\, e_j = Dw_j^\varepsilon$ par définition de P^ε . Il en résulte que $P^\varepsilon = I + D\chi(\dfrac{x}{\varepsilon})$.

Preuve. Soit w_j^ε défini par

$$w_j^\varepsilon = x_j + \varepsilon\, \chi_j(\frac{x}{\varepsilon}), \quad \chi_j \in H^1_\sharp(Y).$$

On a $Dw_j^\varepsilon = e_j + D\chi_j(\dfrac{x}{\varepsilon})$ où $D\chi_j \in (L^2_\sharp(Y))^N$. On utilise le

Lemme 7.27 *Si* $f \in L^2_\sharp(Y)$ *et si* $f^\varepsilon = f(\dfrac{x}{\varepsilon})$ *, alors*

$$\|f\|_{L^2(Q)} \simeq \frac{|Q|}{|Y|} \int_Y |f|^2 \tag{7.40}$$

pour tout cube $Q \subset \mathbb{R}^N$ *et:*

$$f^\varepsilon \overset{w}{\rightharpoonup} \frac{1}{|Y|} \int_Y f \quad L^2_{loc}(\mathbb{R}^N) \quad \textit{faible.} \tag{7.41}$$

Remarque 7.28 *Une application connue de ce résultat est donnée par*

$$\sin(2\,\pi\, n\, x) \overset{w}{\rightharpoonup} 0 = \frac{1}{|Y|} \int_Y \sin(x)\, dx.$$

Preuve de (7.41)**.** Pour montrer le Lemme 7.27, on remarque

$$\int_Q (f^\varepsilon)^2 = \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} \iint_{(\varepsilon\, Y)_i} |f^\varepsilon|^2 .$$

En comptant soigneusement le nombre N^ε de cubes élémentaires qui rencontrent le cube Q dans le membre de droite, on trouve que $N^\varepsilon\, \varepsilon^N\, |Y| = |Q|$, i.e. que $N^\varepsilon = \frac{|Q|}{\varepsilon^N\, |Y|}$. On en déduit que

$$\int_Q f^{\varepsilon 2} = \frac{|Q|}{\varepsilon^N\, |Y|} \,(\int_{\varepsilon\, Y} |f(\frac{x}{\varepsilon})|^2\ dx)$$

i.e., après le changement de variable $y = \dfrac{x}{\varepsilon}$:

$$\int_Q (f^\varepsilon)^2 = \frac{1}{|Y|} \int_Y |f|^2\ dy$$

ce qui coïncide avec (7.40) et montre le Lemme 7.27. On en déduit que la suite (w_j^ε) est bornée dans $H^1(Q)$, pour tout cube $Q \subset \mathbb{R}^N$, i.e. que $\varepsilon\, \chi_j(\dfrac{x}{\varepsilon})$ est borné dans

$H^1(Q)$ pour tout cube $Q \subset \mathbb{R}^N$. Mais $\chi_j(\frac{x}{\varepsilon})$ est borné dans $L^2(Q)$ pour tout cube $Q \subset \mathbb{R}^N$, donc

$$\varepsilon\, \chi_j(\frac{x}{\varepsilon}) \overset{w}{\rightharpoonup} 0 \quad H^1(Q) \quad \text{faible.}$$

Finalement:

$$w_j^\varepsilon \overset{w}{\rightharpoonup} x_j \quad H^1(Q) \quad \text{faible.}$$

Or

$$A^\varepsilon\, Dw_j^\varepsilon = (A\,(D\chi_j + e_j))(\frac{x}{\varepsilon})$$

et $\operatorname{div}(A\,(D\chi_j + e_j)) = 0, \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. Après un changement de variable astucieux

$$-\operatorname{div}(A^\varepsilon\, Dw_j^\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\, \operatorname{div}(A\,(D\chi_j + e_j))(\frac{x}{\varepsilon}) \equiv 0 \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$$

En conclusion:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(A^\varepsilon\, Dw_j^\varepsilon) &= 0, \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N); && (7.42)\\ w_j^\varepsilon \overset{w}{\rightharpoonup} 0 & \qquad H^1(Q) \quad \text{faible} \quad \forall Q \subset \mathbb{R}^N && (7.43) \end{aligned}$$

convient pour le correcteur P^ε . Or, par définition de A^0 :

$$\begin{aligned} A^\varepsilon\, Dw_i^\varepsilon \overset{w}{\rightharpoonup} A^0\, e_i, & \qquad L^2(Q)^N \quad \text{faible} && (7.44)\\ A^\varepsilon\, Dw_i^\varepsilon &= A(\frac{x}{\varepsilon})\,(D\,(\chi_i(\frac{x}{\varepsilon}) + e_i)) && (7.45)\\ &= A\,D\,(\chi_i + e_i)(\frac{x}{\varepsilon}) && (7.46) \end{aligned}$$

et $A\,D\,(\chi_i + e_i) \in L^2_\sharp(Y)^N$, donc

$$A^\varepsilon\, Dw_i^\varepsilon = A\,(D\,(\chi_i + e_i))\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \overset{w}{\rightharpoonup} \frac{1}{|Y|} \int_Y A\,(D\,(\chi_i + e_i))\, dy = A^0\, e_i.$$

On en déduit la matrice A^0 . ■

■

7.7 Le correcteur dans le cas périodique

Avec les notations habituelles:

$$Dw_i^\varepsilon = e_i + D\chi_i(\frac{x}{\varepsilon}).$$

Il en résulte

$$Du^\varepsilon = \sum_{i=1}^N \partial_i u\,(D\chi_i(\frac{x}{\varepsilon}) + e_i) + r_\varepsilon \tag{7.47}$$

$$r_\varepsilon \to 0 \quad L^1_{loc}(\Omega) \quad \text{fort} \tag{7.48}$$

$$u^\varepsilon = u + \sum_{j=1}^N \partial_j u\, z_j^\varepsilon + s_\varepsilon, \tag{7.49}$$

$$s_\varepsilon \to 0, \quad W^{1,1}_{loc}(\Omega) \quad \text{fort} \tag{7.50}$$

En fait: $z_j^\varepsilon = \varepsilon\,\chi_j(\dfrac{x}{\varepsilon})$, de sorte que (7.49)-(7.50) se réécrit sous la forme:

$$u^\varepsilon = u + \sum_{j=1}^{N} \varepsilon\,\partial_j u\,\chi_j(\frac{x}{\varepsilon}) + s_\varepsilon, \tag{7.51}$$

$$s_\varepsilon \to 0, \quad W^{1,1}_{loc}(\Omega) \quad \text{fort} \tag{7.52}$$

8 COMPLÉMENT: LES DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES

8.1 Généralités

On cherche u^ε sous la forme

$$u^\varepsilon = \sum_{j\geq 0} \varepsilon^j\, u^j + R_J^\varepsilon, \tag{8.1}$$

$$\|R^\varepsilon\| \leq C_J\, \varepsilon^{j-1}, \tag{8.2}$$

où la constante C_J n'est pas contrôlée. On rappelle que u^ε est solution de

$$u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega), \tag{8.3}$$

$$-\operatorname{div}(A^\varepsilon\, Du^\varepsilon) = f, \quad \mathcal{D}'(\Omega), \tag{8.4}$$

où $A^\varepsilon = A(\dfrac{x}{\varepsilon})$ avec A coercive, Y-périodique, régulière. Plus précisément, on cherche u^ε sous la forme

$$u^\varepsilon = u^0 + \varepsilon\, u^1(x,\, \frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon^2\, u^2(x,\, \frac{x}{\varepsilon}) + \cdots + \varepsilon^k\, u^k(x,\, \frac{x}{\varepsilon}) + r_k^\varepsilon \tag{8.5}$$

$$\|r_k^\varepsilon\| \leq C_k\, \varepsilon^{k-1}. \tag{8.6}$$

La méthode consiste en une étape formelle suivie de la justification. Partant de l'Ansatz (8.5)-(8.6), on est ramené à la résolution du problème sur une cellule Y :

$$-\operatorname{div}_y(A(y)\, D_y z(y)) = f(y) - \operatorname{div}_y(g(y)), \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N), \tag{8.7}$$

$$\int_Y z(y)\, dy = 0. \tag{8.8}$$

Le problème (8.7)-(8.8) admet une solution unique si et seulement si $\displaystyle\int_Y f(y)\, dy = 0$.

8.2 Premiers calculs

On vérifie aisément que $u^0(x,\, y) = \bar{u}^0(x)$ ne dépend pas de la variable auxiliaire y . Pour le calcul de u^1 , on introduit χ_j , l'unique solution de

$$-\operatorname{div}_y(A(y)\,(D\chi_j + e_j)) = 0, \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N), \tag{8.9}$$

$$\int_Y \chi_j(y)\, dy = 0. \tag{8.10}$$

Alors

$$u^1(x,\, y) = \sum_{j=1}^{N} \partial_j \bar{u}^0(x)\, \chi_j(y) + \bar{u}(x).$$

On trouve la CNS suivante pour l'existence de u^2

$$\frac{1}{|Y|}\int_Y (\mathrm{div}_x\,(A\,D_y u^1) + \mathrm{div}_x\,(A\,D_x \bar{u}^0) + f(x)) = 0 \tag{8.11}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{|Y|}\int_Y (\mathrm{div}_x (A\,D_y (\sum_{j=1}^N \partial_j \bar{u}^0(x)\,\chi_j(y)) + \bar{u}(x)) \tag{8.12}$$

$$+\,\mathrm{div}_x\,(A\,D_x \bar{u}^0) + f(x)) = 0 \tag{8.13}$$

où $A\,D_x \bar{u}^0 = \sum_{j=1}^N (A\,e_j)\,\partial_j \bar{u}^0(x)$. Les calculs permettent de transformer (8.11) en

$$\frac{1}{|Y|}\int_Y \left\{\mathrm{div}_x [(A\,(D_y \chi_j + e_j))\,\partial_j \bar{u}^0] + f(x)\right\} \;=\; 0, \tag{8.14}$$

$$\mathrm{div}_x \frac{1}{|Y|}\int_Y [(A\,(D_y \chi_j + e_j))\,\partial_j \bar{u}^0] + f(x) \;=\; 0, \tag{8.15}$$

Soit

$$A^0\,e_j = \frac{1}{|Y|}\int_Y (A\,(D_y \chi_j + e_j)).$$

Alors (8.14) s'écrit:

$$\mathrm{div}_x\,(A^0\,D\bar{u}^0) + f = 0.$$

Finalement, la CNS d'existence du terme u^2 est que $\bar{u}^0$ soit solution de

$$-\,\mathrm{div}_x\,(A^0\,D\bar{u}^0) = f$$

et alors

$$u^2(x,\,y) = \bar{u}^2(x) + \sum_{j=1}^N \partial_j \bar{u}^1\,\chi_j(y) + \sum_{k,\ell=1}^N \partial^2_{kl} \bar{u}^0\,\chi_{kl}(y).$$

Pour déterminer $\bar{u}^2$, on reporte les résultats obtenus dans le problème initial, ce qui donne à l'ordre 2 :

$$\mathrm{div}_y\,(A\,D_y u_2) \;+\; \mathrm{div}_x\,(A\,D_y \chi_j\,\partial_j \bar{u}^0) + \tag{8.16}$$

$$+\;\mathrm{div}_y\,(A\,D_x \partial_j \bar{u}^0\,\chi_j + D_x \bar{u}^1) + \tag{8.17}$$

$$+\;\mathrm{div}_x\,(A\,D_x \bar{u}^0) - \mathrm{div}_x\,(A^0\,D_x \bar{u}^0)) = 0 \tag{8.18}$$

REFERENCES

[1] J. M. Ball. Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.* **63** (1987) 337–403.

[2] A. Bensoussan, J. L. Lions, G. Papanicolaou. *Asymptotic Methods in Periodic Structures.* North-Holland, Amsterdam 1978.

[3] E. de Giorgi, S. Spagnolo. Sulla convergenza degli integrali dell' energia per operatori ellittici del secondo ordine. *Boll. UMI* **8** (1973) 391–411.

[4] N. G. Meyers. An l^p -estimate for the gradient of solutions of second order elliptic equations. *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa* **5** (1978) 489–507.

[5] F. Murat. Compacité par compensation. *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa* **5** (1978) 489–507.

[6] F. Murat. Compacité par compensation ii. In E. D. Giorgi, E. Magenes, U. Mosco, editors, *Proceedings of the International meeting on recent methods in non linear Analysis*, pages 245–256. Pitagora, Bologna 1979.

[7] F. Murat, L. Tartar. H-convergence. Publication du Laboratoire d'Analyse Numérique 94001, Université Pierre et Marie Curie, Paris 1994.

[8] E. Sanchez-Palencia. *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*, volume 127 of *Lecture Notes in Physics*. Springer-Verlag, Heidelberg 1980.

[9] S. Spagnolo. Sulla convergenza di soluzioni di equazioni paraboliche ed ellittiche. *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa* **22** (1968) 571–597.

[10] L. Tartar. Compensated compactness and applications to p.d.e. In R. J. Knops, editor, *Non linear Analysis and Mechanics, Heriot-Watt Symposium, IV*, volume 39 of *Research Notes in Mathematics*, pages 136–212. Pitman, Boston 1979.